

**Utilisation de la convergence des points de contrôle des B-splines et des box splines  
pour l'approximation des transformées en ondelettes**

Sylvain Meignen

Equipe MGMI-LJK, Grenoble

# Introduction

- Motivation : Il existe de nombreuses représentations des signaux et des images, les représentations splines sont parmi les plus populaires.
- Dans une première partie, nous allons nous intéresser à l'approximation des coefficients d'ondelettes en utilisant la convergence des points de contrôle des B-splines.
- Nous nous intéresserons ensuite à l'approximation des transformées en ondelettes multidimensionnelles en utilisant cette fois la convergence des réseaux de contrôle des box splines (cas multidimensionnel).

# Cas 1 D: Rappel sur les B-splines et les B-splines discrètes

La B-spline d'ordre  $n > 0$  avec pour noeuds  $a_k = k$  est:  $N^n(x) = \overbrace{N^0 * N^0 * \dots * N^0}^{n+1}$   
 $N^0$ : fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$ . B-spline discrète d'ordre  $n > 0$  à l'échelle  $m$ :

$$b_m^n = \overbrace{b_m^0 * b_m^0 * \dots * b_m^0}^{n+1} \quad (1)$$

où  $b_m^0 = \frac{1}{m} \{1, 1, \dots, 1\}$  avec  $m \geq 2$  et dont le support est  $\{0, \dots, m - 1\}$ .

Lien entre B-spline discrète et continue :

$$\frac{1}{m} N^n\left(\frac{t}{m}\right) = b_m^n * N^n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_m^n[k] N^n(t - k) \quad (2)$$

ou  $N^n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m b_m^n[k] N^n(mt - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m b_m^n[k] N_k^n(t)$  où  $(N_k^n)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont les B-splines

ayant pour noeuds  $(\frac{k}{m})_{k \in \mathbb{Z}}$ . Ainsi,  $(m b_m^n[k])_{k \in \mathbb{Z}}$  sont les points de contrôle de  $N^n$  aux noeuds  $(\frac{k}{m})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

# Convergence des points de contrôle

Les points de contrôle convergent quadratiquement vers  $N^n$  de la manière suivante :

$$\max_k |N^n(\frac{k}{m} + \frac{n+1}{2m}) - mb_m^n[k]| = O(\frac{1}{m^2}). \quad (3)$$

On définit alors une fonction constante par morceaux par:

$$M_m^n(t) = mb_m^n[k] \quad \frac{k}{m} + \frac{n+\epsilon}{2m} \leq t < \frac{k+1}{m} + \frac{n+\epsilon}{2m} \quad (4)$$

avec  $\epsilon = 1$  si  $n$  est impair et zéro sinon. Un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $N^n$  conduit à  $\|M_m^n - N^n\|_\infty = O(\frac{1}{m})$ .

# Propriétés d'inclusion

Nous montrons ici comment certaines propriétés des B-splines continues restent valable pour les B-splines discrètes. Considérons l'espace :

$$S_h^n = \left\{ g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] \frac{1}{h} N^n\left(\frac{x}{h} - k\right), c \in l^2(\mathbb{Z}), h > 0 \right\}.$$

Celui-ci satisfait les deux propriétés suivantes :

$$S_{ih}^n \subset S_h^n \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \text{ et } \overline{\bigcup_{h>0} S_h^n} = L^2(\mathbb{R})$$

Dans le cas discret avec  $h$  entier noté  $m$ , les propriétés de convergence des points de contrôle énoncées précédemment conduisent naturellement à étudier:

$$\mathcal{D}_m^n = \left\{ \alpha_m^n[l] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] b_m^n[l - mk], c \in l^2(\mathbb{Z}), l \in \mathbb{Z} \right\}$$

En écrivant l'équation de dilatation de deux manières différentes. La première :

$$\frac{1}{im} N^n \left( \frac{x}{im} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{im}^n[k] N^n(x - k)$$

et la seconde :

$$\begin{aligned} \frac{1}{im} N^n \left( \frac{x}{im} \right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_i^n[k] \frac{1}{m} N^n \left( \frac{x}{m} - k \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_i^n[k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_m^n[l] N^n(x - mk - l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_i^n[k] b_m^n[l - mk] N^n(x - l) \end{aligned}$$

il vient  $b_{im}^n[l] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_i^n[k] b_m^n[l - mk]$  (i.e.  $\mathcal{D}_{im}^n \subset \mathcal{D}_m^n$ ).

# Approximation des décompositions en ondelettes

## aux échelles et aux valeurs rationnelles

- Nous utilisons ici les propriétés de convergence des points de contrôle des B-splines pour approximer les transformées en ondelettes aux échelles rationnelles et en des valeurs rationnelles.
- On considère un signal  $f$  et une ondelette  $\psi$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  projetés sur une base de B-spline d'ordre respectif  $n_1$  et  $n_2$  :

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] N^{n_1}(x - k) \text{ et } \psi(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] N^{n_2}(x - k).$$

En pratique, on considère souvent une approximation pour  $f$  telle que  $f(l) = c * N^{n_1}(l)$ , où  $c$  est calculé récursivement en utilisant des filtres causaux et anti-causaux (Unser '91).

- Si  $(f(l))_{l \in \mathbb{Z}}$  est dans  $l^2$ , il en va de même pour  $(c[l])_{l \in \mathbb{Z}}$ .

Rappelons maintenant que la décomposition de  $f$  sur  $\psi$  à l'échelle  $s$  est définie par :

$$Wf(s, x) = \int f(t) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) dt$$

Toute échelle  $s$  réelle peut être approximée par un rationnel  $\frac{m_1}{m_2}$ , si bien qu'il est intéressant d'étudier :

$$Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, t\right) = \left(\bar{\psi}_{\frac{m_1}{m_2}} * f\right)(t) \approx \frac{m_2}{m_1} \sum_{k,l} g[k]c[l] \left(N^{n_2} \left(-\frac{m_2}{m_1} \cdot -k\right) * N^{n_1}(\cdot - l)\right)(t). \quad (5)$$

Le terme de droite de l'équation (5) peut être calculé exactement aux valeurs entières (Wang '98) (i.e  $t = p$  entier) :

$$\begin{aligned} & \frac{m_2}{m_1} \sum_{k,l} g[k]c[l] \left(N^{n_2} \left(-\frac{m_2}{m_1} \cdot -k\right) * N^{n_1}(\cdot - l)\right)[p] \\ &= m_2 \left(b^{n_1+n_2+1} * b_{m_2}^{n_1} * \bar{b}_{m_1}^{n_2} * c_{\uparrow m_2} * \bar{g}_{\uparrow m_1}\right)_{\downarrow m_2}[p], \end{aligned}$$

où  $b^{n_1+n_2+1}[k] = N^{n_1+n_2+1}[k]$ .

