Application de la théorie des ondelettes *

Valérie Perrier

Laboratoire de Modélisation et Calcul de l'IMAG
Institut National Polytechnique de Grenoble

`Valerie.Perrier@imag.fr`

*Enseignement UNESCO *Traitement du signal et des images numériques*, Tunis, ENIT, 14-18 mars 2005

Cours 2
Transformée en Ondelettes Continue 2D

Partie I : théorie et implémentation

1. Ondelettes 2D.
2. Transformée en ondelettes directionnelle, formule de synthése.
3. Transformée en ondelettes isotrope. Exemple.
4. Ondelette pour l'analyse d'image : ondelette de Canny, inversion, algorithmes rapides.

Transformée de Fourier 2D

La transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\hat{f}(\vec{k}) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x})\ e^{-2i\pi\vec{k}.\vec{x}}\ d\vec{x}$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, la **formule de synthése** de f s'écrit :

$$f(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\vec{k})\ e^{2i\pi\vec{k}.\vec{x}}\ d\vec{k}$$

1- Définition des ondelettes 2D

$\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ est une **ondelette** si elle remplit la condition d'admissiblité suivante :

$$c_\psi = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\vec{k})|^2}{||\vec{k}||^2}\ d\vec{k}\ <\ \infty$$

Cette propriété implique que :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \psi(\vec{x})\ d\vec{x} = 0$$

Dans la pratique, on utilise souvent une condition plus forte en imposant à l'ondelette un nombre p de **moments nuls** :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} ||\vec{x}||^n \psi(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \quad \forall n = 0, 1, ..., p-1 \text{ et } \iint_{\mathbb{R}^2} ||\vec{x}||^p \psi(\vec{x}) d\vec{x} \neq 0.$$

Cette propriété signifie que la transformée de Fourier de l'ondelette doit s'annuler comme $||\vec{k}||^p$ en $\vec{k} = 0$ dans l'espace spectral.

1- Famille d'ondelettes 2D

A partir d'une ondelette $\psi(\vec{x})$, la famille d'ondelettes est définie par dilatation, rotation et translation :

$$\psi_{(a,\vec{b},\theta)}(\vec{x}) = \frac{1}{a}\,\psi\left(R^{-\theta}\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right)\right)$$

avec $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$, a une échelle positive et $R^{-\theta}$ la rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^2$, de matrice $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Exemples

Ondelette de Morlet anisotrope : Soit $\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ le vecteur unitaire dans la direction α. L'ondelette de Morlet (complexe) est :

$$\psi(\vec{x}) = e^{-\pi\|\vec{x}\|^2} e^{2i\pi 5\vec{x}.\vec{u}}$$

Ondelettes isotropes :

Laplaciens itérés de Gaussienne :

Pour $n \geq 1$, on définit une ondelette h_{2n} par :

$$h_{2n}(\vec{x}) = (-1)^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^n e^{-\pi \|\vec{x}\|^2}$$

Sa transformée de Fourier est :

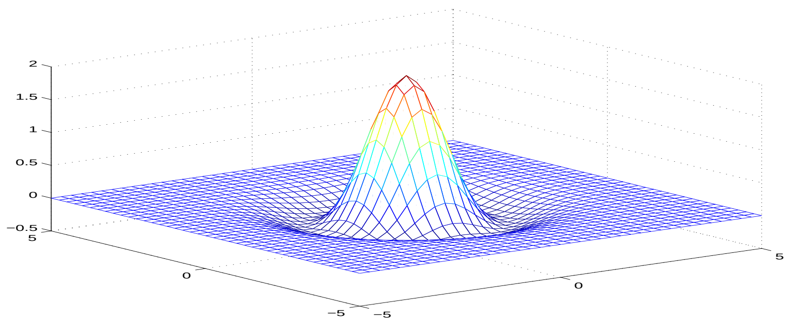
$$\hat{h}_{2n}(\vec{k}) = 4^n \pi^{2n} \|\vec{k}\|^{2n} e^{-\pi \|\vec{k}\|^2} \tag{1}$$

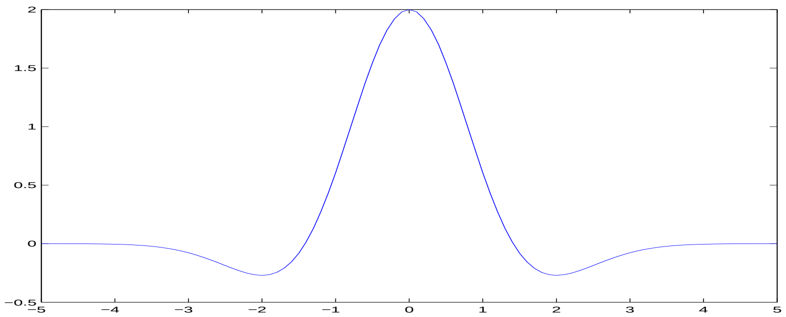
Pour $n = 2$, h_2 est le Laplacien de la Gaussienne, couramment utilisé en Vision par ordinateur. Dans la littérature, h_2 est appelée communément le chapeau mexicain.

Remarque : l'ondelette h_{2n} a exactement $2n$ moments nuls. Le maximum de sa transformée de Fourier $\hat{h}_{2n}$ se trouve en $k_0 = \sqrt{2n}$.

