

Traitement d'image avancé

Ensimag 3^{ème} année

S. Meignen

2016/2017

Table des matières

1	La restauration d'images	5
1.1	Restauration d'images : Point de vue continu	5
1.1.1	Restauration d'images filtrées, déconvolution	5
1.1.2	Traitement du bruit : approche par filtrage de Wiener	6
1.2	Filtrage de Wiener Discret	8
1.3	Mise en place des filtres inverse et de Wiener	10
1.3.1	Point de vue matriciel	12
1.4	Deconvolution dans le cas non périodique	14
1.5	Développements récents	17
2	Détection de Contours	19
2.1	Détection de contours : Approches de Marr-Hildreth et de Canny	19
2.2	Calcul des filtres optimaux pour l'estimation des gradients dans l'approche de Canny	21
2.2.1	Détermination du filtre optimal dans le cas monodimensionnel	21
2.3	Le filtre de Deriche	26
2.4	Extension au cas bidimensionnel	26
2.5	Détection de contour par contours actifs	26
2.6	Formulation mathématique	27
2.7	Aspects numériques	29
2.7.1	Formulation en utilisant les différences finies	29
2.7.2	Approche variationnelle	30
3	Equations aux dérivées partielles et traitement d'images	33
3.1	Introduction	33
3.2	Noyau de Lissage et équation de la chaleur	33
3.2.1	Rappel sur le l'équation de la chaleur et le noyaux Gaussien	33
3.2.2	Propriété de l'opérateur de moyennisation	34
3.2.3	Convolution par des noyaux à symétrie radiale normalisés	35
3.3	Equations de diffusion non linéaire	38
3.3.1	Le modèle de Perona et Malik	38
3.3.2	Approche par Minimisation de Tikhonov	39
3.3.3	Le modèle de Mumford-Shah et variantes	41
3.3.4	Approches par courbure moyenne	41
3.3.5	MCM et contours actifs	43
3.3.6	Formulation dans une base d'ondelette du problème de minimisation	43

Chapitre 1

La restauration d'images

La restauration d'image est l'opération qui corrige des images dégradées et reconstruit un signal de bonne qualité à partir d'une image de médiocre qualité.

1.1 Restauration d'images : Point de vue continu

1.1.1 Restauration d'images filtrées, déconvolution

On considère une image $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et une image dégradée $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ reliées par la relation :

$$g = \mathcal{D}(f)$$

où \mathcal{D} est un filtre c'est-à-dire un opérateur :

- linéaire
- spatialement invariant $\mathcal{D}(\tau_a f) = \tau_a \mathcal{D}(f)$
- continue

qui peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution :

$$\tilde{f} = h * f,$$

où $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Vu sous cet angle, la restauration apparaît donc comme une opération de déconvolution. On rappelle que la convolution s'écrit :

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t)h(x-t)dt$$

qui donne par transformée de Fourier :

$$\hat{\tilde{f}}(u) = \hat{f}(u)\hat{h}(u).$$

On peut donc obtenir la transformée de Fourier de f par :

$$\hat{f}(u) = \frac{\hat{\tilde{f}}(u)}{\hat{h}(u)} = \hat{\tilde{f}}(u)W_I(u)$$

puis par transformée de Fourier inverse :

$$f = \tilde{f} * w_I.$$

Le problème est en théorie résolu. Cependant, cette approche ne prend pas en compte le fait que $\hat{h}(u)$ peut être nul. Au point où $\hat{h}(u)$ s'annule, on a aucune information fréquentielle. On peut remplacer $W_I(u)$ par le filtre défini par :

$$W(u) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{d}(u)} & \text{si } \hat{h}(u) \geq \gamma \\ \gamma & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cependant ce filtre est inadapté en présence de bruit.

1.1.2 Traitement du bruit : approche par filtrage de Wiener

On suppose cette fois que l'image est perturbée de la manière suivante :

$$\tilde{f} = f * h + b,$$

avec f et h appartenant à $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, et b est un bruit blanc, de *densité spectrale de puissance* N_0^2 . On notera que par définition le bruit blanc est de moyenne nulle.