# Utilisation de la fonction constante par morceaux $M_m^n$

Comme  $m_1$  et  $m_2$  peuvent être choisis arbitrairement grand, leur rapport étant constant :

$$Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, t\right) \approx \frac{m_2}{m_1} \sum_{k,l} g[k]c[l] \left( M_{m_1}^{n_2} \left( -\frac{m_2}{m_1} \cdot -k \right) * M_{m_2}^{n_1} (\cdot - l) \right) (t).$$

L'approximation converge uniformément si  $c$  et  $g$  sont finis ce qui est le cas si on étudie des signaux finis. Réécrivons alors de façon formelle le produit de convolution :

$$\begin{aligned} & \left( M_{m_1}^{n_2} \left( -\frac{m_2}{m_1} \cdot -k \right) * M_{m_2}^{n_1} (\cdot - l) \right) (t) \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} m_1 \bar{b}_{m_1}^{n_2} \left[ q + km_1 - \frac{n_2 + \epsilon_2}{2} \right] b_{m_2}^{n_1} \left[ -q - 1 + (t - l)m_2 - \frac{n_1 + \epsilon_1}{2} \right]. \end{aligned}$$

où  $\epsilon_1 = 1$  (resp.  $\epsilon_1 = 0$ ) si  $n_1$  (resp.  $n_2$ ) est impair et zéro sinon. Cette expression a un sens si  $t = \frac{i}{m_2}$  ou  $i$  est un entier. Nous en déduisons l'approximation suivante de  $Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{i}{m_2}\right)$ :

$$Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{i}{m_2}\right) \approx m_2 \left( \bar{g}_{\uparrow m_1} * \bar{b}_{m_1}^{n_2} * c_{\uparrow m_2} * b_{m_2}^{n_1} \right) \left[ i - 1 - \frac{n_1 + \epsilon_1}{2} - \frac{n_2 + \epsilon_2}{2} \right] = D\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{i}{m_2}\right).$$

# Commentaires

- La principale différence entre le calcul de l'approximation proposé par Wang (Wang '98) est l'absence du facteur  $b^{n_1+n_2+1}$ .
- Dans le premier cas, calcul exact mais uniquement pour des valeurs entières, tandis que dans notre cas on calcule des coefficients approchés mais sur un ensemble de valeurs rationnelles.
- Une telle approximation est intéressante lorsque que l'on souhaite avoir une idée plus précise de la transformée en ondelettes localement.
- Le temps de calcul est lié à la taille des filtres. On doit vérifier que l'on atteint de bons résultats avec des filtres de petites tailles.

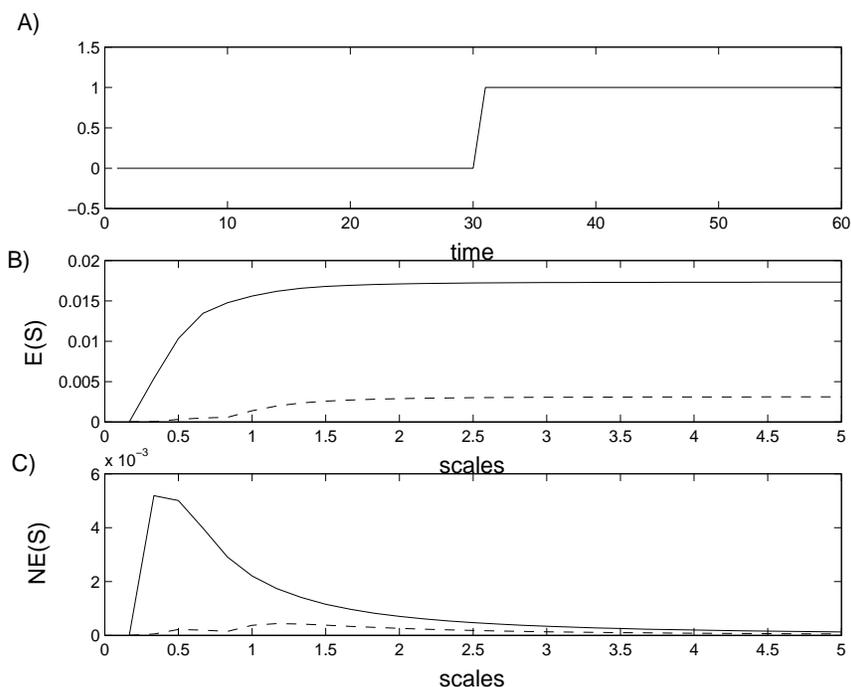
# Exemples

- Une étude numérique (Ichige '97) de la convergence of  $M_m^n$  vers la B-splines dans  $L^2$  pour  $n = 3$  ou  $n = 4$ , montre que lorsque  $m$  est supérieur à 6 l'approximation obtenue est très correcte.
- Pour gagner en temps de calcul, on peut calculer  $c_{\uparrow m_2} * b_{m_2}^{n_1}$  et  $\bar{g}_{\uparrow m_1} * \bar{b}_{m_1}^{n_2}$  séparément.
- On calcule le premier terme pour  $m_2 = 6$  et ensuite on calcule le second filtre pour  $m_1$  qui varie. Pour les simulations, nous avons adopté  $n_1 = n_2 = 3$  et  $g = [1 \quad -2 \quad 1]$  (l'ondelette est une approximation de la dérivée seconde de Gaussienne). Lorsque  $\frac{m_1}{m_2} = s < 1$ , la longueur du filtre dépendant du paramètre  $m_1$  est plus petite que la longueur minimale recommandée (i.e. 6), donc on multiplie  $m_1$  et  $m_2$  par un facteur de façon à ce qu'ils soient plus grand que 6.
- On donne deux exemples : le premier montre l'importance d'avoir des filtres suffisamment long en terme d'erreur  $l^2$ , et la seconde illustre le fait que notre décomposition fournit une approximation de la décomposition en ondelettes en des valeurs rationnelles et pour des échelles rationnelles.

