

## TP 1

### Calcul de Transformées de Fourier sur Scilab

*Utilisation de la FFT*

**Rédaction des TP par binôme ou seul :** 2 séances de TP sont prévues. Le contenu des TP est prévu pour pouvoir être terminé (coté programmation scilab) pendant ces séances qui sont encadrées. Un compte-rendu des TP est à rédiger après la deuxième séance, et à remettre à votre chargé de TD d'analyse (M. Bosson, V. Munnier, T. Oberlin, S. Meignen, ou V. Perrier).

Dans le compte-rendu, doivent être rédigés tous les **exercices** : certains sont théoriques, donc à chercher en dehors des heures encadrées, d'autres sont pratiques et demandent une programmation SCILAB. Vous devez insérer les figures dans votre compte-rendu et apporter un soin particulier aux commentaires des résultats. Ayez l'esprit critique et soignez la présentation (légende pour les courbes, commentaires des courbes dans le texte en référant les figures). Les programmes scilab doivent figurer en ANNEXE (et non pas dans le texte!) : ce rapport n'est pas un rapport technique sur des programmes scilab, mais un rapport de compréhension mathématique sur des résultats obtenus sur ordinateur. Bref : n'hésitez pas à demander des conseils !

Compte tenu du fait que SCILAB a été appris pendant le stage de mathématiques appliquées, nous ne faisons pas de rappel sur ce langage de programmation.

## 1 Séries de Fourier : étude du phénomène de Gibbs

Dans cette partie nous allons étudier la vitesse de convergence de la série de Fourier d'une fonction. En particulier, quand la fonction est discontinue, la série de Fourier "tronquée" présente des oscillations, même pour un nombre de termes important : c'est le phénomène de Gibbs.

**Exercice 1** (*théorique*) Soit la fonction 1-périodique  $f$ , définie sur  $[-1/2, 1/2[$  par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } -1/2 < x < 0 \\ 1 & \text{pour } 0 < x < 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

Calculer la série de Fourier de  $f$  et expliquer en quels points  $x$  la formule ci-dessous est valide :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2(2n+1)\pi x)}{2n+1} \quad (2)$$

**Exercice 2** (*pratique*) Ecrire un programme SCILAB traçant la série de Fourier tronquée de la fonction  $f$  de l'exercice précédent (formule (1)) : en pratique reprendre la formule (2) et calculer la somme partielle des (Ntermes+1)-premiers termes, pour une valeur de Ntermes entrée au clavier :

– `> Ntermes=input('Entrer le nombre de termes')`

Pour la boucle de contrôle :

```
for i=0 :Ntermes
```

```
S= S+ ...
```

```
end
```

Quel phénomène observez-vous sur le graphe ? Comment varie-t-il avec Ntermes ? Que pouvez-vous en conclure sur la convergence de la série de Fourier ?

Tous les termes de votre série sont-ils bien représentés ? En particulier, en combien de points  $x$  calculez-vous la dernière fonction de la somme partielle ? Que vaut-elle en ces points ?

## 2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Dans cette partie on introduit la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un vecteur de  $\mathbb{C}^N$  et on étudie ses principales propriétés.

**Définition** Soit  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  un vecteur de  $\mathbb{C}^N$ . On appelle Transformée de Fourier Discrète de  $X$ , le vecteur  $\hat{X} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1})$  défini par :

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

**Exercice 3** (théorique) Calculer  $\hat{X}$  pour un vecteur  $X$  défini par :

1.  $x_k = 1, x_n = 0, \forall n = 0, \dots, N-1, n \neq k$ .
2.  $x_n = 1, \forall n = 0, \dots, N-1$ .
3. Pour  $k_0$  entier fixé entre 0 et  $N-1$ ,  $x_n = e^{2i\pi \frac{k_0 n}{N}}, \forall n = 0, \dots, N-1$ .