Définition 1 *A un processus stochastique continu, correspond une autocorrélation statistique. Dans le cas d'un processus continu $x(t)$, la fonction d'auto-corrélation statistique se définit comme :*

$$R_{x,t}(\tau) = \mathbb{E}[x(t) \cdot x^*(t - \tau)]$$

Pour un signal déterministe, la fonction d'auto-corrélation se définit comme :

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

Un bruit blanc est l'exemple le plus simple de processus stationnaire à l'ordre 2, correspondant à la définition suivante :

Définition 2 *On dit qu'un processus aléatoire est stationnaire au second ordre au sens large ("wide-sense stationary") s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *La moyenne est indépendante de t .*
2. *La fonction d'auto-correlation ne dépend que de τ .*

Dans le cas d'un signal stationnaire au second ordre, on peut donc écrire :

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t) \cdot x^*(t - \tau)],$$

τ est le décalage temporel et l'espérance mathématique se définit à partir de la densité de probabilité. Pour le bruit blanc b , on a

$$R_b(\tau) = \sigma^2 \delta_0.$$

où σ^2 est la variance du bruit et δ_0 un Dirac en 0

Définition 3 *On appelle densité spectrale de puissance Γ_x du processus x la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation.*

- *Pour un signal déterministe on a : $\Gamma_x(u) = |\hat{x}(u)|^2$*
- *Pour un processus stochastique on a : $\Gamma_x(u) = \mathbb{E} [|\hat{x}(u)|^2]$*

Démonstration La démonstration constitue le théorème de Wiener-Kintchine
Dans le cas déterministe :

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)e^{-2i\pi u\tau} dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)e^{-2i\pi u(t+\tau)} d\tau \right) x^*(t)e^{2i\pi ut} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(v)e^{-2i\pi uv} dv \right) x^*(t)e^{2i\pi ut} dt \\
&= \hat{x}(u) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{2i\pi ut} dt = |\hat{x}(u)|^2
\end{aligned}$$

Dans le cas aléatoire, la démonstration est plus compliquée.

Remarque 1 Dans le cas d'un bruit blanc, la fonction d'auto-corrélation est un Dirac mais la définition précédente s'étend et la caractérisation avec les espérances aussi. Dans ce cas on a donc $\Gamma_b = \sigma^2$.

Revenons maintenant au problème de retrouver f à partir de \tilde{f} . Le problème de la déconvolution au sens de Wiener consiste à rechercher une solution de la forme $f_r = f * w_W$, où w_W est supposé appartenir à $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, qui minimise ε , l'espérance de l'erreur quadratique, intégrale entre le signal et son estimée, espérance estimée sur toutes les réalisations du bruit b :

$$\varepsilon = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - f_r(x))^2 dx \right].$$

En appliquant le théorème de Parseval puis Fubini, on obtient :

$$\varepsilon = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(u) - \hat{f}_r(u)|^2 du \right] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E} \left[|\hat{f}(u) - \hat{f}_r(u)|^2 \right] du.$$

L'objectif est alors de minimiser l'espérance à u fixé. On remplace alors $\hat{f}_r(u)$ par $\hat{f}(u)\hat{w}_W(u)$, puis on développe l'espérance. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[|\hat{f}(u) - \hat{f}_r(u)|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[|\hat{f}(u) - \hat{f}(u)\hat{w}_W(u)|^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[|\hat{f}(u) - (\hat{f}(u)\hat{h}(u) + \hat{b}(u))\hat{w}_W(u)|^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[|1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u)|^2 |\hat{f}(u) - \hat{b}(u)\hat{w}_W(u)|^2 \right] \\
&= |1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u)|^2 |\hat{f}(u)|^2 - (1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))\hat{w}_W(u)^* \mathbb{E}[\hat{f}(u)\hat{b}(u)^*] \\
&\quad - (1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))^* \hat{w}_W(u) \mathbb{E}[\hat{f}(u)^*\hat{b}(u)] + |\hat{w}_W(u)|^2 \mathbb{E}[|\hat{b}(u)|^2]
\end{aligned}$$

En utilisant ensuite les propriétés de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E} \left[\hat{f}(u)\hat{b}(u)^* \right] = \hat{f}(u)\mathbb{E} \left[\hat{b}(u)^* \right] = \hat{f}(u) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[b(x)]^* e^{2i\pi ux} dx = 0$$

Comme $\mathbb{E}[|\hat{b}(u)|^2] = N_0^2$, on obtient :

$$\mathbb{E} \left[|\hat{f}(u) - \hat{f}_r(u)|^2 \right] = |1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u)|^2 |\hat{f}(u)|^2 + |\hat{w}_W(u)|^2 N_0^2$$