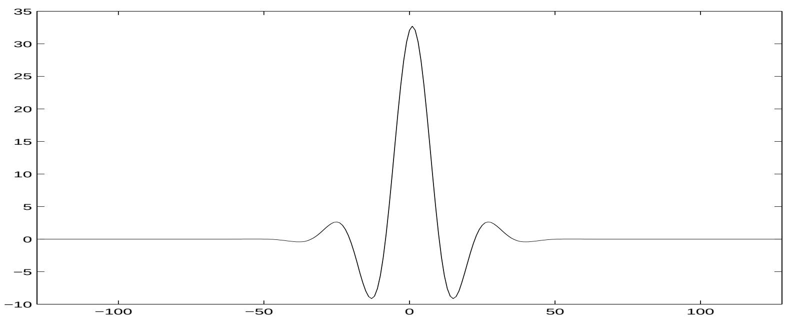
Exemples d'ondelettes dérivées de Gaussiennes isotropes

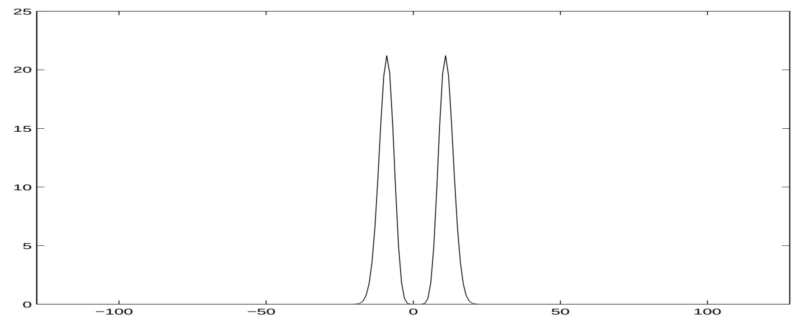
Ondelette $h_2(x, y)$ *(chapeau mexicain), et coupe en* x *:*





Coupe dans l'espace physique et spectral de l'ondelette h_8





2 - Transformée en Ondelettes 2D directionnelle

Soit ψ une ondelette 2D. La transformée en ondelettes directionnelle d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est définie par :

$$\begin{aligned} Wf(a,\vec{b},\theta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x})\ \overline{\psi_{(a,\vec{b},\theta)}(\vec{x})}\ d\vec{x} \\ &= \frac{1}{a} \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x})\ \psi\left(R^{-\theta}\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right)\right)\ d\vec{x} \end{aligned}$$

Par le théorème de Parseval on a :

$$Wf(a,\vec{b},\theta) = a \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\vec{k})\ \overline{\hat{\psi}(aR^{-\theta}\vec{k})}\ e^{2i\pi\vec{k}.\vec{b}} d\vec{k}$$

Formule de synthèse: La fonction f peut être reconstruite par la formule suivante :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} Wf(a, \vec{b}, \theta)\ \psi_{(a,\vec{b},\theta)}(\vec{x})\ \frac{da}{a^3}\ d\theta\ d\vec{b}$$

avec

$$c_\psi = \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}\ \frac{|\hat{\psi}(\vec{k})|^2}{\|\vec{k}\|^2}.$$

La **conservation de l'énergie** s'écrit avec les coefficients d'ondelettes :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(\vec{x})|^2\ d\vec{x} = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} |Wf(a, \vec{b}, \theta)|^2\ \frac{da\ d\theta\ d\vec{b}}{a^3}$$

Formule de synthèse avec une ondelette différente

Soit $f(\vec{x}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Décomposition en ondelettes de $f(\vec{x})$ avec une *ondelette d'analyse* g:
$a > 0, \vec{b} \in \mathbb{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi]$,

$$W_g f(a, \vec{b}, \varphi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) \; \frac{1}{a}\bar{g}\left(R_{-\varphi}\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right)\right) \, d\vec{x}$$

Synthése avec une *ondelette de reconstruction* h :

$$f(\vec{x}) \quad = \quad \frac{1}{c_{gh}} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} W_g f(a, \vec{b}, \varphi) \; \frac{1}{a} h\left(R_{-\varphi}\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right)\right) \frac{da}{a^3} d\vec{b} \, d\varphi$$

Condition d'admissibilité sur les fonctions g et h $(g, h \in L^2(\mathbb{R}^2))$:

$$c_{gh} = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{\hat{g}}(\vec{k})\hat{h}(\vec{k})}{||\vec{k}||^2} d\vec{k} < +\infty$$

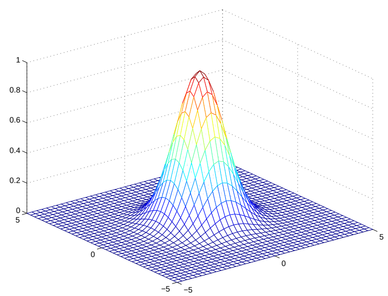
Exemples "classiques"

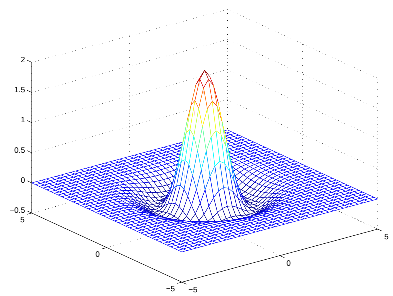
Ondelettes construites à partir de la gaussienne $G(\vec{x}) = e^{-\pi \|\vec{x}\|^2}$.

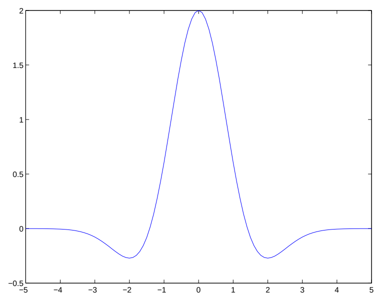
- Transformée avec **ondelettes isotropes**

Par exemple $g(\vec{x}) = h(\vec{x}) = \Delta G(\vec{x})$ *(Chapeau mexicain)*

ou $g(\vec{x}) = G(\vec{x})$ (g n'est pas une "ondelette"), et $h = \Delta G$.