On considère un signal  $f$  pour lequel on calcule la décomposition pour  $m_1$  et  $m_2$  égaux à 10 fois leur valeur minimale (on note  $Dr(s, p)$  les coefficients ainsi calculés). On calcule l'erreur

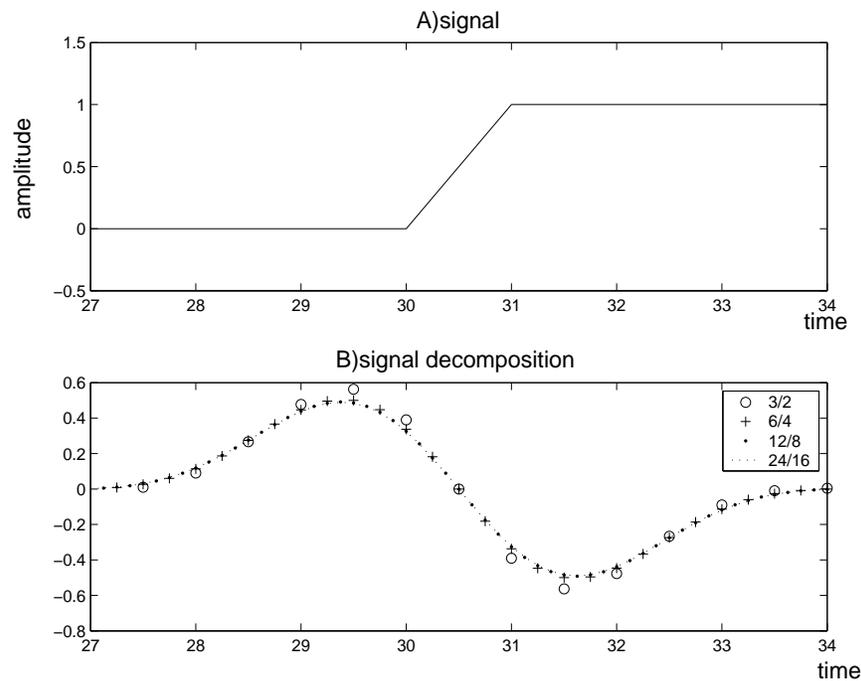
de la manière suivante  $E(S) = \sum_{s \leq S} \frac{\sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} (D(s, p) - Dr(s, p))^2}}{\sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} Dr(s, p)^2}}$ . On calcule  $E(S)$  quand

$m_2 = 6$  et  $m_1 \in \mathbb{N}^*$ , quand  $s \leq 5$ , pour le signal de la Figure (A). L'erreur est principalement liée aux échelles fines  $s < 1$  (ligne pleine). En augmentant la taille des filtres comme expliqué plus haut, les performances sont améliorées (pointillés).



# Illustration de la convergence

On montre aussi que la méthode proposée fournit une approximation de la décomposition en ondelettes aux échelles rationnelles et en des valeurs rationnelles. On considère un échelon et on calcule la décomposition pour  $\frac{m_1}{m_2}$  dans  $\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{12}{8}, \frac{24}{16}\}$ . Nous remarquons que nous avons effectivement convergence uniforme de l'approximation en des valeurs rationnelles et que la convergence est très rapide lorsque la taille des filtres augmentent.



# Cas multidimensionnel: approches par box splines

Au vu de ce qui précède, on peut envisager une généralisation au cas multidimensionnel par produit tensoriel de la base de B-spline. Cependant nous allons nous placer dans le cadre plus général des box splines.

Définition des box splines Soit un ensemble de  $n$  vecteurs, non nécessairement distincts, dans un espace de dimension  $s$ ,  $\mathbf{X}_n = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$ . Supposons qu'au moins  $s$  vecteurs de  $\mathbf{X}_n$  sont linéairement indépendants. Ordonnons la famille  $\mathbf{X}_n$  de telle sorte que  $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$  soit linéairement indépendant. Introduisons la notation  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s][0, 1]^s$  pour l'ensemble des combinaisons linéaires du type  $\sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{x}_i$  avec  $\lambda_i \in [0, 1[$ , on définit alors les box splines multivariées par (Chui '88, Prautsch '02):

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_s) = \begin{cases} \frac{1}{|\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)|} & \text{if } \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s][0, 1]^s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_k) = \int_0^1 \beta(\mathbf{x} - t\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_{k-1}) dt, \quad n \geq k > s. \quad (6)$$

On peut vérifier que le support de  $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)$  est  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n][0, 1]^n$ .

# Equation de dilatation pour les box Splines

Une première équation de dilatation satisfaite par les box splines est la suivante (Asahi '01) :

$$\beta\left(\frac{\mathbf{k}}{m}, \mathbf{X}_n\right) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \beta(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \quad (7)$$

avec  $b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] = \frac{1}{m^{n-s}} (b_m[\cdot, \mathbf{x}_1] * \cdots * b_m[\cdot, \mathbf{x}_n])[\mathbf{p}]$ , où  $b_m[\cdot, \mathbf{x}_i]$  est une séquence de  $m$  impulsions dans la direction définie par  $\mathbf{x}_i$  et  $*$  est la convolution  $s$ -dimensionnelle  $((f * g)[\mathbf{q}] = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^s} f[\mathbf{l}]g[\mathbf{q} - \mathbf{l}])$ . Un résultat peut être montré pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$ :

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \beta(m\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \quad (8)$$

Cette égalité est un cas particulier d'équations de dilatation plus générales.

# Equation de dilatation non séparable pour les box splines

Dans un contexte plus général, le facteur de dilatation  $m$  peut être remplacé par une matrice inversible  $\mathbf{M}$ , à valeurs entières ayant des valeurs propres de module strictement plus grand que 1 (Malassiotis '99). La matrice  $\mathbf{M}$  doit aussi être telle qu'il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que

$$\mathbf{M}\mathbf{x}_p = \lambda_p \mathbf{x}_{\sigma(p)} \quad (9)$$

avec  $\lambda_p$  entier. Quand la propriété précédente est satisfaite, nous dirons que  $\mathbf{X}_n$  est invariant par multiplication par  $\mathbf{M}$ . La définition de  $\sigma$  impose que dès que  $\mathbf{X}_n$  contient deux vecteurs distincts, chacun de ces vecteurs apparait le même nombre de fois dans  $\mathbf{X}_n$ .

**Théorème 1** *Supposons que  $\mathbf{M}$  satisfait l'hypothèse (9) alors,*

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \sqrt{|\det(\mathbf{M})|} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} g[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma(n)}] \beta(\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n),$$

où  $g[\cdot, \Lambda_n, \mathbf{X}_n]$  et  $\Lambda_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , est défini par :

$$g[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_n] = \frac{\sqrt{|\det(\mathbf{M})|}}{\prod_{p=1}^n \lambda_p} (b_{\lambda_1}[\cdot, \mathbf{x}_1] * \dots * b_{\lambda_n}[\cdot, \mathbf{x}_n]) [\mathbf{p}].$$

# Démonstration du théorème

Nous rappelons tout d'abord que la transformée de Fourier de  $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)$  est (Chui '88):

$$\mathcal{F}(\beta)(\chi, \mathbf{X}_n) = \prod_{p=1}^n \frac{1 - e^{-i\chi^T \mathbf{x}_p}}{i\chi^T \mathbf{x}_p}.$$

