

**"Une nouvelle formulation de la décomposition modale empirique fondée sur  
l'optimisation sous contraintes"**

Sylvain Meignen, Valérie Perrier

Equipe MGMI-LJK, Grenoble

# Introduction

- Il existe de nombreuses méthodes pour analyser les signaux en temps et en fréquence simultanément (la transformée de Fourier fenêtrée, la transformée de Wigner-Ville, l'analyse par ondelettes, etc...).

# Introduction

- Il existe de nombreuses méthodes pour analyser les signaux en temps et en fréquence simultanément (la transformée de Fourier fenêtrée, la transformée de Wigner-Ville, l'analyse par ondelettes, etc...).
- Ces méthodes sont adaptées pour l'étude des signaux linéaires mais non stationnaires mais sont inadaptées pour l'étude de signaux non linéaires et non stationnaires.

# Introduction

- Il existe de nombreuses méthodes pour analyser les signaux en temps et en fréquence simultanément (la transformée de Fourier fenêtrée, la transformée de Wigner-Ville, l'analyse par ondelettes, etc...).
- Ces méthodes sont adaptées pour l'étude des signaux linéaires mais non stationnaires mais sont inadaptées pour l'étude de signaux non linéaires et non stationnaires.
- Le concept de la *décomposition modale empirique* (EMD) est de décomposer un signal en un ensemble de fonctions définies uniquement à partir du signal. Ces fonctions sont appelées *intrinsic mode functions* (IMF).

# Introduction

- Il existe de nombreuses méthodes pour analyser les signaux en temps et en fréquence simultanément (la transformée de Fourier fenêtrée, la transformée de Wigner-Ville, l'analyse par ondelettes, etc...).
- Ces méthodes sont adaptées pour l'étude des signaux linéaires mais non stationnaires mais sont inadaptées pour l'étude de signaux non linéaires et non stationnaires.
- Le concept de la *décomposition modale empirique* (EMD) est de décomposer un signal en un ensemble de fonctions définies uniquement à partir du signal. Ces fonctions sont appelées *intrinsic mode functions* (IMF).
- A l'origine de la théorie de l'EMD, les IMFs cherchées doivent être de moyenne locale nulle, i.e. leur intégrale entre deux extrema consécutifs est zéro (Huang '98). Le moyen d'obtention des IMFs est un processus itératif appelé *sifting process* (SP).

# Calcul des IMFs: l'algorithme EMD

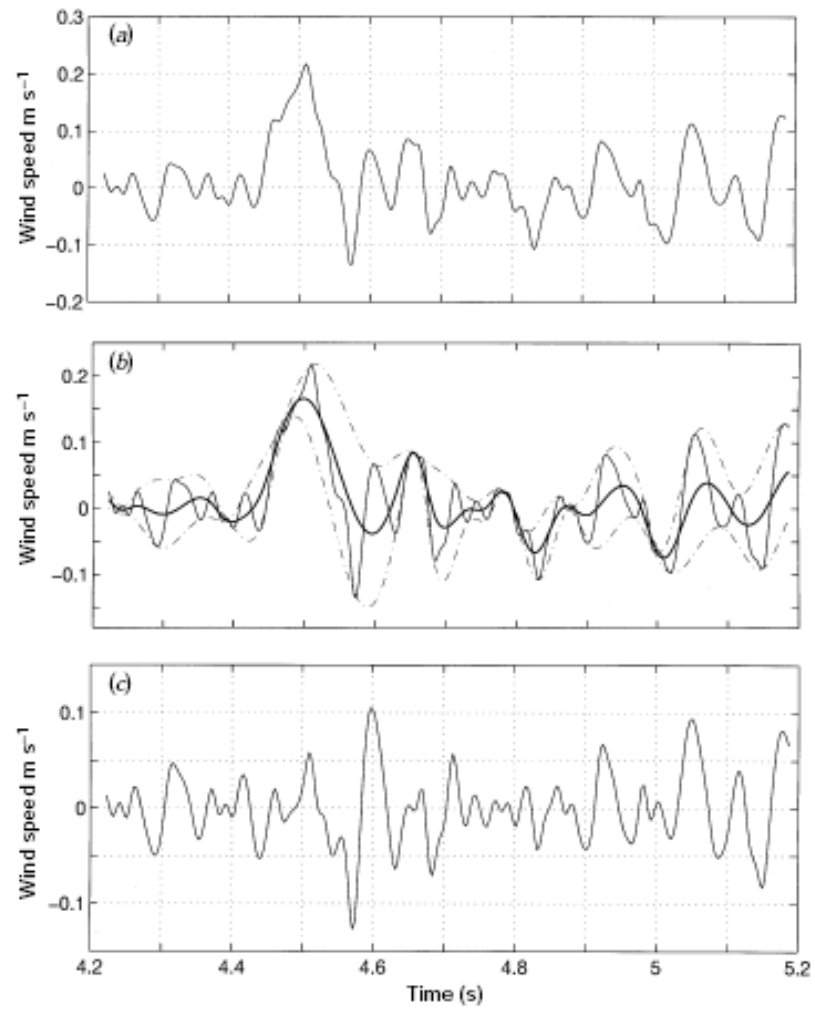
Soit un signal mono-dimensionnel  $(s[n])_{0 \leq n \leq N-1}$ :