- Transformée avec **ondelette vectorielle** $g(x) = \nabla G(x)$

(Détecteur multi-échelles de Canny)

4 - Transformée en ondelette isotrope

Dans le cas où l'ondelette est réelle, isotrope, (ie radiale $\psi(\vec{x}) = h(\|\vec{x}\|)$), la transformée en ondelette d'une fonction f est définie par :

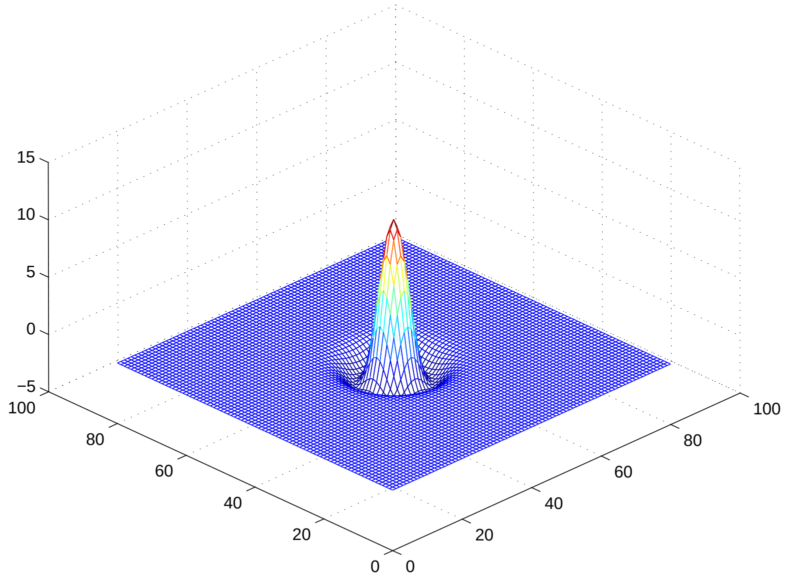
$$Wf(a,\vec{b}) = \frac{1}{a} \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x})\ \psi\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right) d\vec{x}$$

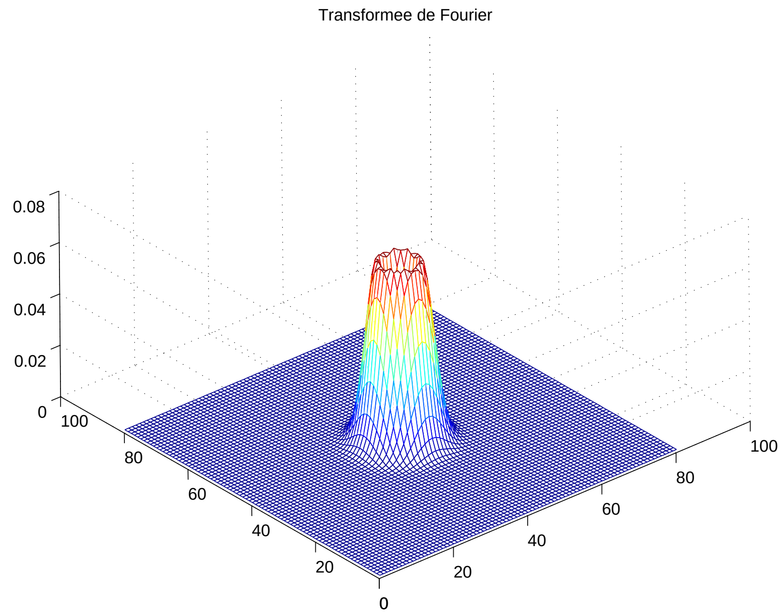
(l'intégrale sur θ n'apparait plus)

Par le théorème de Parseval, on a :

$$Wf(a,\vec{b}) = a \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\vec{k})\ \overline{\hat{\psi}(a\vec{k})}\ e^{2i\pi\vec{k}.\vec{b}} d\vec{k} \tag{2}$$

Cette propriété signifie que la transformée en ondelette filtre la fonction f autour du nombre d'onde $\frac{k_0}{a}$.





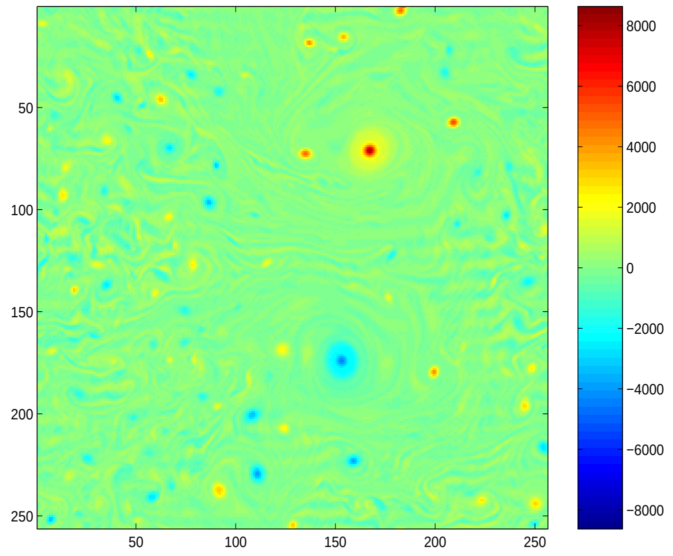
Si ψ est admissible, on a la **conservation de l'énergie** :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} \;=\; \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} |Wf(a,\vec{b})|^2 \frac{da\ d\vec{b}}{a^3}.$$

et la formule de synthése : $f(\vec{x}) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} Wf(a,\vec{b})\ \psi_{a,\vec{b}}(\vec{x})\ \frac{da}{a^3}\ d\vec{b}$

