

# **"Présentation de l'algorithme EMD et perspectives"**

Sylvain Meignen

Equipe MGMI-LJK, Grenoble

# Introduction

- Motivation : Il existe de nombreuses méthodes de décomposition des signaux et des images (Fourier,DCT,Ondelettes,etc...) qui supposent la décomposition sur une base donnée a priori. La motivation principale de la décomposition modale empirique (EMD) est de définir des décompositions des signaux et des images qui ne dépendent pas du choix d'une base particulière. Par ailleurs, l'EMD est particulièrement bien adaptée pour l'étude des signaux non-stationnaires.
- Nous allons présenter l'algorithme originel de l'EMD qui présentent de nombreuses failles sur le plan mathématique mais dont l'efficacité est reconnue par les applications qu'il permet de traiter.

# Les décompositions en signaux mono-composant

L'EMD est en relation très étroite avec les décompositions en signaux mono-composant, étudiées notamment en traitement du son (Delprat '92). Ce type de décompositions vise à décomposer un signal de la manière suivante :

$$f(t) = \sum_{j=1}^M a_j(t) \cos(\theta_j(t)), \quad (1)$$

En fonction des hypothèses faites sur les signaux mono-composant (MC), la décomposition peut être singulièrement différente. Etant donné  $f$ , il existe de nombreuses façon d'obtenir des décompositions comme celle définie par (1). Dans (Delprat '92), les différents MCs sont calculés grâce aux extrema du spectrogramme dans le plan temps-fréquence, défini par  $P_S f(t, \xi) = |Sf(t, \xi)|^2$  où  $Sf(u, \xi)$  est la transformée de Fourier fenêtrée. Les extrema correspondent aux maxima  $g_t(\xi) = P_S(t, \xi)$ . Pour un MC isolé (i.e.  $f(t) = a(t) \cos(\theta(t))$ ), on a la propriété que  $\hat{\xi}(t) = \underset{\xi}{\operatorname{argmin}} g_t(\xi) \approx \theta'(t)$ . Pour un signal composé de plusieurs signaux mono-composant, lorsque  $\theta'_j$  et  $\theta'_i$  pour  $j \neq i$  sont suffisamment distincts, on peut isoler les différent modes, en calculant les extrema locaux de  $g$ .

Le principal inconvénient de cette méthode réside en ce que la taille de la fenêtre utilisée dans la transformée Fourier fenêtrée est fixée à l'avance.

# Sur le calcul de la fréquence instantannée

- La transformée de Fourier d'un cosinus de fréquence  $\nu_0$  est  $\frac{1}{2}[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$  tandis que celle du sinus est  $\frac{1}{2}[\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)]$ , l'opérateur permettant de passer de l'une à l'autre dans le domaine de Fourier est  $-i\text{sign}(\nu)$ , ce qui correspond dans le domaine réel à  $vp(\frac{1}{\pi t})$ . On appelle cette transformation la transformée de Hilbert.
- La transformée de Hilbert permet d'associer à tout signal réel un signal analytique (i.e. donc la transformée de Fourier est nulle aux fréquences négatives) par :

$$f_a = f + \mathcal{H}f$$

- On peut alors calculer  $\theta$  et  $a$  comme le module et l'argument de  $f_a$ .
- En revanche, la transformée de Hilbert est inadaptée pour le calcul des fréquence instantannée d'un signal composé de plusieurs signaux mono-composants (ex  $f(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t) + a \cos(2\pi\nu_1 t)$ ) donne un signal analytique de fréquence  $\frac{\nu_0 + \nu_1}{2}$ . En général, pour l'analyse des modes la transformée de Hilbert doit être proscrite.

# Une décomposition en signaux mono-composant particulière : l'EMD

L'objectif de la méthode EMD est de décomposer un signal  $f$  en signaux mono-composant particuliers, appelés "intrinsic mode functions" (IMF), qui sont définis de la manière suivante :

**Definition 1** *Une fonction est une IMF si elle est de moyenne locale nulle*

- Il est prouvé dans (Vatchev '06) qu'une fonction ayant exactement 1 zéro entre chaque extremum, si elle est choisie  $C^2$  et que  $f$  et  $f'$  n'ont que des zéros simples, peut être écrite sous la forme  $a(t) \cos(\theta(t))$  avec  $a(t) > 0$  and  $\theta'(t) > 0$ ,  $\theta$  étant  $C^1$  et  $a$  un polynôme de degré 5 par morceaux.
- les fonctions ayant un zéro entre chaque extremum sont appelés IMF faible.
- Inversement, il est clair qu'un signal mono-composant n'est pas nécessairement une IMF puisque, bien qu'il ait des maxima positifs et des minima négatifs, puisque  $a_j(t) > 0$  et  $\theta'_j(t) > 0$  (i.e. le signal a un zero entre chaque extremum, c'est une IMF faible), son intégrale entre deux extrema successifs n'est pas nécessairement 0.
- les IMF faibles correspondent à la restriction des signaux mono-composant qui sont  $C^2$ .