Différentions alors cette espérance par rapport à $\hat{w}_W(u)$. On peut voir l'application $\hat{w}_W(u) \rightarrow |1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u)|^2 = F(\hat{w}_W(u))$ comme la composée des applications :

$$\hat{w}_W(u) \rightarrow 1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u) \rightarrow |1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u)|^2.$$

Donc, on peut écrire $F(\hat{w}_W(u)) = G(H(\hat{w}_W(u)))$ Si bien que par composition on obtient :

$$\begin{aligned} DF(\hat{w}_W(u)).v &= DG(H(\hat{w}_W(u))).DH(\hat{w}_W(u)).v \\ &= -(1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))\hat{h}(u)^*v^* - \hat{h}(u)v(1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))^* \\ &= -2\Re \left((1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))^*\hat{h}(u)v \right) \end{aligned}$$

Donc finalement la différentielle s'écrit :

$$-2\Re \left[\left((1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))^*\hat{h}(u)|\hat{f}(u)|^2 - 2\hat{w}_W(u)^*N_0^2 \right) v \right]$$

La différentielle est nulle en $w_W(u)$ si $(1 - \hat{w}_W(u)\hat{h}(u))^*\hat{h}(u)|\hat{f}(u)|^2 - 2\hat{w}_W(u)^*N_0^2 = 0$ ce qui correspond à :

$$\hat{w}_W(u) = \frac{\overline{\hat{h}(u)}}{|\hat{h}(u)|^2 + \frac{N_0^2}{|\hat{f}(u)|^2}} = \frac{1}{\hat{h}(u) \left(1 + \frac{N_0^2}{\mathbb{E}[|\hat{f}(u)|^2] - N_0^2} \right)}.$$

L'estimateur de $|\hat{f}(u)|^2$ étant calculé en utilisant l'indépendance du bruit par rapport au signal. En effet, nous avons :

$$\mathbb{E}[|\hat{f}(u)|^2] = |\hat{f}(u)|^2|\hat{h}(u)|^2 + N_0^2.$$

On peut finalement réécrire le filtre de Wiener sous la forme suivante :

$$W_w(u) = \frac{1}{\hat{h}(u)} \frac{\mathbb{E}[|\hat{f}(u)|^2] - N_0^2}{\mathbb{E}[|\hat{f}(u)|^2]}.$$

En l'absence de bruit, on obtient le filtre inverse. Par ailleurs, on doit faire attention au valeur singulière du filtre inverse et on doit procéder comme précédemment.

1.2 Filtrage de Wiener Discret

On part cette fois d'un signal discret :

$$\tilde{f} = f * h + b$$

où $f * h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_{n-k}f_k$, et où b est un bruit blanc, de densité spectrale de puissance N_0^2 .

Comme pour le modèle continu, on recherche un filtre discret (w_n) tel que $f_r = \tilde{f} * w$ soit le plus proche de f au sens de l'espérance suivante :

$$\varepsilon_d = \mathbb{E} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (f_n - (f_r)_n)^2 \right\}$$

Comme dans le cas continu pour un signal discret nous avons les définitions suivantes :

Définition 4 Dans le cas d'un processus discret x_n , la fonction d'auto-corrélation statistique se définit comme :

$$R_x(n, k) = \mathbb{E}[x_k x_{k-n}^*]$$

Pour un signal déterministe, la fonction d'auto-corrélation se définit comme :

$$R_x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} x_k x_{k-n}^*$$

Définition 5 Soit (x_n) un signal discret, on appelle transformée de Fourier à temps discret (DTFT) la fonction :

$$X(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} x_n e^{-2i\pi \langle n, u \rangle} \quad (1.1)$$

La transformée inverse à la DTFT de la fonction 1 périodique $X(u)$ est donnée par :

$$x_n = \int_{[0,1]^2} X(u) e^{-2i\pi \langle u, n \rangle} du \quad (1.2)$$

Remarque 2 Cela correspond directement à la transformée de Fourier au sens des distributions du peigne de Dirac