1. Initialisation :  $r = s, k = 1$
2. Calcul de l'enveloppe moyenne  $e$  de  $r$  (i.e. la moyenne de l'enveloppe des minima et de l'enveloppe des maxima de  $r$ )
3. On pose  $p_i = r - e$ .
4. Tant que  $p_i$  n'est pas une IMF répéter
  - Calculer l'enveloppe moyenne  $e_i$  de  $p_i$
  - $p_{i+1} = p_i - e_i ; i = i + 1$
5.  $d_k = p_i, r = r - d_k$
6. si  $r$  n'est pas monotone, retour à l'étape 2 et on pose  $k = k + 1$  alors la décomposition est terminée.

Lorsque la décomposition est terminée, on peut écrire  $s$  de la manière suivante :

$$s[n] = \sum_{k=1}^K d_k[n] + r[n], \quad K \in \mathbb{N}^*.$$

*N. E. Huang and others*



# Problèmes de Convergence

On ne dispose pas de preuve de convergence de l'algorithme, ni du fait que les  $d_k$  ont la propriété souhaitée. Il apparaît que trop de sifting nuit au sens physique des modes obtenus, mais que trop peu de sifting ne permet pas de bien séparer les modes.

Dans Huang 2003, il est suggéré d'arrêter le sifting entre 4 et 10 itérations après que le nombre d'extrema soit égal au nombre de zero-crossing. La nouveauté de l'approche est de calculer des intervalles de confiance sans utiliser d'hypothèse d'ergodicité sur le signal.



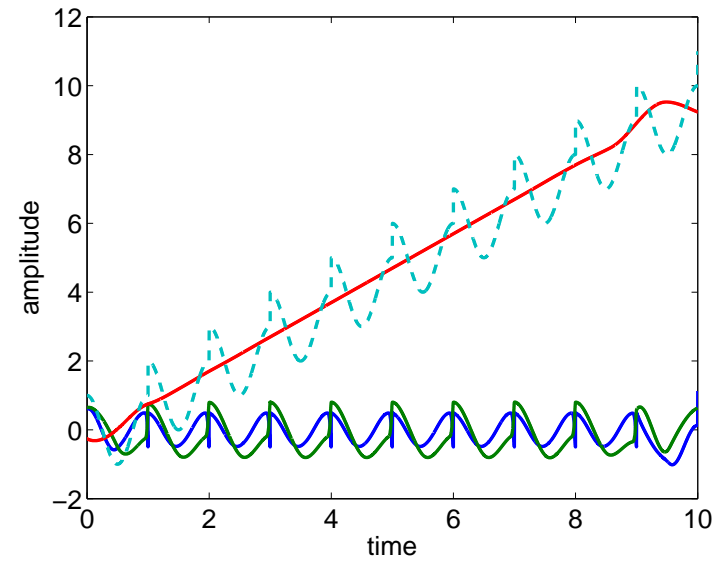
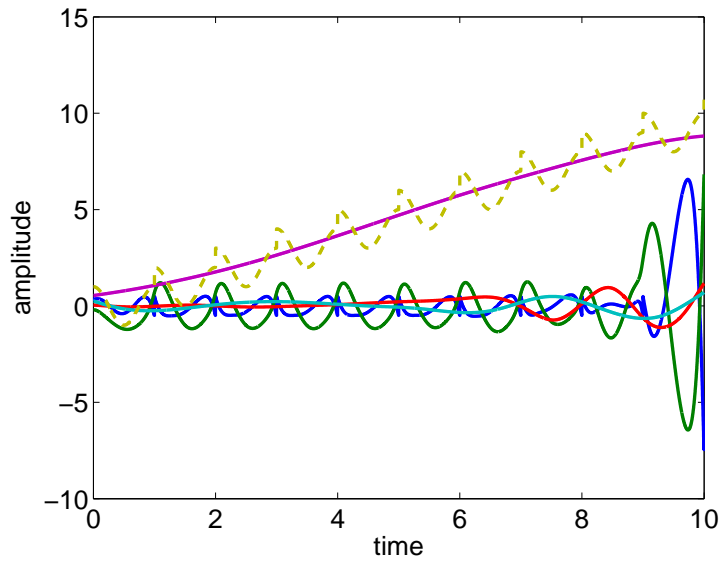
# Problèmes liés à l'interpolation