# Algorithme de l'EMD

Nous décrivons ici l'algorithme de l'EMD pour un signal unidimensionnel  $(f[n])_{0 \leq n \leq N-1}$ .

1. Initialisation :  $r = f, k = 1$
2. Calcul de l'enveloppe moyenne  $e$  de  $r$  (i.e. la moyenne de l'enveloppe des minima et de l'enveloppe des maxima de  $r$ )
3. Extraction de fonctions intermédiaires  $p_i = r - e$  et posons  $r = e$ .
4. Tant que  $p_i$  n'est pas une IMF répéter
  - Calcul de l'enveloppe moyenne  $e_i$  de  $p_i$
  - $p_{i+1} = p_i - e_i ; i = i + 1$
5.  $d_k = p_i, r = r - d_k$
6. Si  $r$  n'est pas monotone, retour à l'étape 2 et posons  $k = k + 1$  sinon la décomposition est terminée.

Quand la décomposition est terminée, on peut écrire  $s$  de la manière suivante :

$$f[n] = \sum_{k=1}^K d_k[n] + r[n], \quad K \in \mathbb{N}^*.$$

# Avantage et inconvénient de la méthode

- Avantage: le principal avantage de cette approche comparée à d'autres décompositions en signaux mono-composant est d'être totalement adaptative.
- Inconvénients :
  1. Quel rôle joue la méthode d'interpolation dans la construction des enveloppes?  
En général, l'interpolation spline est utilisée, pourquoi?
  2. L'analyse mathématique du "sifting process" (SP) correspondant à l'étape 4 de l'algorithme est très parcellaire. En particulier, pourquoi le signal est asymptotiquement d'intégrale nulle? Quelle est la signification physiques des modes obtenus?

# Importance de la condition d'intégrale nulle et critère d'arrêt

Numériquement, il apparaît que le SP permet d'obtenir asymptotiquement des fonctions de moyenne nulle mais ayant peu de signification physique. Un compromis consiste à utiliser un critère d'arrêt dans le SP, les modes obtenus n'étant plus alors des IMFs. Différents critères d'arrêt existe dans la littérature:

- Le premier critère d'arrêt (Huang '98) était fondé sur la comparaison des fonctions  $p_i$  obtenues après  $i$  itérations du SP (i.e.  $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(p_{i-1}[n] - p_i[n])^2}{p_{i-1}^2[n]}$ ). Ce critère conduit à une surdécomposition des signaux.
- Une amélioration du critère en rapport avec la décomposition est fournie dans (Flandrin '03) où les auteurs imposent que les variations d'un mode soient grandes par rapport à sa moyenne la plupart du temps, et du même ordre pour les temps restants.
- Plus récemment, un critère fondé sur l'orthogonalité supposée des modes générés par l'EMD a été proposé (Cheng '06).
- Un autre critère d'arrêt exploite l'idée que chaque mode doit être à bande limitée (Xuan '07). Ceci est corroboré par les travaux de (Flandrin '04) qui suggère que l'EMD se comporte comme un banc de filtres sélectif.

Les différents critères proposés suggèrent que l'EMD calcule des modes qui sont à bande limitée, quasi-orthogonaux et de moyenne locale nulle.



# Calcul direct de l'enveloppe moyenne

- Dans la plupart des algorithmes de calcul de l'EMD, la construction de l'enveloppe moyenne est réalisée en construisant l'enveloppe des minima et l'enveloppe des maxima puis en calculant la moyenne. Les différentes enveloppes sont construites en effectuant une interpolation spline, ce qui génère des "overshoots" (et des undershoots). Un overshoot correspond à une enveloppe dont l'amplitude maximale est plus grande que le maximum du signal. Cela donne naissance à des artefacts qui se propagent au cours du SP.
- L'idée que nous développons consiste à étudier comment construire directement l'enveloppe moyenne, c'est à dire sans passer par le calcul de l'enveloppe des maxima et des minima.

# Première méthode de construction de l'enveloppe moyenne

Soit  $t_j, j = 1, \dots, J$  les extrema du signal originel. On recherche une enveloppe polynomiale de degré 3 par morceaux sur chaque intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$  et qui soit globalement  $C^1$  :

$$e(t) = \sum_{j \in J} e_j(t) \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(t),$$

où  $e_j(t) = a_j t^3 + b_j t^2 + c_j t + d_j$ . Les polynômes  $e_j$  sont entièrement définis par la connaissance de  $e_j(t_j), e'_j(t_j), e_j(t_{j+1})$  et  $e'_j(t_{j+1})$ . On impose naturellement  $e_j(t_j) = e_{j-1}(t_j) = e(t_j)$  et  $e'_j(t_j) = e'_{j-1}(t_j) = e'(t_j)$  pour avoir une enveloppe  $C^1$ . Soit  $\Lambda = [e(t_1), e'(t_1), e(t_2), e'(t_2), \dots, e(t_{J-1}), e'(t_{J-1}), e(t_J), e'(t_J)]$ , le vecteur d'inconnues.