Alors, en utilisant la propriété (9), nous pouvons écrire

$$\frac{\mathcal{F}(\beta)(\mathbf{M}^T \chi, \mathbf{X}_n)}{\mathcal{F}(\beta)(\chi, \mathbf{X}_n)} = \prod_{p=1}^n \frac{1}{\lambda_p} \frac{1 - e^{-i\lambda_p \chi^T \mathbf{x}_{\sigma(p)}}}{1 - e^{-i\chi^T \mathbf{x}_{\sigma(p)}}} = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathbf{M})|}} G(\chi, \mathbf{X}_n).$$

ou encore :

$$\mathcal{F}(\beta)(\mathbf{M}^T \chi, \mathbf{X}_n) = \prod_{p=1}^n \frac{1}{\lambda_p} (1 + e^{-i\chi^T \mathbf{x}_{\sigma(p)}} + \dots + e^{-i(\lambda_p - 1)\chi^T \mathbf{x}_{\sigma(p)}}) \mathcal{F}(\beta)(\chi, \mathbf{X}_n).$$

Si  $(h[\mathbf{n}])_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^s}$  est une séquence finie, pour toute fonction intégrable  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^s$  on a

$$\mathcal{F} \left( \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s} h[\mathbf{k}] f(\cdot - \mathbf{k}) \right) (\chi) = \hat{h}(\chi) \mathcal{F}(f)(\chi), \text{ où } \hat{h}(\chi) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^s} h[\mathbf{n}] e^{-2i\pi \langle \mathbf{n}, \chi \rangle}.$$

De ceci on peut alors déduire

$$\mathcal{F}(\beta)(\chi, \mathbf{X}_n) = \mathcal{F} \left( \sqrt{|\det(\mathbf{M})|} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} g[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma(n)}] \beta(\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) \right) (\chi),$$

pour tout  $\chi$  dans  $\mathbb{R}^s$  où  $g[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_n] = \frac{\sqrt{|\det(\mathbf{M})|}}{\prod_{p=1}^n \lambda_p} (b_{\lambda_1}[\cdot, \mathbf{x}_1] * \dots * b_{\lambda_n}[\cdot, \mathbf{x}_n])[\mathbf{p}]$ . Chacun

des termes de l'équation est dans  $L^2(\mathbb{R}^s)$ , si bien que

$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \sqrt{|\det(\mathbf{M})|} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} g[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma(n)}] \beta(\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n)$ , presque partout. La

continuité des deux membres de l'égalité entraîne l'égalité pour tout  $\mathbf{x}$ . ■

Remarque : en posant  $\mathbf{M} = m\mathbf{I}_s$ , on trouve l'équation de dilatation simple.

En remplaçant  $\mathbf{M}$  par  $\mathbf{M}^m$ , on obtient une nouvelle équation non-séparable de dilatation.

**Théorème 2** *En supposant les mêmes hypothèses que pour le Théorème 1, nous avons :*

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \sqrt{|\det(\mathbf{M})|^m} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} g_m[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_n] \beta(\mathbf{M}^m \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n),$$

avec

$$g_m[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_n] = (\tilde{g}[\cdot, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma(n)}] * \cdots * \tilde{g}[\cdot, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma^m(n)}])[\mathbf{p}],$$

où  $\tilde{g}[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma(n)}] = g[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma(n)}]$  et pour  $r \geq 2$ ,

$$\tilde{g}[\mathbf{p}, \Lambda_n, \mathbf{X}_{\sigma^r(n)}] = \frac{\sqrt{|\det(\mathbf{M})|}}{\prod_{p=1}^n \lambda_p} \left( (b_{\lambda_1})_{\uparrow \prod_{k=1}^{r-1} \lambda_{\sigma^k(1)}} [\cdot, \mathbf{x}_{\sigma^r(1)}] * \cdots * (b_{\lambda_n})_{\uparrow \prod_{k=1}^{r-1} \lambda_{\sigma^k(n)}} [\cdot, \mathbf{x}_{\sigma^r(n)}] \right)$$

La preuve est très similaire à celle du théorème 1.

# Convergence des réseaux de contrôle des box Splines

Nous supposons que  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j^*, \dots, \mathbf{x}_n\}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^s$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , où  $\mathbf{x}_j^*$  indique que l'on retire  $\mathbf{x}_j$  de  $\mathbf{X}_n$ . Avec une telle hypothèse sur  $\mathbf{X}_n$ ,  $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)$  est continu et les combinaisons linéaires des translations de  $\beta$  contiennent les polynômes affines (Prautsch '02). En particulier, si on définit

$$\mathbf{n}_\mathbf{p} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s,$$

on peut écrire  $\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{n}_\mathbf{p} \beta(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) = \mathbf{x}$ . En effet si on appelle  $\mathbf{n}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n)$  le centre de la box spline  $\beta$  alors,

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{n}_\mathbf{p} \beta(\mathbf{n}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) = \mathbf{n}_0 \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \beta(\mathbf{n}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) + \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{p} \beta(\mathbf{n}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) = \mathbf{n}_0,$$

puisque  $\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \beta(\mathbf{n}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) = 1$  (Prautsch '02) and  $\beta(\mathbf{n}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) = \beta(\mathbf{n}_0 + \mathbf{p}, \mathbf{X}_n)$  (la box spline  $\beta$  étant symétrique par rapport à son centre). Soit  $D_{\mathbf{x}_k}$  la dérivée directionnelle

dans la direction  $\mathbf{x}_k$ , un calcul simple conduit à  $D_{\mathbf{x}_k} \left( \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{n}_\mathbf{p} \beta(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) \right) = \mathbf{x}_k$ .

Maintenant définissons  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) \end{pmatrix}$  and  $\mathbf{c}_m^{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{n}_p}{m} \\ b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \end{pmatrix}$ , on peut alors écrire :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{c}_m^{\mathbf{p}} \beta(m\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n).$$

Il a été prouvé par De Boor et *al.* (DeBoor '93), que si  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^s$ , ou  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \mathbb{Z}^n$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers, alors  $\|\mathbf{c}_m^{\mathbf{p}} - \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)\| = O(\frac{1}{m})$ , pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $\beta(m\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n) \geq 0$ . Cette égalité implique que pour un tel  $\mathbf{x}$  :

$$|b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] - \beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)| = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Lorsque la box spline is continuellement différentiable, l'approximation est en  $O(\frac{1}{m^2})$ .

# Définition d'une approximation constante par morceaux de $\beta$

Nous définissons une séquence de fonctions constantes par morceaux qui converge uniformément vers  $\beta$ . On définit alors la fonction constante par morceaux :

$$F_m(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \quad \forall \mathbf{x} \in \text{supp}(\beta)$$

avec  $\mathbf{p} = \underset{\mathbf{q}}{\text{argm}} \left( \|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{nq}}{m}\|_\infty \right)$  et où  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$ . Réciproquement, étant donné  $\mathbf{p}$ ,

l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  satisfaisant cette propriété est  $V_{\mathbf{p}}^m = \left\{ \mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{np}}{m}\|_\infty < \frac{1}{2m} \right\}$ . De la même manière, on définit  $V_{\mathbf{p}} = \left\{ \mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{np}\|_\infty < \frac{1}{2} \right\}$ .