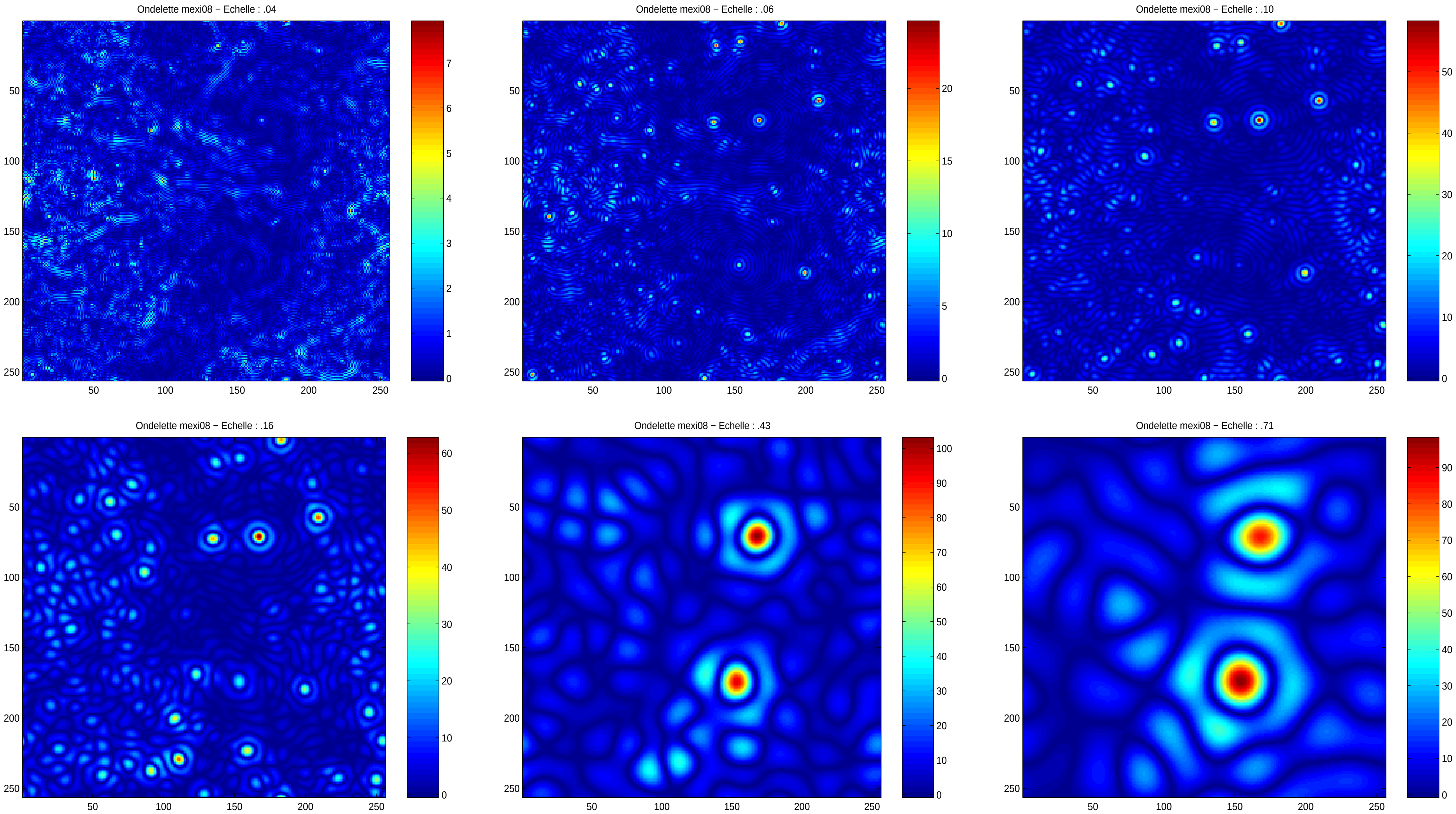
Exemples d'analyse en ondelettes 2D

Analyse d'un champ turbulent bidimensionnel : La fonction s à analyser est un champ de vorticité 256^2 provenant de la simulation numérique d'un écoulement turbulent bidimensionnel. Cet écoulement permet de visualiser des tourbillons à différentes tailles et à grande durée de vie, appelée aussi structures cohérentes.



Champ de vorticité

Coefficients d'ondelettes à échelle fixée



4. Une ondelette adaptée pour le traitement d'image : le Détecteur multiéchelle de Canny

Soit Θ un noyau de lissage:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Theta = 1$$

$$0 \leq \Theta$$

$$\Theta(x, y) \text{ isotrope ou } \Theta(x, y) = \Theta_1(x)\Theta_2(y)$$

Par exemple $\Theta(\vec{x}) = G(\vec{x}) = e^{-\pi\|\vec{x}\|^2}$ est un noyau de lissage à la fois isotrope et tensoriel.

- **Ondelettes directionnelles** :

$$\Psi(x) = \nabla\Theta(x) = (\psi^1, \psi^2)$$

$$\psi^1 = \frac{\partial\Theta}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \psi^2 = \frac{\partial\Theta}{\partial x_2}$$

Ondelette dans la direction φ : $\psi^\varphi = \cos\varphi \frac{\partial G}{\partial x_1} + \sin\varphi \frac{\partial G}{\partial x_2} = \vec{\varphi}.\nabla G$

• **Analyse :** Calcul de la transformée

$$\overrightarrow{Wf}(a,\vec{b}) = (W^1 f(a,\vec{b}), W^2 f(a,\vec{b}))$$

$W^1 f(a,\vec{b}) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) \frac{1}{a} \psi^1 (\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}) dx$ $\longrightarrow$ singularités verticales.
$W^2 f(a,\vec{b}) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) \frac{1}{a} \psi^2 (\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}) dt$ $\longrightarrow$ singularités horizontales.