- On impose la contrainte intégrale  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} e(t) dt = I_j$ , où  $I_j$  est l'intégrale du signal sur l'intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ . Une telle contrainte peut-être écrite comme  $Q\Lambda = I$ , où  $I = (I_j)_{j=1, \dots, J-1}$ . Cela ne correspond pas tout à fait à la condition d'intégrale nulle entre ses extrema pour  $f - e$ . La condition d'intégrale nulle suppose que les  $t_j$  sont aussi des inconnues du problème, problème d'optimisation plus compliqué.
- On impose aussi la condition naturelle que  $e(t_j) \leq f(t_j)$  (resp.  $e(t_j) \geq f(t_j)$ ), s'il y a un maximum (resp minimum) en  $t_j$  pour  $s$ . Cela peut s'écrire sous la forme de contraintes de type inégalité de la forme  $M\Lambda \leq S$ .

# Définition de la fonction coût

Il est naturel de considérer la fonction coût suivante :

$$J(\Lambda, \beta) = \sum_{j=1}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e'_j(t)^2 dt + \beta e''_j(t)^2 dt$$

$e_j$  est l'interpolant de Hermite de  $e$  aux points  $[t_j, t_{j+1}]$  et peut donc être écrite comme :

$$e_j(t) = e(t_j)h_{j,j}(t) + e'(t_j)k_{j,j}(t) + e(t_{j+1})h_{j+1,j}(t) + e'(t_{j+1})k_{j+1,j}(t) \quad (2)$$

où  $h_{j,l}(t) = \left(1 - 2(t - t_j)l'_{j,l}(t_j)\right) l_{j,l}^2(t)$  et  $k_{j,l}(t) = (t - t_j)l_{j,l}^2(t)$ , où  $l_{j,l}$  est le polynôme de Lagrange au point  $t_j$  sur l'intervalle  $[t_l, t_{l+1}]$ , et  $l$  appartient à  $\{j, j - 1\}$ .

Avec la convention  $t_0 = t_1$  et  $t_{J-1} = t_J$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
J(\Lambda, \beta) &= \sum_{j=1}^{J-1} e^2(t_j) \left[ \frac{6}{5} \left( \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j-1}} \right) + \beta \left( \frac{12}{h_{j-1}^3} + \frac{12}{h_j^3} \right) \right] \\
&\quad + e(t_j)e'(t_j)\beta \left( -\frac{12}{h_{j-1}^2} + \frac{12}{h_j^2} \right) + e(t_j)e(t_{j+1}) \left( -\frac{12}{5h_j} - \beta \frac{24}{h_j^3} \right) \\
&\quad + e(t_j)e'(t_{j+1}) \left( \frac{1}{5} + \beta \frac{12}{h_j^2} \right) + e'(t_j)^2 \left[ \frac{2}{15} (h_j + h_{j-1}) + \beta \left( \frac{4}{h_{j-1}} + \frac{4}{h_j} \right) \right] \\
&\quad + e'(t_j)e(t_{j+1}) \left[ -\frac{1}{5} - \beta \frac{12}{h_j^2} \right] + e'(t_j)e'(t_{j+1}) \left[ \frac{h_j}{15} + \beta \frac{4}{h_j} \right] \\
&\quad + e^2(t_J) \left[ \frac{6}{5h_{J-1}} + \beta \frac{12}{h_{J-1}^3} \right] \\
&\quad + e(t_J)e'(t_J) \left[ -\frac{1}{5} - \beta \frac{12}{h_{J-1}^2} \right] + e'(t_J)^2 \left[ \frac{2}{15} h_{J-1} + \beta \frac{4}{h_{J-1}} \right] \tag{3}
\end{aligned}$$

On déduit alors  $J(\Lambda, \beta)$  peut être écrite sous la forme  $\Lambda^T B \Lambda$ , où  $B$  est une matrice symétrique :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & B_2 & C_2^T & \ddots & \vdots \\ 0 & C_2 & B_3 & C_3^T & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{J-1}^T \\ 0 & \cdots & 0 & C_{J-1} & B_J \end{pmatrix}$$

où, pour  $j = 1, \dots, J$ , avec la convention  $h_0 = h_J = +\infty$  :

$$B_j = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \left( \frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j} \right) + \beta \left( \frac{12}{h_{j-1}^3} + \frac{12}{h_j^3} \right) & \beta \left( \frac{6}{h_j^2} - \frac{6}{h_{j-1}^2} \right) \\ \beta \left( \frac{6}{h_j^2} - \frac{6}{h_{j-1}^2} \right) & \frac{2}{15} (h_j + h_{j-1}) + \beta \left( \frac{4}{h_{j-1}} + \frac{4}{h_j} \right) \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, pour } j = 1, \dots, J-1, C_j = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5h_j} - \beta \frac{12}{h_j^3} & -\frac{1}{10} - \beta \frac{6}{h_j^2} \\ \frac{1}{10} + \beta \frac{6}{h_j^2} & \frac{h_j}{30} + \beta \frac{2}{h_j} \end{pmatrix}$$