**Exercice 4** (théorique)

1. On suppose dans cette question que  $X$  est **réel** et que  $N$  est un entier pair. Montrer que dans ce cas on a :

1.  $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}$  et  $\hat{x}_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{R}$ .
2.  $\forall k = 0, \dots, N-1, \hat{x}_{N-k} = \overline{\hat{x}_k}$

En déduire une symétrie dans la représentation graphique de la TFD.

**Exercice 5** (théorique)

1. Montrer que pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ , on a (Formule inverse de la TFD) :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{2i\pi \frac{kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

Les  $\hat{x}_k$  étant définis par la formule (3).

2. Montrer que l'on a (Formule de Parseval) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \overline{\hat{y}_k} \quad (5)$$

où  $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1})$  est la TFD de  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  et où  $(\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{N-1})$  est la TFD de  $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ . La transformée de Fourier discrète est programmée dans la fonction scilab "FFT" (pour Fast Fourier Transform (FFT)), qui est un algorithme rapide de calcul des coefficients de la TFD).

**Exercice 6** (pratique)

1. Sur Scilab tapez "help fft" et étudier la documentation.

Appliquer cette commande aux 3 exemples de l'exercice 3 et comparer les résultats.

### 3 Calcul approché de coefficients de Fourier en utilisant la FFT

L'objectif de cette partie est le calcul puis le tracé des coefficients de Fourier, d'un signal. Les coefficients de Fourier d'un signal temporel  $T$ -périodique  $f(t)$ , de carré intégrable, sont définis par :

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi \frac{kt}{T}} dt \quad (6)$$

$t$  est la variable **temps**, exprimée en secondes,  $\frac{k}{T}$  représente la **fréquence**, exprimée en Hertz.

La courbe  $f(t)$  en fonction de  $t$  est la **représentation temporelle** du signal  $f$ , les courbes  $|c_k(f)|$  et  $\arg(c_k(f))$  en fonction de  $\frac{k}{T}$  sont respectivement les représentations fréquentielles (discrètes) en module et en phase du signal  $f$ . Dans le cadre du TP nous tracerons seulement les courbes de modules.

### 3.1 Calcul approché des coefficients de Fourier

Dans la pratique, le calcul des coefficients de Fourier à partir de la formule (6) est impossible car la fonction  $f$  n'est en général connue qu'en un nombre fini de points  $t_n$ , correspondant à un "échantillonnage" du signal  $f$ . On procède alors de la façon suivante :

1. Le signal  $f$  est supposé connu aux valeurs  $(t_n)_{n=0, N-1}$  de l'intervalle  $[0, T[$ , avec :

$$t_n = \frac{nT}{N}$$

2. Le coefficient de Fourier  $c_k(f)$  défini en (6) est approché par la méthode des rectangles pour le calcul de l'intégrale :

$$c_k(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} = \hat{c}_k(f), \quad -\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2} \quad (7)$$

3. La fonction  $f(t)$  est alors approchée par le polynôme trigonométrique  $f_N(t)$  :

$$f_N(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k(f) e^{2i\pi \frac{k}{N} t} \quad (8)$$

En particulier pour les valeurs  $t_n = \frac{nT}{N}$ , on obtient :

$$f_N(t_n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k(f) e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$$

**Exercice 7** (*théorique*) Montrer qu'en prolongeant les vecteurs  $(c_k(f))_{k=-N/2+1, N/2}$  sur  $\mathbb{Z}$  par périodicité de période  $N$ , la formule (7) est à une normalisation près la transformée de Fourier discrète du vecteur  $(f(t_n))_{n=0, N-1}$ .

#### Exercice 8 (*pratique*)

1. Ecrire un programme SCILAB calculant une valeur approchée des coefficients de Fourier de  $f$ , définie à l'exercice 1, à l'aide de la FFT (en déclarant la fonction  $f$  directement par la formule (1)).

2. Tracer sur un même graphe le module des coefficients de Fourier de  $f$  obtenus d'une part par le calcul théorique (en utilisant l'exercice 1), d'autre part par FFT (question 1 de cet exercice). Que remarquez-vous ? Comment interprétez-vous la symétrie artificielle des coefficients obtenus par FFT ?