Interprétation :

$$\overrightarrow{Wf}(a,\vec{b}) = -a \overrightarrow{\nabla}(f * \frac{1}{a} \check{\Theta}(\frac{\vec{x}}{a}))(\vec{b})$$

(Donc $\overrightarrow{Wf}$ représente le gradient de l'image lissée).

Relation entre le détecteur multiéchelle et la transformée en ondelettes directionnelle

Si Θ est isotrope, on a la relation :

$$W_{\psi^1} f(a, \vec{b}, \varphi) = \vec{\varphi} \,.\, \overrightarrow{Wf}(a, \vec{b}) \rightarrow \text{singularités dans la direction } \vec{\varphi}^{\perp}$$

(*où* $W_{\psi^1} f$ *est la transformée directionnelle avec* ψ^1 *comme ondelette d'analyse*)

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} W_{\psi^1} f(a, \vec{b}, \varphi) \\ W_{\psi^2} f(a, \vec{b}, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 f(a, \vec{b}) \\ W^2 f(a, \vec{b}) \end{pmatrix}$$

On peut écrire vectoriellement cette égalité :

$$\vec{\mathrm{W}}_{\nabla\Theta} = R^{-\varphi} \vec{\mathrm{W}}$$

$\rightsquigarrow$ Permet d'obtenir une formule de reconstruction pour le Détecteur Multiéchelle.

• **Inversion du détecteur multiéchelle** En adaptant la formule d'inversion de la transformée en ondelettes directionnelle au DMC :

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{\pi}{C_{\psi^1}} \int_{a>0} \frac{da}{a^3} \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{b}\ \overrightarrow{\mathrm{W}} f(\vec{b}, a).\vec{\Psi}_{a,\vec{b}}(\vec{x})}$$

$(C_{\psi^1} = \pi^2$ pour $\Theta = G)$.

Dém : La formule de reconstruction de la transformée en ondelettes directionnelle pour l'ondelette ψ^1 donne :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} W_{\psi^1} f(a, \vec{b}, \theta) \frac{1}{a} \psi^1 (R^{-\theta} \frac{\vec{x} - \vec{b}}{a}) d\theta \frac{da}{a^3} d\vec{b}$$

En remplaçant $W_{\psi^1} f(a, \vec{b}, \theta)$:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{C_{\psi^1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\cos\theta\ W^1 f(a, \vec{b}) + \sin\theta\ W^2 f(a, \vec{b})\right] \frac{1}{a} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1} (R^{-\theta} \frac{\vec{x} - \vec{b}}{a}) d\theta \frac{da}{a^3} d\vec{b}$$

Or si Θ est isotrope, on a :

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}(R^{-\theta}\vec{x}) = \cos\theta\ \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}(\vec{x}) + \sin\theta\ \frac{\partial\Theta}{\partial x_2}(\vec{x})$$

donc

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) \quad &= \quad \int_{a>0} \tfrac{da}{a^3} \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{b} \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2\theta \; W^1 f(a,\vec{b}) \; \tfrac{1}{a} \tfrac{\partial \Theta}{\partial x_1} (\tfrac{\vec{x}-\vec{b}}{a}) \\
&+ \quad \int_{a>0} \tfrac{da}{a^3} \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{b} \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta \; W^2 f(a,\vec{b}) \; \tfrac{1}{a} \tfrac{\partial \Theta}{\partial x_2} (\tfrac{\vec{x}-\vec{b}}{a}) \\
&+ \quad \int_{a>0} \tfrac{da}{a^3} \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{b} \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta \sin\theta \; W^1 f(a,\vec{b}) \; \tfrac{1}{a} \tfrac{\partial \Theta}{\partial x_2} (\tfrac{\vec{x}-\vec{b}}{a}) \\
&+ \quad \int_{a>0} \tfrac{da}{a^3} \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{b} \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta \sin\theta \; W^2 f(a,\vec{b}) \; \tfrac{1}{a} \tfrac{\partial \Theta}{\partial x_1} (\tfrac{\vec{x}-\vec{b}}{a})
\end{aligned}$$

Comme :
$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$ et $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = 0$

Il reste :

$$f(\vec{x}) = \frac{\pi}{C_{\psi^1}} \int_{a>0} \frac{da}{a^3} \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{b} \left[W^1 f(a,\vec{b}) \psi^1_{a,\vec{b}}(\vec{x}) + W^2 f(a,\vec{b}) \psi^2_{a,\vec{b}}(\vec{x}) \right]$$

Formule de conservation de l'énergie

On représente souvent le vecteur $\vec{\mathrm{W}}f(a,\vec{b})$ sous forme de module-orientation :

$$Mf(a,\vec{b}) \quad = \quad \|\vec{\mathrm{W}}f(a,\vec{b})\|$$

prop. au module

du gradient

$$Af(a,\vec{b}) \quad = \quad Arg\left(\vec{\mathrm{W}}f(a,\vec{b})\right)$$

orientation

du gradient

On a alors la conservation de l'énergie (avec Θ noyau isotrope) :

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} |f(\vec{t})|^2 d\vec{t} = \frac{\pi}{C_\psi}\int_{a>0}\frac{da}{a^3}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(Mf(a,\vec{b})\right)^2\, d\vec{b}}$$

Programmation du détecteur

Implémentation par convolutions en cascade de gaussienne

Soit $\Theta = G$ (Gaussienne). On utilise la propriété de convolution des Gaussiennes :

$$\frac{1}{a^2}\Theta(\frac{\vec{x}}{a}) \circledast \frac{1}{b^2}\Theta(\frac{\vec{x}}{b}) = \frac{1}{a^2+b^2}\Theta(\frac{\vec{x}}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

Donc

$$\overbrace{\Theta \circledast \Theta \cdots \circledast \Theta}^{n-1 \ \ convolutions}(\vec{x}) = \frac{1}{n}\Theta(\frac{\vec{x}}{\sqrt{n}})$$

Ainsi

$$f \star \overbrace{\Theta \star \Theta \cdots \star \Theta}^{n-1 \ \ convolutions}$$

est la convolution de f par une gaussienne d'échelle $\sqrt{n}$.