# Existence et Unicité d'une solution

Le problème que l'on cherche à résoudre est le suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min_{\Lambda} \Lambda^T B \Lambda \\ M \Lambda \leq S \\ Q \Lambda = I \end{cases}$$

qui est un problème classique de programmation quadratique.

- Unicité : si  $B$  est définie positive le problème peut être résolu en un temps polynomial. Dans ce cas, la fonction  $J(\Lambda, \beta) = \Lambda^T B \Lambda$  est strictement convexe, et a au plus un minimum sur l'ensemble convexe formé par les contraintes. Dans notre cas, la matrice  $B$  n'est pas positive, car elle admet 0 comme valeur propre associée à la fonction constante, ce qui n'est pas gênant étant donné les contraintes.
- Existence : en ce qui concerne l'existence d'un minimum, on a le théorème suivant :

**Theorem 1** *Soit  $E$  un sous espace de dimension finie,  $Y \subset E$  un sous-ensemble fermé et  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si  $f$  satisfait la propriété suivante:*

$$(y_n) \subset Y \text{ and } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\| = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = +\infty$$

*alors  $f$  admet un minimum sur  $Y$*

# Les conditions de Karush-Kuhn et Tucker

Comme les contraintes et la fonction  $J$  sont convexes, le minimum  $\Lambda^*$  est caractérisé par les conditions de Karush-Kuhn-Tucker c'est à dire que  $\Lambda^*$  est le seul vecteur admissible tel qu'il existe des vecteurs  $\mu$  (avec  $\mu_i \leq 0$  pour  $i = 1, \dots, J - 1$ ) et  $\beta = (\beta_i)_{i=1, \dots, J}$  qui satisfont:

$$(KKT) \quad \begin{cases} 2\Lambda^{*T} B + \mu^T M + \beta^T Q = 0 \\ \mu_i (M\Lambda^*)_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, J - 1 \end{cases} \quad (4)$$

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre de tels systèmes parmi lesquelles les méthodes des points intérieurs sont les plus populaires (Forsgren '02). Nous utilisons le logiciel scilab pour la résolution.

# Resultats

Pour avoir des points extrêmes qui soient des extrema, on symétrise le signal par rapport au premier et au dernier extrema, c'est-à-dire :

$$\text{pour } t \in \{-t_1^0, \dots, -1\} \quad \tilde{f}(t) = 2 * f(0) - f(-t)$$

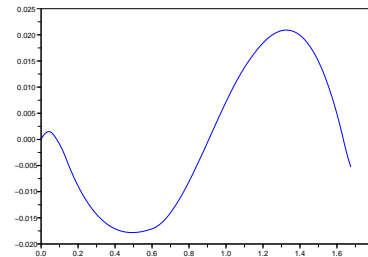
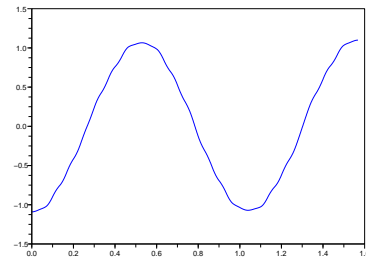
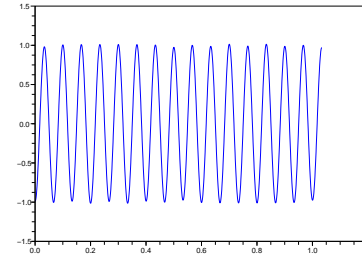
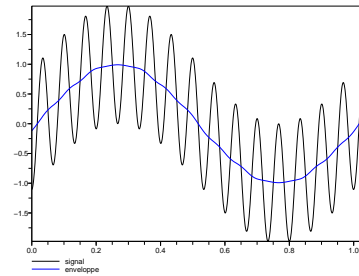
$$\text{pour } t \in \{N + 1, \dots, 2N - t_j^0\} \quad \tilde{f}(t) = 2 * f(N) - f(2N - t)$$

Considérer  $\beta$  non nul permet d'avoir des solutions plus lisses, mais nous verrons que ce n'est pas toujours le cas.