**Théorème 3** *Si  $\beta$  est continuellement différentiable, alors  $|F_m(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) - \beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)| = O\left(\frac{1}{m}\right)$ .*

PREUVE : Tout  $\mathbf{x}$  dans  $\text{supp}(\beta)$  appartient à  $V_{\mathbf{p}}^m$  pour un certain  $\mathbf{p}$ . Un développement de Taylor à l'ordre 1 en  $\frac{\mathbf{np}}{m}$  conduit à :

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) = \beta\left(\frac{\mathbf{np}}{m}, \mathbf{X}_n\right) + O\left(\frac{1}{m}\right) = b_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] + O\left(\frac{1}{m}\right) = F_m(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) + O\left(\frac{1}{m}\right). \blacksquare$$

# Approximation des Transformée en Ondelettes

Nous détaillons maintenant un nouveau schéma d'approximation des transformées en ondelettes multidimensionnelles aux échelles rationnelles et en des valeurs spécifiques que nous préciserons. On considère une approximation d'une ondelette  $\Psi$  définie par

$$\Psi(\mathbf{x}) \approx \sqrt{|\det(\mathbf{M})|^m} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \alpha_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \beta(\mathbf{M}^m \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n), \quad (10)$$

et une approximation du signal multidimensionnel  $f$  donné par

$$f(\mathbf{x}) \approx \sqrt{|\det(\mathbf{M})|^m} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \gamma_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \beta(\mathbf{M}^m \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n). \quad (11)$$

## Remarques:

1. Décomposer le signal  $f$  de cette façon est intéressant dans la mesure où l'utilisation de matrices de sous-échantillonnage non diagonale (ex matrice d'échantillonnage hexagonale ou matrice de quincunx) conduit à de meilleurs résultats pour le codage des images (Malassiotis '99).
2. La façon de calculer  $\alpha_m$  et  $\gamma_m$  est détaillée plus loin.

On rappelle que le coefficient d'ondelette à l'échelle  $a$  en  $\mathbf{x}$  is

$$Wf(a, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^s} f(\mathbf{t}) \frac{1}{a^s} \Psi\left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{x}}{a}\right) d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{R}^s} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \frac{1}{a^s} \Psi\left(\frac{\mathbf{t}}{a}\right) d\mathbf{t}.$$

Il peut être approximé (en posant  $a = \frac{m_1}{m_2}$ ), en utilisant (11) et (10), par :

$$Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, \mathbf{x}\right) \approx \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^s \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \alpha_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \gamma_m[\mathbf{q}, \mathbf{X}_n] \int_{\mathbb{R}^s} \beta\left(\frac{m_2}{m_1} \mathbf{t} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n\right) \beta(\mathbf{M}^m \mathbf{x} + \mathbf{t} - \mathbf{q}, \mathbf{X}_n) d\mathbf{t}.$$

Comme  $F_m(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)$  converge uniformément vers  $\beta$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , nous pouvons écrire pour  $m_1$  et  $m_2$  grand, en gardant  $\frac{m_1}{m_2}$  constant:

$$Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, \mathbf{x}\right) \approx \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^s \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \alpha_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \gamma_m[\mathbf{q}, \mathbf{X}_n] \int_{\mathbb{R}^s} F_{m_1}\left(\frac{m_2}{m_1} \mathbf{t} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n\right) F_{m_2}(\mathbf{M}^m \mathbf{x} + \mathbf{t} - \mathbf{q}, \mathbf{X}_n) d\mathbf{t}.$$

Comme dans le cas monodimensionnel, nous récrivons formellement l'intégrale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^s} F_{m_1}\left(\frac{m_2}{m_1}\mathbf{t} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n\right) F_{m_2}(\mathbf{M}^m \mathbf{x} + \mathbf{t} - \mathbf{q}, \mathbf{X}_n) dt \\
 &= \frac{1}{m_2^s} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s} \int_{V_{\mathbf{r}}} F_{m_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{m_1} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n\right) F_{m_2}\left(\mathbf{M}^m \mathbf{x} + \frac{\mathbf{t}}{m_2} - \mathbf{q}, \mathbf{X}_n\right) dt \\
 &= \frac{1}{m_2^s} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s} b_{m_1}[\mathbf{r} - m_1 \mathbf{p}, \mathbf{X}_n] b_{m_2}[\mathbf{r} - m_2(\mathbf{M}^m \mathbf{x} - \mathbf{q}), \mathbf{X}_n].
 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{M}^{-m} \mathbf{i}}{m_2}$ , avec  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^s$ , l'expression au dessus a un sens. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Wf\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{\mathbf{M}^{-m} \mathbf{i}}{m_2}\right) &\approx \frac{1}{m_1^s} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \alpha_m[\mathbf{p}, \mathbf{X}_n] \gamma_m[\mathbf{q}, \mathbf{X}_n] b_{m_1}[\mathbf{r} - m_1 \mathbf{p}, \mathbf{X}_n] b_{m_2}[\mathbf{r} - \mathbf{i} - m_2 \mathbf{q}, \mathbf{X}_n] \\
 &= \frac{1}{m_1^s} \left( \overline{(\gamma_m)_{\uparrow m_2}} * \overline{b_{m_2}} * (\alpha_m)_{\uparrow m_1} * b_{m_1} \right) [\mathbf{i}, \mathbf{X}_n] \quad (1)
 \end{aligned}$$

## Retour sur le calcul de $\alpha_m$ et de $\gamma_m$

On note  $\gamma = \gamma_0$ . La séquence  $\gamma$  ne peut être obtenue par interpolation comme dans le cas des B-splines (Unser '91) car, dans la plupart des cas, la décomposition sur une famille de box splines translatée n'est pas unique. L'unicité est prouvée si et seulement si la matrice  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  est unimodulaire, c'est à dire si le déterminant de n'importe laquelle de ses sous-matrices de taille  $s^2$  vaut 1 ou  $-1$  (Dahmen '85).

Une approche classique pour calculer des coefficients d'une décomposition sur une famille de box splines translatées est proposé dans (Chui '88). Il s'agit de formuler le problème en terme de quasi-interpolation.

Le problème d'interpolation est de trouver  $\gamma$  telle que  $f(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^s} \gamma[\mathbf{l}] \beta(\mathbf{p} - \mathbf{l}, \mathbf{X}_n)$ . En

prenant la transformée en  $\mathbf{z}$  des deux côtés on obtient  $F(\mathbf{z}) = \Gamma(\mathbf{z}) \Delta(\mathbf{z}, \mathbf{X}_n)$ , où  $\Delta$  est la transformée en  $\mathbf{z}$ -transform of  $\beta$ . Si on pose  $\Delta(\mathbf{z}, \mathbf{X}_n)^{-1} = (1 - D(\mathbf{z}, \mathbf{X}_n))^{-1}$ , nous obtenons l'approximation pour  $\Gamma(\mathbf{z})$  :  $\Gamma(\mathbf{z}) \approx F(\mathbf{z})(1 + D(\mathbf{z}, \mathbf{X}_n) + \dots + D^q(\mathbf{z}, \mathbf{X}_n))$ .