L'interpolation spline utilisée dans la construction des enveloppes donne naissance à des artefacts.

- Le premier type d'artefacts sont des overshoots (resp. undershoots) qui correspondent au cas où l'enveloppe des maxima (resp. minima) est plus grande (resp. petite) que le maximum (resp. minimum) du signal.



- Un deuxième problème posé par l'interpolation spline est son caractère global (inversion d'un système linéaire). Ce problème devient crucial lorsque l'on passe en dimension supérieure. D'autres méthodes du type interpolation d'Hermite ne présente pas ce désavantage.
- Un troisième problème provient de la régularité de l'enveloppe notamment si celle-ci est trop régulière par rapport au signal (dans le cas des splines l'enveloppe est  $C^2$ ).



Algorithme EMD appliqué à  $\cos(2\pi t) + \lfloor t \rfloor$

# Une nouvelle approche pour la construction de l'enveloppe moyenne

- Nous allons chercher à calculer directement l'enveloppe moyenne  $e$  sans utiliser de procédé itératif.
- Dans ce contexte, nous cherchons une enveloppe moyenne qui soit polynomiale de degré 3 par morceaux et globalement  $C^1$ .
- Soit  $t_j, j = 1, \dots, J$  la séquence croissante des abscisses des extrema de  $s$ . On écrit :

$$e(t) = \sum_{j=1}^{J-1} e_j(t) \chi_{[t_j, t_{j+1}[}(t),$$

où  $e_j(t) = a_j t^3 + b_j t^2 + c_j t + d_j$ . Les polynômes  $e_j$  sont complètement définis par la connaissance de  $e_j(t_j), e'_j(t_j), e_j(t_{j+1})$  et  $e'_j(t_{j+1})$ . De façon à avoir un raccord  $C^1$ , on impose  $e_j(t_j) = e_{j-1}(t_j) = e(t_j)$  et  $e'_j(t_j) = e'_{j-1}(t_j) = e'(t_j)$ . On appelle alors  $\Lambda = [e(t_1), e'(t_1), e(t_2), e'(t_2), \dots, e(t_{J-1}), e'(t_{J-1}), e(t_J), e'(t_J)]$ , le vecteur des inconnues.

- Les contraintes sur  $e$  sont en relation avec le fait que l'on cherche une enveloppe des maxima et une enveloppe des minima symétriques l'une de l'autre. Pour éviter la dépendance vis à vis d'une méthode d'interpolation particulière, notre approche se fonde uniquement sur l'étude de  $s(t_j), j = 1, \dots, J$ .