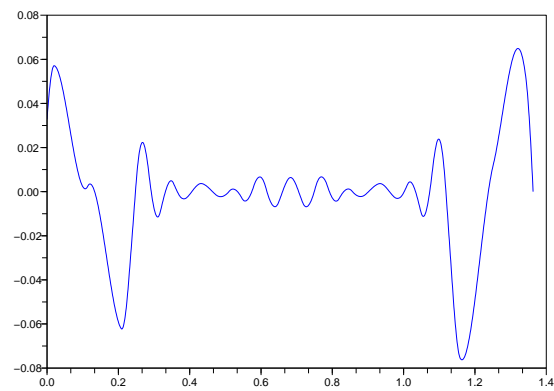
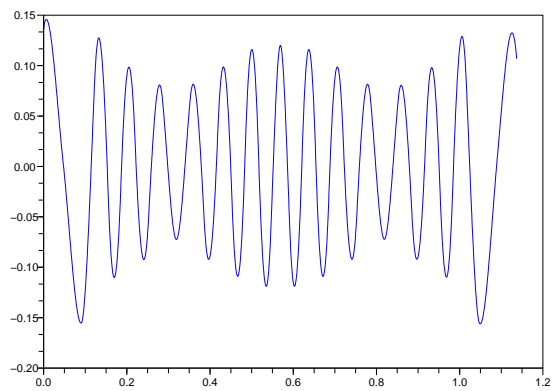
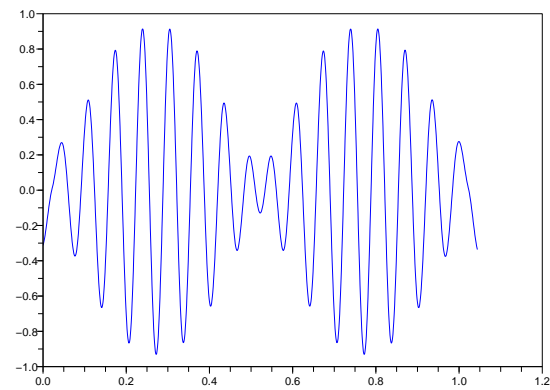
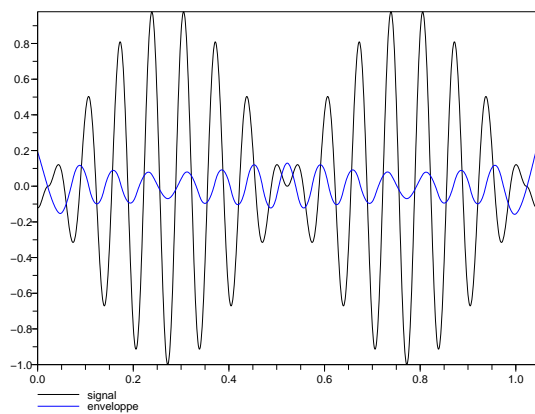


# Résultats : signaux stationnaires

On considère les signaux stationnaires suivants  $f(t) = \sin(2\pi t) + \sin(30\pi t)$

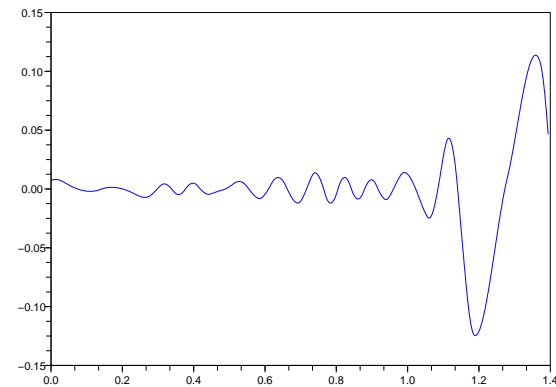
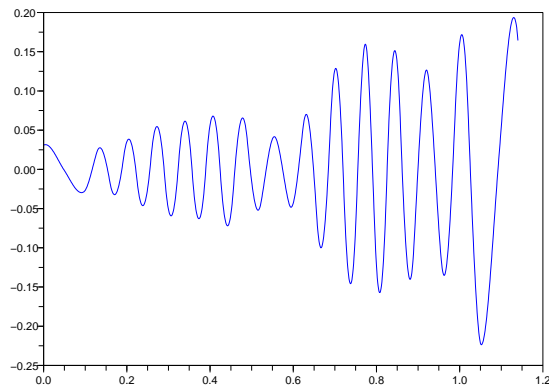
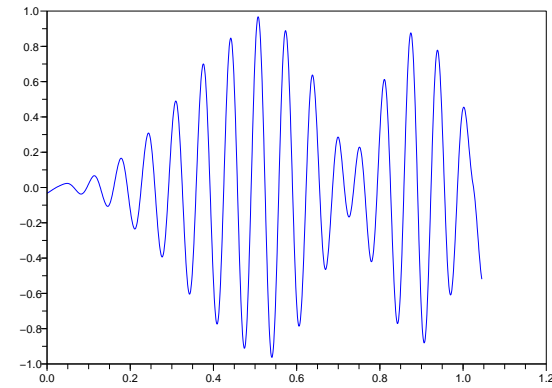
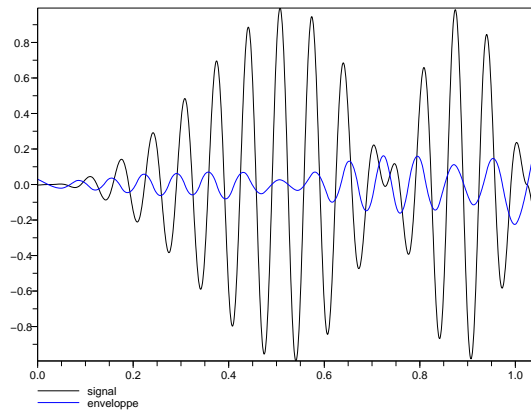