Description de l'algorithme

- *Conversion de l'image en matrice* : L'image est convertie en un tableau de flottant, notée $f(\vec{x})$.

- *Convolution en cascade*
  Une procédure est chargée de convoluer itérativement f par un masque gaussien de taille 7×7 (fait en utilisant la FFT)

$$f_n = f \star \overbrace{\Theta \star \Theta \cdots \star \Theta}^{n-1 \;\; convolutions}$$

  qui est aussi

$$f_n = f \star (\overbrace{\Theta \circledast \Theta \cdots \circledast \Theta}^{n-1 \;\; convolutions}) = f \star \frac{1}{n}\Theta(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}})$$

- *Dérivations :*
  Les coefficients d'ondelettes à l'échelle $\sqrt{n}$ sont calculés en convoluant f_n par un filtre de dérivation suivant x_1 d'une part, et suivant x_2 d'autre part : $(D_1 = [0, 1, -1]$ par exemple, $D_2 = D_1^T)$ et

à multiplier par l'échelle $\sqrt{n}$; on obtient ainsi les coefficients $W^1 f(.,.,\sqrt{n})$ et $W^2 f(.,.,\sqrt{n})$.

Si on veut des échelles dyadiques, on effectue les convolutions :

$$f\star \overbrace{\Theta}^{1\ conv} \star \overbrace{\Theta}^{2\ conv} \star\underline{\Theta}\star \overbrace{\Theta}^{4\ conv} \star\underline{\Theta}\star\underline{\Theta}\star\underline{\Theta}\star \overbrace{\Theta}^{8\ conv} \star\Theta\star\underline{\Theta}\star\Theta\star\underline{\Theta}\star\Theta\star\underline{\Theta}\star\Theta\star \overbrace{\Theta}^{16\ conv}$$

Les Θ surmontés d'une accolade correspondent aux échelles $2^{j/2}$, ceux soulignés aux échelles intermédiaires.

A l'issue de cette étape et pour un ensemble discret d'échelles n_a :

$$W^1 f(.,\sqrt{n_a}) = \sqrt{n_a}\ f\star(\overbrace{\Theta \circledast \Theta \cdots \circledast \Theta}^{n_a - 1\ \ convolutions} \circledast D_1)$$

$$W^2 f(.,\sqrt{n_a}) = \sqrt{n_a}\ f\star(\overbrace{\Theta \circledast \Theta \cdots \circledast \Theta}^{n_a - 1\ \ convolutions} \circledast D_2)$$

On effectue alors le calcul, à chaque échelle n_a calculée :
$Mf(x,y,\sqrt{n_a})$ et $Af(x,y,\sqrt{n_a})$