# Contraintes de type inégalité

Contraintes 1: On impose tout d'abord que  $e(t_j) \leq s(t_j)$  (resp.  $e(t_j) \geq s(t_j)$ ), si il y a un maximum (resp. minimum) en  $t_j$  pour  $s$ . Cela s'écrit sous la forme de contraintes de type inégalité du type  $M\Lambda \leq S$ , avec  $S = (\epsilon_1 s(t_1), 0, \epsilon_2 s(t_2), 0, \dots, \epsilon_J s(t_J), 0)$  et  $\epsilon_j = 1$  si  $t_j$  est un maximum pour  $s$  et  $-1$  dans le cas contraire. Avec cette convention,  $M = \text{diag}(\epsilon_1, 0, \epsilon_2, 0, \dots, \epsilon_J, 0)$ .

Contraintes 2: Nous imposons des contraintes de symétrie sur les enveloppes des maxima et des minima.

Supposons la séquence  $(s(t_{j-2}), s(t_j), s(t_{j+2}))$  monotone (ou constante) et que  $s$  a un minimum en  $t_j$ . Le symétrique  $P_j$  de  $(t_j, s(t_j))$  par rapport à  $(t_j, e(t_j))$  est  $(t_j, 2e(t_j) - s(t_j))$ . L'enveloppe moyenne étant définie comme la moyenne de l'enveloppe des maxima et de celle des minima  $P_j$  doit appartenir à l'enveloppe des maxima.

Comme  $(t_{j-1}, s(t_{j-1}))$  et  $(t_{j+1}, s(t_{j+1}))$  appartiennent à l'enveloppe des maxima, pour préserver la monotonie des données on impose que :

$$\begin{aligned} \min(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) &\leq 2e(t_j) - s(t_j) \leq \max(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) \\ \Leftrightarrow \frac{\min(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) + s(t_j)}{2} &\leq e(t_j) \leq \frac{\max(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) + s(t_j)}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

On peut alors écrire  $M_1\Lambda \leq S_1$  (pour les maxima) et  $N_1\Lambda \leq S_2$  (pour les minima).

## Contraintes de type égalité

On considère maintenant que  $(s(t_{j-2}), s(t_j), s(t_{j+2}))$  admet un extremum en  $t_j$ . Selon les cas, nous utiliserons la forme de l'enveloppe des maxima (resp. minima) pour en déduire celle des minimas (resp. maxima).

Soit  $\tilde{t}_j$  l'abscisse de l'intersection (quand elle existe) des droites  $L_1$  and  $L_2$ , définies par :

$$L_1 : f_1(t) = \frac{s(t_j) - s(t_{j-2})}{t_j - t_{j-2}}t + \frac{s(t_{j-1})(t_j - t_{j-2}) - (s(t_j) - s(t_{j-2}))t_{j-1}}{t_j - t_{j-2}}$$

et

$$L_2 : f_2(t) = \frac{s(t_{j+2}) - s(t_j)}{t_{j+2} - t_j}t + \frac{s(t_{j+1})(t_{j+2} - t_j) - (s(t_{j+2}) - s(t_j))t_{j+1}}{t_{j+2} - t_j}.$$

Si  $\tilde{t}_j > t_j$ , on impose :  $\frac{1}{2} (f_1(t_j) + s(t_j)) = e(t_j)$ , et  $\frac{1}{2} (f_2(t_j) + s(t_j)) = e(t_j)$ , dans le cas contraire. Ses conditions peuvent être écrites sous la forme  $Q\Lambda = S_3$ .

# Function Coût

Comme  $e_j$  peut être vue comme l'interpolant de Hermite de  $e$  sur  $[t_j, t_{j+1}]$ , il peut être écrit de la manière suivante :

$$e_j(t) = e(t_j)h_{j,j}(t) + e'(t_j)k_{j,j}(t) + e(t_{j+1})h_{j+1,j}(t) + e'(t_{j+1})k_{j+1,j}(t) \quad (2)$$

où  $h_{j,l}(t) = \left(1 - 2(t - t_j)l'_{j,l}(t_j)\right) l_{j,l}^2(t)$  et  $k_{j,l}(t) = (t - t_j)l_{j,l}^2(t)$ , et  $l_{j,l}$  est le polynôme de Lagrange de degré 1 en  $t_j$  sur l'intervalle  $[t_l, t_{l+1}]$ , et  $l$  appartient à  $\{j, j - 1\}$ .