$$f(t) = \sin(2\pi t) * \sin(30\pi t)$$



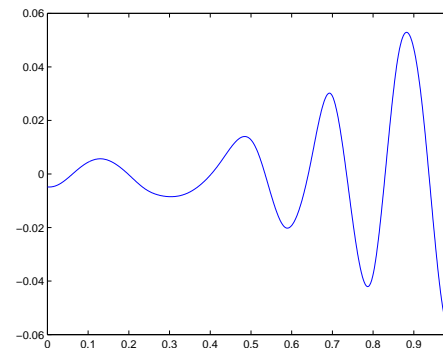
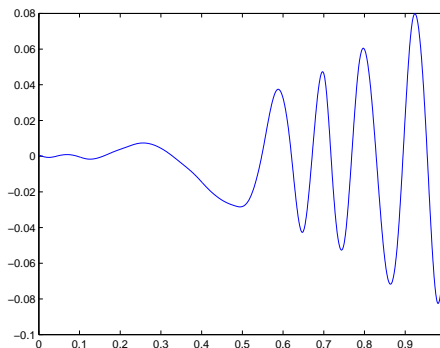
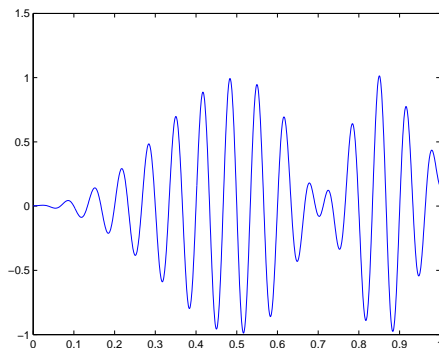
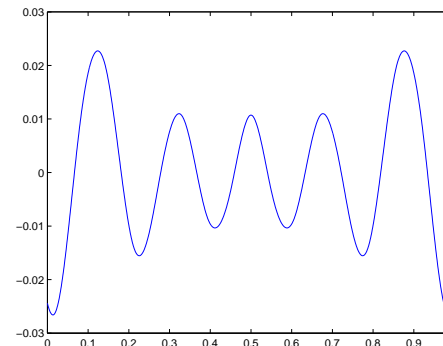
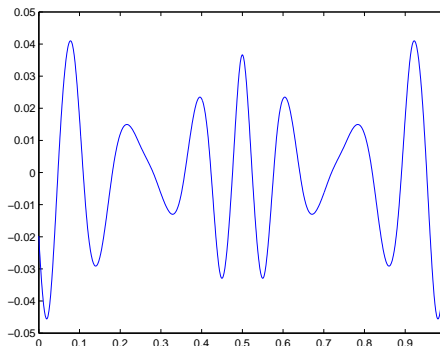
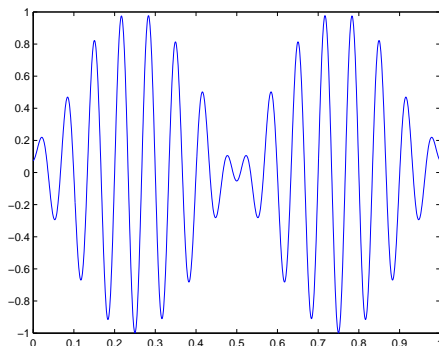
# Signaux non stationnaires

On considère le signal  $f(t) = \sin(2\pi t^2) * \sin(30\pi t)$ :