Un résultat fondamental est alors le suivant

Proposition 1

Si x appartient à $l^2(\mathbb{Z}^2)$ alors $X(u)$ converge dans $L^2([0,1]^2)$ et on a l'égalité (de Parseval) suivante :

$$\|x\|_2 = \|X\|_2 \quad (1.3)$$

Démonstration

$$\|X\|_2^2 = \int_{[0,1]^2} |X(u)|^2 du = \int_{[0,1]^2} |X(u)X^*(u)|^2 du \quad (1.4)$$

$$= \int_{[0,1]^2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} x_n e^{2i\pi un} \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} x_k e^{2i\pi uk} \right)^* du \quad (1.5)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,1]^2} x_n x_k^* e^{2i\pi(n-k)u} du \quad (1.6)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} x_n x_k^* \int_{[0,1]^2} e^{2i\pi(n-k)u} du \quad (1.7)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} x_n x_k^* \delta_{n,k} = \|x\|_2^2 \quad (1.8)$$

On peut alors définir :

Définition 6 On appelle densité spectrale de puissance Γ_x du processus x la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation.

- Pour un signal déterministe on a : $\Gamma_x(u) = |X(u)|^2$
- Pour un processus stochastique on a : $\Gamma_x(u) = \mathbb{E} [|X(u)|^2]$

Démonstration Dans le cas déterministe, la démonstration est identique au cas continu, la démonstration est plus difficile dans le cas aléatoire.

Définition 7 On dit qu'un processus stochastique discret est stationnaire au second ordre au sens large ("wide-sense stationary") s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\mathbb{E}[x_n]$ est indépendante de n .
2. La fonction d'auto-correlation $R_x(n, k)$ ne dépend que de k .

Remarque 3 Dans le cas d'un bruit blanc, on a $R_x(n, k) = \sigma^2 \delta_{0,k}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Dans ce cas, on obtient $\Gamma_x(u) = \sigma^2$.

Revenons alors à :

$$\varepsilon_d = \mathbb{E} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (f_n - (f_r)_n)^2 \right] \quad (1.9)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^2} |F(u) - F_r(u)|^2 du \right] \quad (1.10)$$

$$= \int_{[0,1]^2} \mathbb{E} [|F(u) - F_r(u)|^2] du \quad (1.11)$$

Les relations liant TFTD et convolution sont les mêmes que dans le cas continu, donc

$$F_r(u) = \tilde{F}(u)W(u) = (F(u)H(u) + B(u))W(u)$$

Donc en faisant, exactement le même raisonnement que dans le cas continu on obtient que :

$$W_w(u) = \frac{1}{H(u)} \frac{\mathbb{E} [|\tilde{F}(u)|^2] - N_0^2}{\mathbb{E} [|\tilde{F}(u)|^2]}.$$

1.3 Mise en place des filtres inverse et de Wiener

Les calculs précédents supposent que les images sont de taille infinies ce qui n'est évidemment pas raisonnable. Dans le cas de l'analyse d'image, on fait communément l'hypothèse que les signaux sont périodiques de période la taille de l'image ce qui permet de remplacer le problème de déconvolution sur \mathbb{Z}^2 en un problème de déconvolution sur un problème de taille fini.

Définition 8 La convolution circulaire entre les séquences h et x de taille (N, N) et périodisées est définie par :

$$(h \star f)_n = \sum_{0 \leq k_1, k_2 \leq N-1} f_k h_{n \bmod (N, N) - k} = \sum_{0 \leq k_1, k_2 \leq N-1} f_{(n \bmod (N, N) - k)} h_k \quad (1.12)$$

Remarque 4 Cette séquence est elle-même périodique de période (N, N) .

Pour étudier les propriétés de la convolution circulaire, nous nous plaçons dans le cas unidimensionnel.

Proposition 2

soit f et h deux signaux unidimensionnel de taille N et supposons que h a comme support $\{0, \dots, N-1\}$ et qu'on le périodise en $h_{N,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-kN}$ alors on a la propriété suivante :

$$(h * f)_n = (h_N \star f)_n$$

Démonstration Exercice

Proposition 3

La convolution et la convolution circulaire entre une séquence de taille M et une sequence de taille L sont equivalente lorsque la période N de la convolution circulaire satisfait : $N \geq L + M - 1$

Exemple : considérer un signal de taille 4 et un filtre de taille 3 et montrer que l'on peut écrire la convolution sous la forme d'une convolution circulaire.

Cependant, un des paradigmes de la restauration d'image est que l'image observée est de même taille que l'image que l'on cherche à reconstruire, donc si l'image n'est pas périodique on ne peut pas calculer exactement la convolution.