3. Calculer la norme  $\ell^2$  de la différence (i.e.  $\sqrt{2/N \sum_{k=0}^{N/2-1} (\hat{c}_k(f) - c_k(f))^2}$ ). Comment varie-t-elle avec  $N$ , nombre de points de discrétisation de la fonction  $f$  ? Tracer la courbe de l'erreur en fonction de  $N$  en échelle logarithmique. Quelle loi vérifie-t-elle ?

## 4 Transformée de Fourier de signaux académiques

Soit  $f_0$  une fonction définie sur un intervalle  $[0, T]$ , et nulle en dehors. On souhaite calculer sa transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}$ . On commence par démontrer que le calcul de sa transformée de Fourier en certains points revient à calculer les coefficients de Fourier de  $f_0$  prolongée par périodicité de période  $T$  en dehors de  $[0, T]$ . On est alors ramené à la partie précédente, et on peut utiliser la FFT pour le calcul approché de ces coefficients de Fourier.

#### Exercice 9 (*Rapport entre TF et coefficients de Fourier, théorique*)

Soit  $f_0$  une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$ , nulle en dehors de l'intervalle  $[0, T]$ . Soit  $f$  la fonction "périodisée" de  $f_0$  à la période  $T$  :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(x + nT)$$

1. Vérifier que  $f$  est une fonction périodique de période  $T$ , intégrable sur  $[0, T]$ .
2. Montrer que le coefficient de Fourier de  $f$ , noté  $c_n(f)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), vérifie :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \hat{f}_0\left(\frac{n}{T}\right)$$

où  $\hat{f}_0$  est la transformée de Fourier de la fonction  $f_0$ . Interprétation ? Comment peut-on utiliser la FFT pour calculer  $f_0$  ?

**Exercice 10** Considérer successivement les signaux ci-dessous. On tracera leurs représentations temporelles ( $f_0(x)$  en fonction de  $x$ ) et fréquentielles ( $\hat{f}_0(\nu)$  en fonction de  $\nu$ ). On comparera le résultat calculé par la FFT de SCILAB avec la transformée de Fourier théorique (ou avec les coefficients de Fourier pour les questions 4 et 5).

1. La fonction porte (fonction caractéristique de  $[-1/2, 1/2]$ ) déclarée sur un intervalle plus grand.
2. La fonction triangle.
3. Une Gaussienne.
4. Une sinusoïde de fréquence 50 Hz. Vous devez observer une raie sur la TF, à la bonne fréquence !
5. Une somme de sinusoïdes (constater que la TF est linéaire et que les différentes raies sont aux bonnes fréquences...).

## 5 Utilisation de la convolution discrète

**Exercice 11** (*Rapport entre convolution discrète et transformée de Fourier discrète, théorique*)

Soit  $(f_n)_{n=0, N-1}$  un vecteur de taille  $N$ . On rappelle la formule de sa transformée de Fourier discrète :

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-2i\pi \frac{kn}{N}) \quad , \quad k = 0, N-1$$

On prolonge le signal  $f_n$  par périodisation, i.e. on définit :

$$F_n = f_{n \bmod N} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

On appelle convolution circulaire de deux vecteurs  $f$  et  $g$  de taille  $N$  périodisés :

$$f * g_n = \sum_{p=0}^{N-1} F_p G_{n-p} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. Montrer que  $f * g$  est un vecteur  $N$ -périodique.
2. Montrer que la transformée de Fourier Discrète de  $h = f * g$  vérifie :

$$\hat{h}_k = \hat{f}_k \hat{g}_k$$

**Exercice 12** (*pratique*)

Soit  $f$  un signal de votre choix défini sur  $[0, 1]$  et soit  $f_n = f(\frac{n}{N})$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ . Soit  $g$  définie par  $g_0 = \frac{1}{2}, g_1 = \frac{1}{4}, g_{N-1} = \frac{1}{2}$ , on pose  $h = f * g$ , où  $*$  est la convolution périodique de période  $N$ . Calculer de deux manières différentes  $\hat{h}_k$  (pour cela, on étudiera en détail la commande conv).