La stabilité de la méthode nécessite que les racines de  $\Delta(\mathbf{z}, \mathbf{X}_n)$  soit à l'intérieur du cercle unité. Cette contrainte est beaucoup trop forte en pratique.

Nous adoptons une approche par moindres carrés pour le calcul de  $\gamma$ . Ainsi, nous n'imposons aucune condition sur  $\beta$ . Pour calculer  $\gamma$ , on définit

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s} \left( f(\mathbf{k}) - \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} \gamma[\mathbf{l}] \beta(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \mathbf{X}_n) \right)^2$$

dont la différentielle est :  $\partial_\gamma E[\mathbf{l}] = -f * \bar{\beta}_d[\mathbf{l}] + \gamma * \beta_d * \bar{\beta}_d[\mathbf{l}]$ , où  $\beta_d[\mathbf{l}] = \beta(\mathbf{l}, \mathbf{X}_n)$  et  $\bar{\beta}_d[\mathbf{l}] = \beta_d[-\mathbf{l}]$ .  $\gamma$  est alors calculé par une méthode de descente.

On peut alors écrire :

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^s} \gamma[\mathbf{l}] \beta(\mathbf{x} - \mathbf{l}, \mathbf{X}_n) = \sqrt{|\det(\mathbf{M})|^m} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} (g_m[\cdot, \Lambda_n, \mathbf{X}_n] * \gamma_{\uparrow \mathbf{M}^m})[\mathbf{p}] \beta(\mathbf{M}^m \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n)$$

$$\text{où } \gamma_{\uparrow \mathbf{M}^m}[\mathbf{q}] = \begin{cases} \gamma[\mathbf{p}] \text{ si } \exists \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s \text{ tel que } \mathbf{q} = \mathbf{M}^m \mathbf{p} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a alors  $\gamma_m = g_m * \gamma_{\uparrow \mathbf{M}^m}$ .

Etant donnée une ondelette  $\Psi$ , on peut calculer  $\alpha_m$  de la même manière que  $\gamma_m$ . On peut aussi considérer une ondelette du type

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \alpha[\mathbf{p}] \beta(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{X}_n),$$

avec  $\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} \alpha[\mathbf{p}] = 0$ , puisque  $\int_{\mathbb{R}^s} \beta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) dx = 1$ . On obtient alors

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sqrt{|\det(\mathbf{M})|^m} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^s} (g_m[\cdot, \Lambda_n, \mathbf{X}_n] * \alpha_{\uparrow \mathbf{M}^m})[\mathbf{q}] \beta(\mathbf{M}^m \mathbf{x} - \mathbf{q}, \mathbf{X}_n).$$

Dans tous les cas,  $\alpha_m = g_m * \alpha_{\uparrow \mathbf{M}^m}$ .

## Etude de la matrice $\mathbf{M}$ quand $s = 2$

Nous regardons quelle est la forme générale de la matrice  $\mathbf{M}$  lorsque  $s = 2$  et plus précisément l'influence de (9) sur la forme de  $\mathbf{M}$  en supposant que  $\mathbf{X}_n$  est composé de vecteurs distincts.

Un cycle de longueur  $q$  est défini par un sous ensemble  $S$  de  $\mathbf{X}_n$  tel que  $q$  est le plus petit entier satisfaisant  $\mathbf{M}^q \mathbf{x}_i = \nu_i \mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i$  pour tout  $\mathbf{x}_i$  dans  $S$ .  $\nu_i$  est indépendant de  $i$  puisque  $\nu_i = \prod_{i \in J_S} \lambda_i$ , où  $J_S$  est l'ensemble des indices correspondant à  $S$ . Puisque au moins  $s$   $\mathbf{x}_i$ 's ne sont pas colinéaires, l'existence d'un cycle de longueur  $q \geq 2$  implique que  $\mathbf{M}^q = \lambda \mathbf{I}_2$ . On montre que les matrices  $\mathbf{M}$  qui ne sont pas proportionnelles à  $\mathbf{I}_2$  satisfont  $\mathbf{M}^2 = \lambda \mathbf{I}_2$  et ont une trace nulle.

La matrice d'échantillonnage quincunx est définie par (Vaidyanathan '93)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ici, } \mathbf{M}^2 = 2\mathbf{I}_2 \text{ et } \mathbf{M} \text{ est similaire à } \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'échantillonnage hexagonal est  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Comme  $\mathbf{M}^2 = 4\mathbf{I}_2$ ,  $\lambda = 4$ ,

on obtient que  $\mathbf{M}$  est similaire à  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

## Ensemble de quatre vecteurs invariant

Pour pouvoir appliquer le théorème 3, nous avons besoin d'un ensemble  $\mathbf{X}_n$  tel que  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i^*, \dots, \mathbf{x}_n\}$  génère  $\mathbb{R}^2$  et nous devons aussi exiger que  $\beta$  soit continuellement différentiable. Quand  $\mathbf{X}_n$  est composé de vecteurs non colinéaires, cette dernière condition impose que  $\mathbf{X}_n$  contiennent au moins 4 vecteurs. En effet,  $\beta$  appartient à  $C^r(\mathbb{R}^2)$  avec

$$r = \min \{ \#Y : Y \subset \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_n \setminus Y \neq \mathbb{R}^2 \} - 2,$$

où  $\#Y$  est le cardinal de  $Y$  (DeBoor '82). Nous supposons que  $\mathbf{X}_n$  est composé de 4 vecteurs non colinéaires.  $\mathbf{X}_n$  doit aussi satisfaire la propriété (9). Nous montrons comment, étant donné  $\mathbf{M}$ , on peut définir un tel ensemble de vecteurs.

Comme  $Trace(\mathbf{M}) = 0$ ,  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix}$ , avec  $c, d, e$  entiers.

Si  $c, d, e$  sont non nuls, posons  $\mathbf{x}_1 = [1 \ 0]^T$  and  $\mathbf{x}_2 = [c \ e]^T$ , alors  $\mathbf{M}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  and  $\mathbf{M}\mathbf{x}_2 = -\det(\mathbf{M})\mathbf{x}_1$ . Posons  $\mathbf{x}_3 = [0 \ 1]^T$  et  $\mathbf{x}_4 = [d \ -c]^T$ , il vient  $\mathbf{M}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_4$  et  $\mathbf{M}\mathbf{x}_4 = -\det(\mathbf{M})\mathbf{x}_3$ . Si  $\mathbf{M}$  est la matrice de quincunx,  $c, d, e$  sont non nuls, et un ensemble invariant de vecteurs est  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\} = \{[1 \ 0]^T, [-1 \ 1]^T, [0 \ 1]^T, [1 \ 1]^T\}$ .