En résumé, on cherche donc à retrouver l'image f , supposée périodique, en supposant l'écriture suivante pour \tilde{f} :

$$\tilde{f} = f \star h_N + b \quad (1.13)$$

Sous ces hypothèses, l'outil pour la restauration d'image est la transformée de Fourier discrète (TFD) :

Définition 9 La transformée de Fourier discrète de la séquence bidimensionnelle x_n de taille (N_1, N_2) est définie par :

$$X_k = \sum_{\substack{0 \leq n_1 \leq N_1 - 1 \\ 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1}} x_{n_1, n_2} e^{-\frac{2i\pi n_1 k_1}{N_1}} e^{-\frac{2i\pi n_2 k_2}{N_2}} \quad (1.14)$$

et sa transformée discrète inverse est égale à :

$$x_n = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq N_1 - 1 \\ 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1}} X_k e^{\frac{2i\pi n_1 k_1}{N_1}} e^{\frac{2i\pi n_2 k_2}{N_2}} \quad (1.15)$$

Proposition 4

La TFD vérifie la propriété suivante :

$$(f \star h)_n \xrightarrow{TFD} F_k H_k$$

Donc on calcule le filtre de Wiener dans ce cas en remplaçant la transformée de Fourier à temps discret par la TFD.

Dans ce contexte de périodisation des signaux, on peut écrire les filtres inverse et de Wiener en utilisant la FFT. Typiquement, pour le filtre inverse on aura une écriture du type (en supposant que le support initial de h est $\{-m, \dots, m\}$, on élimine les valeurs singulières dans le filtre H à l'aide du paramètre n) :

```
G = fft(g);
hper = zeros(1,N);
hper(1:m+1) = h(m+1:2*m+1);
hper(N-m+1:N) = h(1:m);
H = fft(hper);
Hind = find(abs(H) < n );
H(Hind) = n ;
HInv = ones(1,N)./H;
```

Le même algorithme peut être écrit en dimension 2. Pour ce qui est du filtre de Wiener, nous pouvons écrire (SpG est la densité spectrale de puissance de G) :

```
SpG = abs(G).^2/N;
W = Hinv.*(SpG - N_0^2)./SpG;
```

Notons pour terminer que l'espérance est en pratique calculée comme une moyenne temporelle (ou spatiale en dimension 2), ce qui nécessite de supposer que les processus étudiés sont ergodiques.

1.3.1 Point de vue matriciel

La convolution unidimensionnelle s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-m} \\ f_{-m+1} \\ f_{-1} \\ f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ \vdots \\ f_{N+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'hypothèse de périodicité sur f on est ramené à :

$$\begin{pmatrix} h_0 & \cdots & h_{-m} & 0 & \cdots & 0 & h_m & \cdots & h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & \ddots & h_m \\ 0 & \ddots & \ddots & h_0 & \ddots & h_{-m} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ h_{-m} & \ddots & h_{-m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{-1} & \cdots & h_{-m} & 0 & \cdots & 0 & h_m & \cdots & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de convolution est une matrice circulante. Les propriétés de la TFD relativement à convolution circulaire proviennent directement du fait qu'une base de Fourier discrète diagonalise les matrices circulantes.

Définition 10 Une matrice circulante est une matrice carrée dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire (décalage vers la droite) des coefficients

Une matrice circulante de taille N est donc de la forme

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & & c_{N-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients c_i sont des complexes.

Pour alléger les notations, on désigne par $C(c_0, \dots, c_{N-1})$ la matrice circulante précédente :

En notant

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = C(0, 1, 0, \dots, 0),$$

on peut constater que toute matrice circulante est un polynôme en J

$$C(c_0, \dots, c_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j J^j = P_C(J)$$

Réciproquement, comme J^N est la matrice identité, tout polynôme en J est une matrice circulante. Ainsi la somme, le produit de matrices circulantes sont circulantes, et un tel produit est commutatif. L'ensemble des matrices circulantes n'est autre que l'algèbre commutative des polynômes en J .

La matrice J , vérifiant $J^N = I$, est diagonalisable sur \mathbb{C} avec pour valeurs propres des racines n -ièmes de l'unité.

On appelle donc $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, racine primitive de l'unité. On vérifie alors sans peine que pour tout k :

$$V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(N-1)k} \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de J associé à la valeur propre ω_k .