Schéma de l'algorithme $\Theta \longrightarrow$ gaussienne ou B-spline

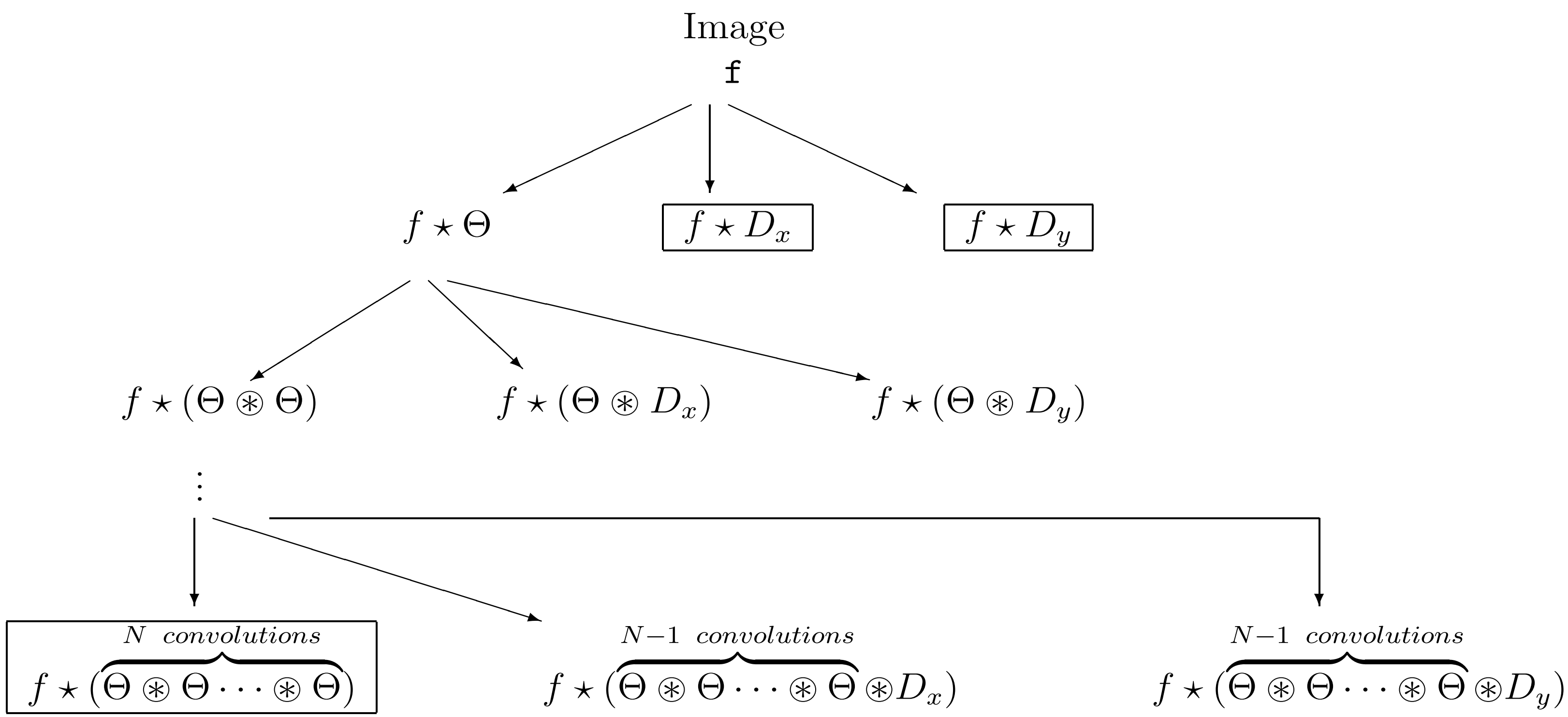


FIG. 1 – L'algorithme cascade B-spline vu comme un banc de filtrage

Programmation efficace du détecteur

- Pour améliorer la vitesse des convolutions, on utilise plutôt le filtre :

$$\Theta = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_j = f \star (\overbrace{\Theta \circledast \Theta \cdots \circledast \Theta}^{j\ \ convolutions})$$

- Dérivation : convolution par $D_1 = \frac{1}{2}[1, 0, -1]$ et $D_2 = D_1^T$;
- Calcul de $Mf(\vec{x}, a_j)$ et $Af(\vec{x}, a_j)$;
- Seuillage de $Mf(\vec{x}, a_j)$ (pour filtrer les coefficients peu significatifs), et recherche des modules max de $Mf(\vec{x}, a_j)$.

Formule d'inversion discréte du détecteur multiéchelle de Canny

On cherche des filtres de reconstruction associés aux filtres de décomposition Θ, D_x, et D_y.

Proposition : En choisissant :

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{D_x} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{D_y} = \tilde{D_x}^T = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$f = (f \star \Theta) \star \tilde{\Theta} + (f \star D_1) \star \tilde{D}_1 + (f \star D_2) \star \tilde{D}_2$$

Il faut donc trouver $\tilde{\Theta}$, $\tilde{D}_x$ et $\tilde{D}_y$ tels que :

$$\boxed{\Theta \circledast \tilde{\Theta} + D_x \circledast \tilde{D}_x + D_y \circledast \tilde{D}_y = \delta}$$

où δ est l'élément neutre de la convolution discrète $\star$ ($\delta_{nm} = 1$ si $n = m = 0$ et 0 sinon).

Démonstration constructive : Montrons

$$\delta = \Theta \circledast \tilde{\Theta} + D_x \circledast \tilde{D_x} + D_y \circledast \tilde{D_y}$$

en utilisant les fonctions de transfert des filtres :

$$\hat{\Theta} + \hat{D_x}\hat{\tilde{D}}_x + \hat{D_y}\hat{\tilde{D}}_y = 1$$

• Calcul de $\hat{\Theta}$

$$\Theta = \frac{1}{4}[1,2,1] \circledast \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\hat{\Theta}(\omega_1, \omega_2) = \hat{\Theta}_1(\omega_1)\hat{\Theta}_1(\omega_2)$ où

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_1(\omega) &= \tfrac{1}{4}(e^{-2i\pi\omega} + e^{2i\pi\omega} + 2) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\omega) \\ &= \cos^2 \pi\omega \end{aligned}$$

et donc

$$\hat{\Theta}(\omega_1, \omega_2) = cos^2(\pi\omega_1)cos^2(\pi\omega_2)$$

•Calcul de $\hat{D}_x$:

$$D_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\hat{D}_x = 1 - e^{-2i\pi\omega_1} = 2ie^{-i\pi\omega_1} sin(\pi\omega_1)$$

• Calcul de $\hat{D}_y$:

$$D_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\hat{D}_y = 2ie^{-i\pi\omega_2} sin(\pi\omega_2)$$

- **Calcul des filtres de reconstruction** :

On veut :

$$\cos^2 \pi\omega_1 \cos^2 \pi\omega_2 + 2ie^{-i\pi\omega_1} \sin \pi\omega_1 \hat{\tilde{D}}_x + 2ie^{-i\pi\omega_2} \sin \pi\omega_2 \hat{\tilde{D}}_y = 1$$

Cherchons $\hat{\tilde{D}}_x$ sous la forme

$$\hat{\tilde{D}}_x = -\frac{i}{2} e^{i\pi\omega_1} \sin \pi\omega_1 \hat{\tilde{\mathcal{D}}}_x$$

et $\hat{\tilde{D}}_y$ sous la forme

$$\hat{\tilde{D}}_y = -\frac{i}{2} e^{i\pi\omega_2} \sin \pi\omega_2 \hat{\tilde{\mathcal{D}}}_y$$

Le problème revient alors à trouver $\hat{\tilde{\mathcal{D}}}_x$ et $\hat{\tilde{\mathcal{D}}}_y$ tels que

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2,\ \cos^2 \pi\omega_1 \cos^2 \pi\omega_2 + \sin^2 \pi\omega_1\ \hat{\tilde{\mathcal{D}}}_x + \sin^2 \pi\omega_2\ \hat{\tilde{\mathcal{D}}}_y = 1$$