Comme on cherche une fonction qui soit globalement  $C^1$ , il est naturel de considérer la fonction coût :

$$J(\Lambda) = \sum_{j=1}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e'_j(t)^2 dt$$

## Réécriture de la fonction coût

Après quelques calculs, on peut réécrire  $J(\Lambda)$  :

$$\begin{aligned}
 J(\Lambda) = & \sum_{j=1}^{J-1} e^2(t_j) \frac{6}{5} \left( \frac{1}{\delta t_j} + \frac{1}{\delta t_{j-1}} \right) + e(t_j)e(t_{j+1}) \left( -\frac{12}{5\delta t_j} \right) + e(t_j)e'(t_{j+1}) \left( \frac{1}{5} \right) \\
 & + e'(t_j)^2 \left( \frac{2}{15} (\delta t_j + \delta t_{j-1}) \right) + e'(t_j)e(t_{j+1}) \left( -\frac{1}{5} \right) + e'(t_j)e'(t_{j+1}) \left( \frac{\delta t_j}{15} \right) \\
 & + e^2(t_J) \left( \frac{6}{5\delta t_{J-1}} \right) + e(t_J)e'(t_J) \left( -\frac{1}{5} \right) + e'(t_J)^2 \left( \frac{2}{15} \delta t_{J-1} \right). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Donc  $J(\Lambda) = \Lambda^T B \Lambda$ , où  $B$  est une matrice symétrique définie par :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & B_2 & C_2^T & \ddots & \vdots \\ 0 & C_2 & B_3 & C_3^T & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{J-1}^T \\ 0 & \cdots & 0 & C_{J-1} & B_J \end{pmatrix}$$

# Résolution du problème d'optimisation

Le problème de la construction de l'enveloppe moyenne est donc le suivant:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\Lambda} \Lambda^T B \Lambda \\ M \Lambda \leq S, \quad M_1 \Lambda \leq S_1, \quad N_1 \Lambda \leq S_2, \quad Q \Lambda = S_3 \end{array} \right. ,$$

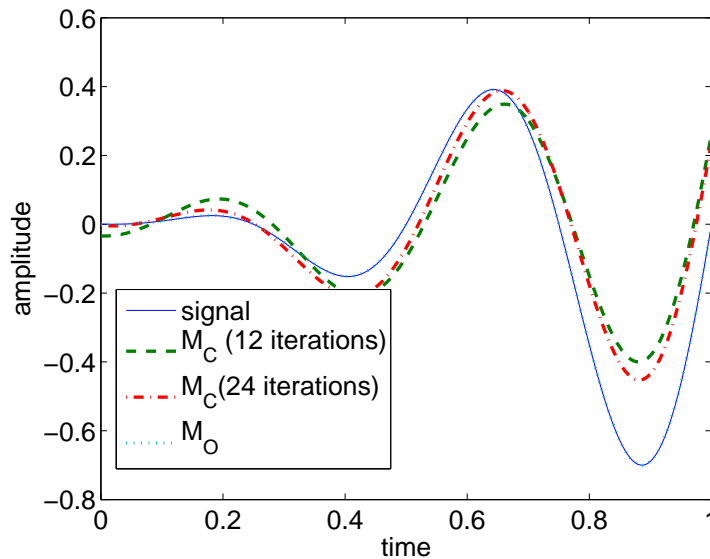
qui est un problème classique de programmation quadratique.



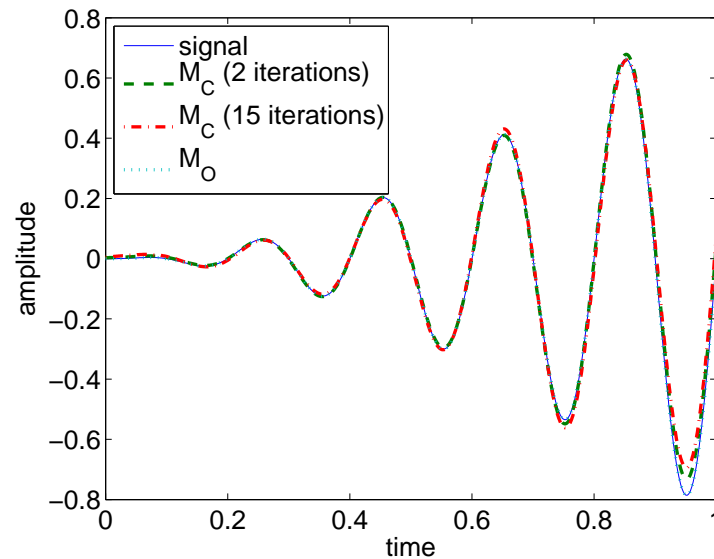
# Applications Numériques

On compare notre approche a l'algorithme classique de l'EMD (Flandrin 2003). D'abord dans un cas non stationnaire puis dans un cas stationnaire.

