TD 3

Formule de Poisson et Théorème d'échantillonnage

Exercice 1 *Formule de Poisson*

1. On considère la série :

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{n^2+b^2} e^{2i\pi nt}$$

Montrer que F est continue

2. Montrer que $\frac{1}{n^2+b^2}$ correspond à l'echantillonnage de la transformée de Fourier d'une certaine fonction f.

3. Appliquer la formule sommatoire de Poisson pour trouver une autre expression de F

4. Calculer alors F explicitement.

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ le signal défini par $\hat{f}(\xi) = (1-|\xi|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(\xi)$.

1. Montrer que $f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}$.

2. En utilisant la formule de Shannon avec $a = \frac{1}{2}$, montrer que

$$\tan x = x - \frac{8x^2}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2(2x-(2k+1)\pi)}$$

Pour $x \in \mathbb{R}\ A$ où $A = \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice 3

Soit f une fonction réelle telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $Supp(\hat{f}) = [f_1, f_2]$ pour $\xi > 0$. On suppose de plus que $2f_1 \geq f_2$.

1. Quelle relation lie $\hat{f}(\xi)$ et $\hat{f}(-\xi)$

2. Que doit a priori vérifier la fréquence d'échantillonnage pour que le théorème de Shannon s'applique?

3. Expliquer alors comment périodiser le signal fréquentiel en utilisant la fréquence d'échantillonnage la plus petite possible.

4. En déduire alors une méthode de reconstruction du signal.