Il est alors facile de voir que

$$\hat{\tilde{\mathcal{D}}}_x = \cos^2 \pi\omega_2 \ et\ \hat{\tilde{\mathcal{D}}}_y = 1$$

sont solutions du problème, de même que

$$\hat{\hat{\tilde{\mathcal{D}}}}_y = \cos^2 \pi\omega_1 \ et \ \hat{\hat{\tilde{\mathcal{D}}}}_x = 1$$

Pour rétablir la symétrie entre $\tilde{\mathcal{D}}_x$ et $\tilde{\mathcal{D}}_y$ choisissons la moyenne de ces solutions :

$$\hat{\hat{\tilde{\mathcal{D}}}}_x = \frac{1 + \cos^2 \pi\omega_2}{2}$$

et

$$\hat{\hat{\tilde{\mathcal{D}}}}_y = \frac{1 + \cos^2 \pi\omega_1}{2}$$

C'est-à-dire

$$\hat{\hat{\tilde{D}}}_x = -\frac{i}{2} e^{i\pi\omega_1} \sin \pi\omega_1 \frac{1 + \cos^2 \pi\omega_2}{2}$$

et

$$\hat{\hat{\tilde{D}}}_y = -\frac{i}{2} e^{i\pi\omega_2} \sin \pi\omega_2 \frac{1 + \cos^2 \pi\omega_1}{2}$$

• **Retour dans l'espace direct :**

Redéveloppons ces expressions pour les exprimer comme un polynôme trigonométrique et en déduire $\tilde{D_x}$ et $\tilde{D_y}$

$$\hat{\tilde{D}}_x = \frac{1}{32} e^{2i\pi\omega_2} + \frac{3}{16} + \frac{1}{32} e^{-2i\pi\omega_2}$$

$$-\frac{1}{32} e^{2i\pi\omega_2} e^{2i\pi\omega_1} - \frac{3}{16} e^{2i\pi\omega_1} - \frac{1}{32} e^{-2i\pi\omega_2} e^{2i\pi\omega_1}$$

et donc

$$\tilde{D_x} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\tilde{D_y} = \tilde{D_x}^T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Il existe d'autres filtres associés à Θ, D_x et D_y permettant une inversion du détecteur multi-échelles de Canny. Par exemple, le choix $\tilde{\Theta} = \Theta$ permet également de trouver des filtres finis $\tilde{D_x}$ et $\tilde{D_y}$ de reconstruction :

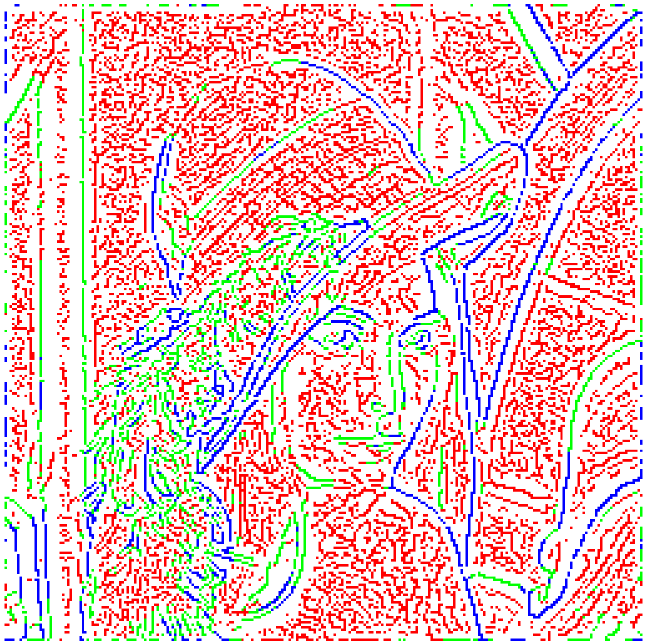
<u>Proposition</u> : Les filtres :

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{D_x} = \frac{1}{512}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & -20 & 20 & 4 & 0 \\ -22 & -110 & 110 & 22 & 0 \\ -4 & -20 & 20 & 4 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{D_y} = \tilde{D_y}^T$$

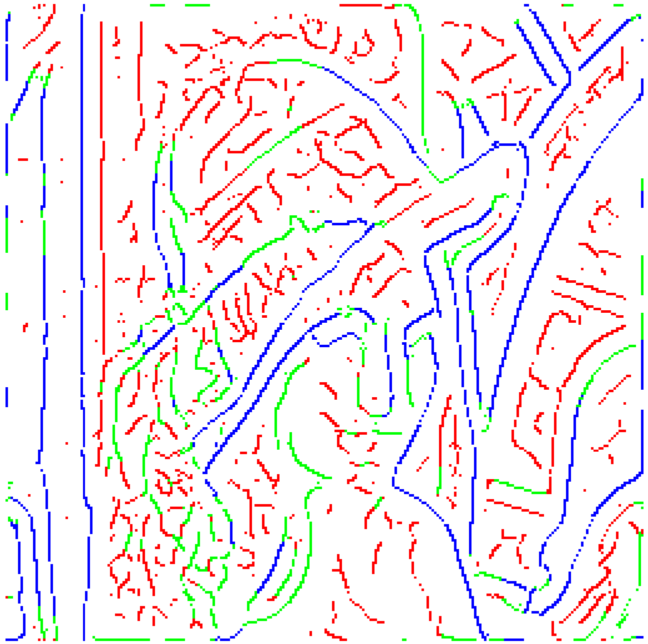
vérifient

$$\delta = \Theta \circledast \tilde{\Theta} + D_x \circledast \tilde{D_x} + D_y \circledast \tilde{D_y}$$

Application : recherche des points de module max - Echelle fine



Echelle intermédiaire



Echelle grossière