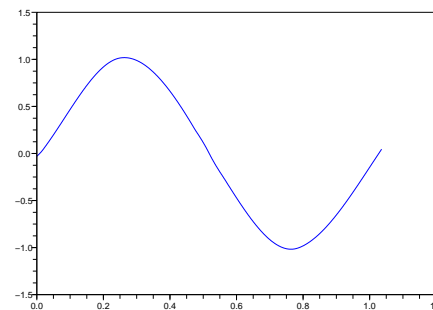
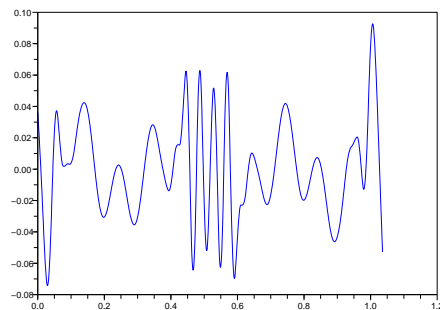
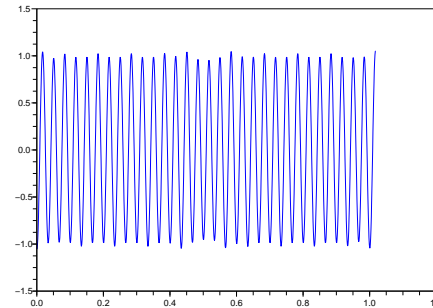
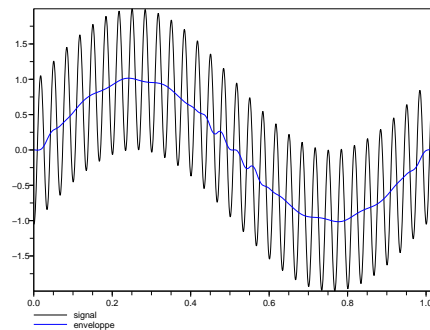
# Comparaison avec les modèles de calcul existants

On compare ici avec l'algorithme de calcul proposé par Flandrin  $f(t) = \sin(2\pi t) + \sin(30\pi t)$



# Analyse des résultats

- En n'imposant pas de contraintes intégrales, les signaux peuvent se représenter à l'aide de moins de modes, car l'amplitude des modes décroît plus rapidement.
- Cependant, on ne peut pas donner de signification précise aux modes obtenus.
- Grand nombre d'extrema, il apparait des modes non souhaités

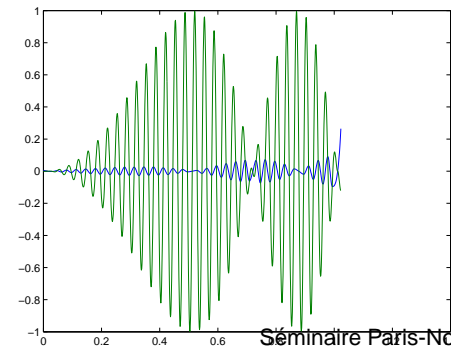
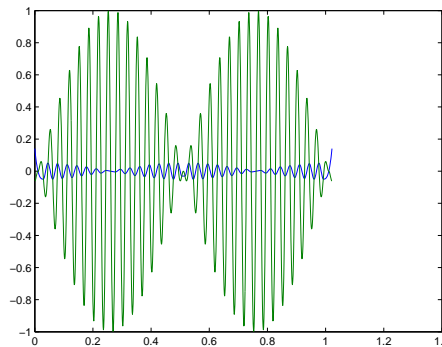
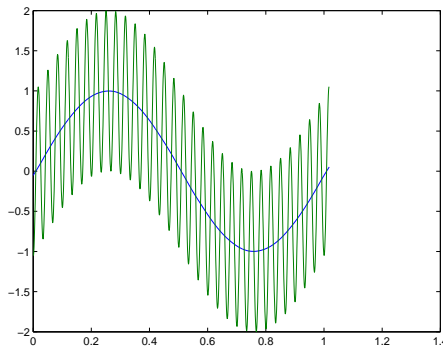


# Sur la condition d'intégrale nulle

Pour discuter la condition d'intégrale nulle, nous remplaçons celle-ci par une condition d'interpolation :

$$\forall j \quad e\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right) = \frac{f(t_j) + f(t_{j+1})}{2}$$

- Pour comparer avec la condition d'intégrale nulle on considère un polynôme de degré 3 par morceaux avec des raccords  $C^1$  (Fritsch '80).
- L'avantage d'une telle méthode est que la technique d'interpolation impose la même monotonie sur la courbe interpolante que sur les données. Ainsi en soustrayant l'enveloppe moyenne au signal on obtient une IMF faible (i.e. un zéro entre chaque extremum), qui est un signal mono-composant particulier.
- L'enveloppe obtenue dans chacun des trois cas précédents soit ne présente pas d'oscillations, soit présente des oscillations d'amplitude très faible. L'extraction des modes s'effectue de manière extrêmement simple.