Lorsque  $c = 0$  alors  $d$  et  $e$  sont non nuls. Alors  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \{[1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T\}$  est invariant et il en va de même pour  $\{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\} = \{[1 \ 1]^T, [d \ e]^T\}$ .

Quand  $c \neq 0$ ,  $e = 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $\mathbf{M}$  se réécrit  $\begin{pmatrix} -a & d \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , où  $\pm a$  sont les valeurs propres de

$\mathbf{M}$ . On remarque que  $\mathbf{x}_1 = [1 \ 0]^T$  est un vecteur propre de  $\mathbf{M}$  associé à la valeur propre  $-a$ . Ensuite, on voit que  $\mathbf{x}_2 = [d \ -2a]^T$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $a$ .

Maintenant, si  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont des vecteurs propres de  $\mathbf{M}$ , alors

$\{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\} = \{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\}$  est invariant. Un exemple est l'échantillonnage hexagonal pour lequel un ensemble de vecteurs invariant est  $\{[1 \ 0]^T, [1 \ -4]^T, [0 \ 4]^T, [2 \ -4]^T\}$ . Cela conduit à l'ensemble invariant plus simple  $\{[1 \ 0]^T, [1 \ -4]^T, [0 \ 1]^T, [1 \ -2]^T\}$ .

Si  $c \neq 0$ ,  $d = 0$  et  $e \neq 0$ , en faisant le même raisonnement, on obtient que  $\mathbf{x}_1 = [0 \ 1]^T$  and  $\mathbf{x}_2 = [2a \ e]^T$  sont des vecteurs propres de  $\mathbf{M}$ .  $\mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_4$  sont calculé de la même manière.

Finalement, si  $d = e = 0$  alors  $\mathbf{M}$  est diagonal and correspond à un sous échantillonnage régulier de  $\mathbb{Z}^2$ .

# Applications Numériques

On étudie maintenant le comportement de l'approximation des transformées en ondelettes que nous proposons. On considère l'ensemble de vecteur invariant associé à la matrice de quincunx,  $\mathbf{X}_n = \{[1 \ 0]^T, [-1 \ 1]^T, [0 \ 1]^T, [1 \ 1]^T\}$ .

En traitement d'images, il est d'usage de considérer que la première composante d'un vecteur est la coordonnée sur l'axe vertical orienté vers le bas ( $\mathbf{x}_1$  est orienté verticalement).

Pour les conditions de bords, On considère une extension miroir de l'image. Pour une image de taille  $M_1 \times M_2$ , la condition de bord est donnée par :

$$f[\mathbf{k}] = f[\mathbf{l}] \quad k_i + l_i + 1 \pmod{2M_i} = 0 \quad i = 1, 2.$$

# Convergence de l'approximation des transformées en ondelettes pour un échelon horizontal

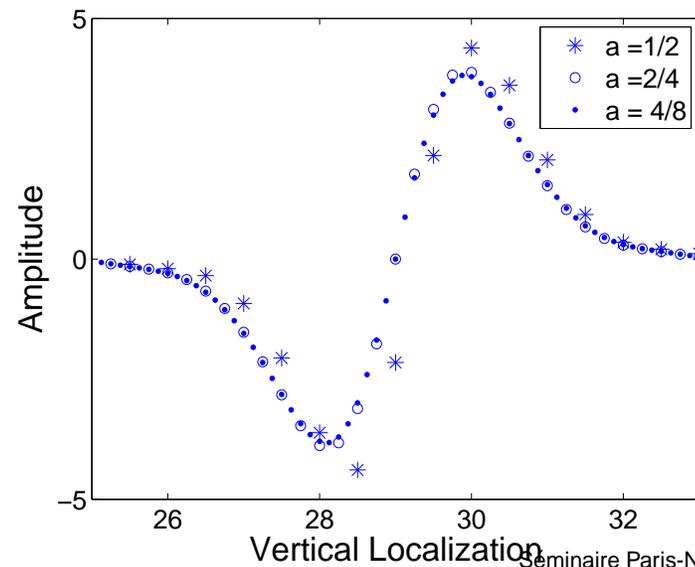
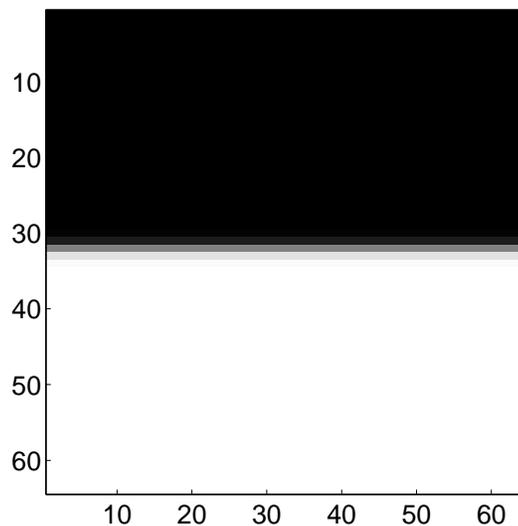
L'ondelette  $\Psi$  que l'on considère ici permet l'analyse de singularités dans la direction définie par  $\mathbf{x}_1$  (i.e. bords horizontaux).

Le filtre  $\alpha$  est défini par la convolution de  $(\tilde{\alpha}_i)_{1 \leq i \leq 4}$  c'est à dire:

$$\alpha = \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2 * \tilde{\alpha}_3 * \tilde{\alpha}_4$$

avec  $\tilde{\alpha}_1[-\mathbf{x}_1] = -1$ ,  $\tilde{\alpha}_1[0] = 2$  et  $\tilde{\alpha}_1[\mathbf{x}_1] = -1$  et, pour  $j > 1$ ,  $\tilde{\alpha}_j[-\mathbf{x}_j] = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_j[0] = 2$  et  $\tilde{\alpha}_j[\mathbf{x}_j] = 1$ .