Le cas non stationnaire: On considère le signal  $s(t) = \sin(t^2) \sin(2k\pi t)$  avec  $k$  entier plus grand que 1. Dans l'approche classique, le premier mode est presque égal au signal  $s$ , quand  $k$  est grand. Avec une telle approche il est difficile de caractériser le signal restant (i.e.  $s$  moins le premier mode). Avec notre approche et quand  $k$  varie, le premier mode est toujours égal au signal.



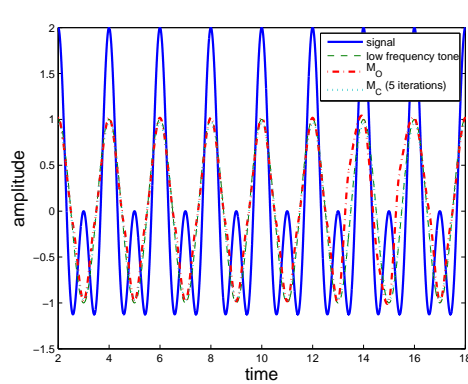
(A)



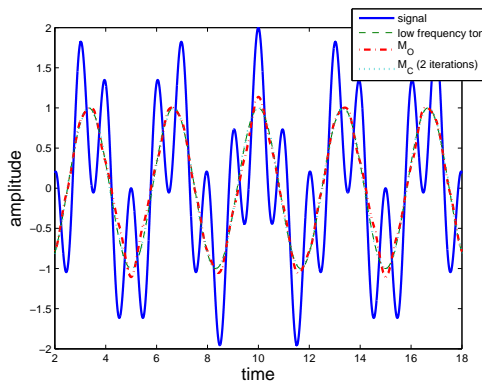
(B)

Le cas stationnaire : On considère maintenant la famille de signaux

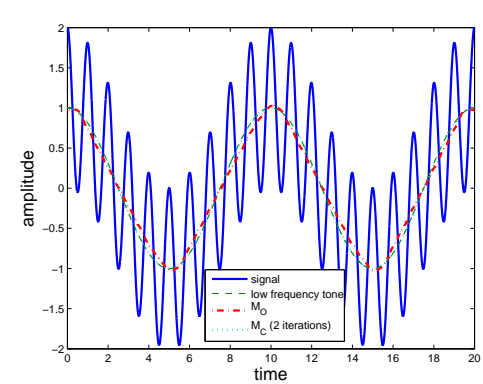
$s(t) = \cos(2\pi t) + a \cos(2\pi f t)$ , avec  $f \in ]0, 1[$  et  $a > 0$ . Numériquement, on constate que lorsque  $0 < f \leq 0.5$  et  $0 < a < 1$ , la séparation entre les deux modes est presque parfaite. De plus, si la séparation est correcte pour un  $a$  donné, elle sera aussi efficace pour un  $a$  plus petit. On compare donc les enveloppes données par l'approche EMD classique et par notre méthode pour  $a = 1$  et  $f$  variant,  $f$  étant plus petit que 0.5.



(A)



(B)



(C)

# Conclusion

- L'approche proposée est performante lorsque les signaux étudiés n'ont qu'un seul point d'inflexion entre chaque extremum. Dans ces cas, l'EMD produit un premier mode dont le nombre d'extrema est égal à celui du signal.
- Lorsque qu'il existe plus d'un point d'inflexion entre chaque extremum, le procédé de sifting tend à rajouter des extrema (Huang 1999), ce qui n'est pas pris en compte par l'algorithme d'optimisation proposé, on parle alors d'échelles cachées. Comment l'EMD fonctionne dans de tel cas reste encore à étudier plus en détail.

*N. E. Huang and others*