# Schéma de reconstruction

A partir de cette décomposition, on peut facilement construire un schéma de reconstruction. On suppose que le signal initial est un polynôme de degré 3 par morceaux entre ces extrema (i.e. entièrement déterminé par la donnée des points  $(t_j, f(t_j))$ ). On suppose que l'enveloppe moyenne est telle que:

$$\forall j \quad e\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right) = \frac{f(t_j) + f(t_{j+1})}{2}$$

et  $(t_0, f(t_0))$  alors on peut reconstruire récursivement la suite  $(t_j, f(t_j))$  qui définit entièrement le signal. Si il y a  $N$  extrema, il y a  $N - 1$  points d'interpolation pour l'enveloppe moyenne auxquels s'ajoute le point  $(t_0, f(t_0))$ , soit  $N$  points en tout. On a donc une représentation équivalente. Perspectives :

- L'enveloppe moyenne étant plus lisse, on peut plus facilement la compresser que le signal initial.
- Mise en oeuvre d'une méthode multirésolution utilisant ce principe.

Remarque: la décomposition ressemble à la décomposition de Haar mais définie uniquement sur les extrema du signal.

# l'EMD en 2D

- En 2D, l'algorithme de l'EMD est à peu près similaire, sauf que l'interpolation se fait sur des données non régulièrement réparties : une approche par spline plaques minces est proposée dans (Linderhed '02) ou par fonction à symétrie radiale dans (Deléchelle '03). Ces approches sont inadaptées lorsque le nombre d'extrema est trop grand.
- Une approche moins coûteuse en temps de calcul consiste à effectuer des triangulations de Delaunay des maxima et des minima puis à construire leur enveloppe respective en considérant des polynômes de degré 3 sur chaque triangle telle que l'enveloppe soit globalement  $C^1$ . Cette enveloppe respecte comme dans le cas 1D la monotonie des données (Damerval '05). L'enveloppe moyenne étant alors calculée comme moyenne des enveloppes. Dans toute les approches existantes, une procédure de type "sifting process" est ensuite utilisée.
- La construction de l'enveloppe moyenne ne peut être effectuée par une minimisation sous contraintes de la même manière qu'en 1D.



## Perspective pour le cas 2D

- Il est possible de définir de la même façon qu'en 1D l'enveloppe moyenne.
- Pour chaque maximum de l'image, situé en  $X_{max}$ , on recherche le minimum le plus proche situé en  $X_{min}$  (au sens de la norme euclidienne), l'enveloppe  $e$  doit alors être telle que :

$$e\left(\frac{X_{min} + X_{max}}{2}\right) = \frac{f(X_{min}) + f(X_{max})}{2}$$

Si on a  $N$  extrema au départ, on aura  $N - 1$  points à interpoler. Si on connaît les  $N - 1$  points de l'enveloppe moyenne et un extremum du signal de départ on peut reconstruire tous les extrema du signal initial. On a donc à nouveau une représentation équivalente.

- La construction de l'enveloppe moyenne s'effectue alors par triangulation de Delaunay et par approximation polynomiale de degré 3 sur chaque triangle telle que l'approximation soit globalement  $C^1$ .
- Perspectives : compression et construction d'un schéma multirésolution sur le même principe qu'en 1D.

- J. Cheng, D. Yu and Y. Yang, *Research on the Intrinsic Mode Function (IMF) Criterion in EMD Method*, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 20, pp. 817-824, 2006.
- C. Damerval, S. Meignen, V. Perrier, *A fast Algorithm for Bidimensional EMD*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 10, pp. 701-704, october 2005.
- N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian and B. Torésani, *Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis : Extraction of Instantaneous Frequencies*, IEEE Trans. Info. Theory. vol. 38, no. 2, pp. 644-664, 1992.
- P. Flandrin, G. Rilling and P. Goncalvès, *Empirical Mode Decomposition as a Filter Bank*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, no. 2, pp. 112-114, 2004.
- G. Rilling, P. Flandrin and P. Goncalvès, *On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms*, IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP-03, Grado (I), June 2003
- A. Forsgren, P. E. Gill, M. H. Wright, *interior Methods for Nonlinear Optimization*, SIAM Review, vol. 44, no. 4, pp. 525-597, 2002.
- F.N. Fritsch, R. E. Carlson, *Monotone Piecewise Cubic Interpolation*, SIAM J. Numerical Analysis, Vol. 17, pp.238-246, 1980.

N.E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung and H.H. Liu, *The empirical mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and nonstationary time series analysis*, Proceedings of the Royal Society London A, pp. 903-1005, 1998.

A. Linderhed, *2D Empirical Mode Decompositions in the Spirit of Image Compression*, Wavelet and Independent components analysis applications IX, SPIE proceedings, vol. 4738, pp. 1-8, 2002.

J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niang, and Ph Bunel, *Image Analysis by Bidimensional Empirical Mode Decomposition*, Image Vis. Comput, vol. 21, no. 12, 2003.

R.C. Sharpley and V. Vatchev, *Analysis of the Intrinsic Mode Functions*, Construct. Approx., vol. 24, pp. 17-47, 2006.

B. Xuan, Q. Xie and S. Peng, *EMD Sifting Based on Bandwidth*, IEEE Signal Processing Letters, to appear 2007.