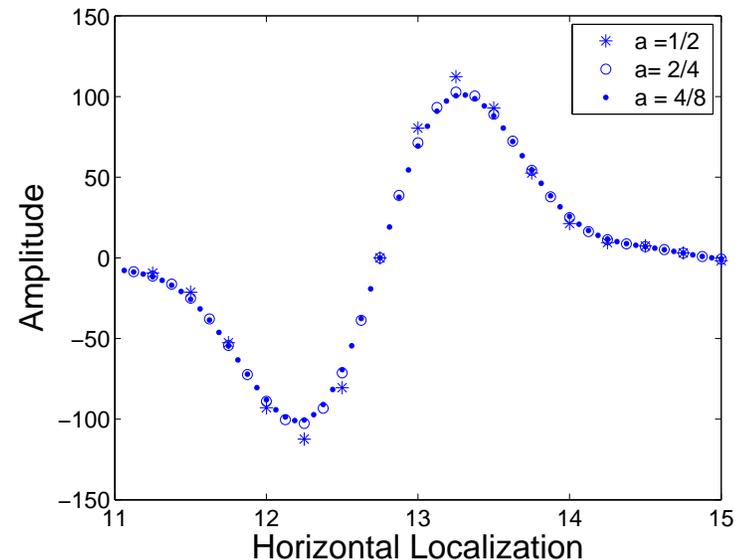
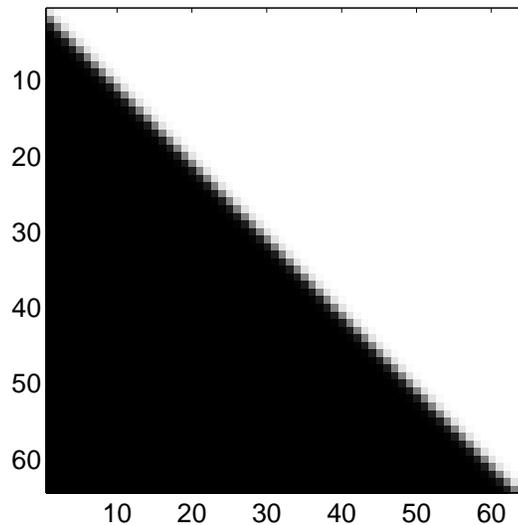
La formule d'approximation proposée permet une approximation sur une grille cartésienne plus fine lorsque  $m_2$  augmente. Considérer  $m \neq 0$  impair, n'a pas d'intérêt ici.



# Convergence de l'approximation de la transformée en ondelettes sur un échelon diagonal

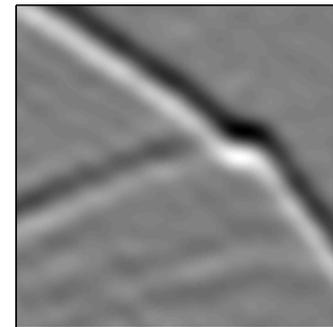
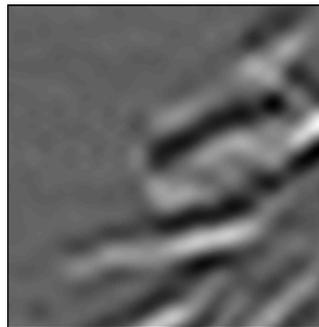
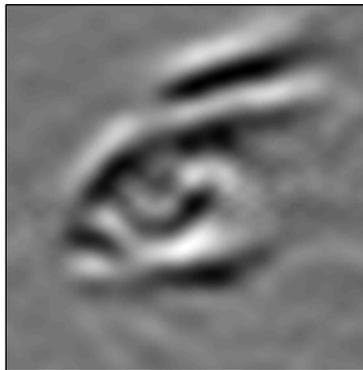
Si on veut analyser des singularités dans la direction définie par  $\mathbf{x}_2$ , on peut utiliser une ondelette définie par une filtre  $\alpha$  construit comme précédemment en prenant cette fois  $\tilde{\alpha}_1[-\mathbf{x}_2] = -1$ ,  $\tilde{\alpha}_1[0] = 2$  et  $\tilde{\alpha}_1[\mathbf{x}_2] = -1$  et, pour  $j \neq 2$ ,  $\tilde{\alpha}_j[-\mathbf{x}_j] = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_j[0] = 2$  et  $\tilde{\alpha}_j[\mathbf{x}_j] = 1$ . Dans un tel cas, calculer l'approximation des coefficients d'ondelettes, pour  $m \neq 0$  impair, conduit à une représentation plus fine dans la direction orthogonale à la singularité.

Comme  $\mathbf{M}^2 = 2\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{M}^{-m}$  est proportionnel à  $\mathbf{M}^{-1}$ , c'est pourquoi seul le cas  $m = 1$  est intéressant. Lorsque  $m = 1$ , l'approximation dans la direction  $\frac{\pi}{4}$  est calculée sur une grille deux fois plus fine que la grille originelle (i.e. avec  $m = 0$ ).



# Un Exemple sur une image naturelle

On regarde le comportement du schéma d'approximation pour l'image de Lenna à l'échelle  $a = \frac{1}{2}$  avec  $m_1 = 4$  et  $m_2 = 8$ . On utilise l'ondelette permettant la détection dans la direction  $\mathbf{x}_1$ .



# Conclusion et Perspectives

- L'approche proposée permet de calculer les coefficients d'ondelettes à des échelles rationnelles sur des grilles non cartésiennes par filtrage discret.
- Il s'agit d'une alternative au calcul classique des coefficients d'ondelettes.
- En terme de perspective, on prévoit l'implémentation en dimension  $s$ .

# References

- [1] T. Asahi, K. Ichige and R. Ishii, *A New Formulation for Discrete Box Splines Reducing Computational Cost and its Evaluation*, IEICE Transactions on Fundamentals, vol. E84-1, no. 3, pp. 884-892, 2001.
- [2] C. K. Chui, *Multivariate Splines*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1988.
- [3] W. Dahmen, C.A. Micchelli, *On the Local Linear Independence of Translates of Box Splines* Studia Math., vol; 82, pp.243-262, 1985.
- [4] C. De Boor, K. Höllig, *B-Splines from parallelepipeds*, J. Analyse Mathématique, vol. 42, pp.99-115, 1982.
- [5] C. De Boor, K. Höllig and S. Riemenschneider, *Box Splines*, Applied Mathematical Sciences 98, Springer, New York, 1993.
- [6] K. Ichige, M. Kamada, *An Approximation for Discrete B-Splines in Time Domain*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 4, no.3, pp. 82-84, 1997.
- [7] S. Malassiotis and M.G. Strintzis, *Optimal Biorthogonal Wavelet Decomposition of Wire-Frame Meshes Using Box Splines, and its Application to the Hierarchical Coding of 3-D Surfaces* IEEE Transactions on Image Processing, vol.8,no.1, pp. 41-57, 1999.

# References

- [8] S. Meignen, *Application of the Convergence of the Control Points of B-Splines to Wavelet Decomposition at Rational Scales and Rational Location*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 1, pp. 29-32, 2005.
- [9] S. Meignen, *Application of the Convergence of the Control Net of Box Splines to the Approximation of Wavelet Transforms*, IEEE Transactions on Image Processing, à paraître, 2007.
- [10] H. Prautsch, W. Boehm, M. Paluszny, *Bézier and B-spline Techniques*, Springer, 2002.
- [11] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, *Fast B-spline Transform for Continuous Image Representation and Interpolation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.13, no.3, pp. 277-285, 1991.
- [12] P.P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Englewood Cliffs,NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [13] Yu-Ping Wang and S.L. Lee, *Scale-Space Derived from B-Splines*, IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 20, no. 10, pp. 1040-1055, 1998.