On a donc exhibé, pour k allant de 0 à $N - 1$, une famille de N vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, soit une base propre pour J . Par conséquent, c'est aussi une base propre aussi pour tout polynôme en J , c'est-à-dire toute matrice circulante. Les valeurs propres de $C(c_0, \dots, c_{N-1})$ sont donc les

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \omega^{kj}.$$

On peut prendre, pour matrice de passage de la base canonique à la base propre, la matrice

$$U = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice U est unitaire ($U^*U = I$) et les formules de passage précédentes s'écrivent, en notant Λ la matrice diagonale de coefficients les valeurs propres

$$C = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^* \quad \Lambda = U^{-1}CU = U^*CU.$$

Repartons du système initial : $HF = G$, Alors on obtient $U\Lambda U^*F = G \Leftrightarrow \Lambda U^*F = U^*G$. Or comme U^*F est le vecteur de la TFD de f (à un facteur \sqrt{N} près) et que sur la diagonale de Λ se trouve les coefficients de la TFD de h , on retrouve la propriété liant convolution circulaire et TFD.

La résolution du problème de déconvolution est bien plus rapide en utilisant la TFD que l'élimination de Gauss-Jordan, et l'est d'autant plus si l'on a recours à la transformée de Fourier rapide.

1.4 Déconvolution dans le cas non périodique

En guise d'introduction revenons sur le problème de la déconvolution unidimensionnelle. Le problème de la déconvolution est de retrouver le vecteur $f = {}^T(f_0, \dots, f_{N-1})$ en connaissant le filtre h que

l'on suppose symétrique. Le problème est donc le suivant :

$$\begin{pmatrix} h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-m} \\ f_{-m+1} \\ f_{-1} \\ f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ \vdots \\ f_{N+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}.$$

Le problème ainsi posé n'a pas de solution.

Considérons maintenant le cas de la déconvolution dans le cas bidimensionnel. On suppose maintenant que \tilde{f} , l'image dégradée, est de taille $N \times M$ et l'on considère les images comme des signaux monodimensionnels, en associant à \tilde{f} le vecteur \tilde{f}_v selon :

$$\tilde{f}(i, j) = \tilde{f}_v(iM + j), \quad 0 \leq i \leq N - 1, \quad 0 \leq j \leq M - 1.$$

On suppose que h est à support $\{-m, m\} \times \{-m, m\}$. Le calcul de \tilde{f} nécessite la connaissance de f sur $\{-m, \dots, N + m - 1\} \times \{-m, \dots, M + m - 1\}$ et l'on peut associer à f le vecteur f_v selon :

$$f(k, l) = f_v((k + m)(M + 2m) + l + m) \quad -m \leq k \leq N - 1 + m \quad -m \leq l \leq M - 1 + m.$$

Alors le produit de convolution :

$$\tilde{f}(i, j) = \sum_{k=-m}^{N+m-1} \sum_{l=-m}^{M+m-1} h(i - k, j - l) f(k, l)$$

devient

$$\tilde{f}_v(iM + j) = \sum_{k=-m}^{N-1+m} \sum_{l=-m}^{M-1+m} h(i - k, j - l) f_v((k + m)(M + 2m) + l + m),$$

ou encore

$$\tilde{f}_v(iM + j) = \sum_{k=0}^{N+2m-1} \sum_{l=0}^{M+2m-1} h(i - k + m, j - l + m) f_v(k(M + 2m) + l)$$

L'équation de convolution devient alors :

$$\tilde{f}_v = S \cdot f_v$$

Nous allons montrer que S est une matrice Toeplitz-bloc-Toeplitz. En effet, nous pouvons par ailleurs écrire :

$$\tilde{f}_v(p) = \sum_{\nu=0}^{(N+2m)(M+2m)-1} S(p, \nu) f_v(\nu).$$

En posant $\nu = k(M + 2m) + l$, on obtient

$$\tilde{f}_v(p) = \sum_{k=1}^{N+2m} \sum_{l=1}^{M+2m} S(p, k(M + 2m) + l) f_v(k(M + 2m) + l)$$

Par identification, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S(iM + j, k(M + 2m) + l) &= h(i - k + m, j - l + m) \\ \forall (i, l, j, k) &\in \{0, \dots, N - 1\} \times \{0, \dots, M + 2m - 1\} \times \{0, \dots, M - 1\} \times \{0, \dots, N + 2m - 1\} \end{aligned}$$

Démontrons que S est Toeplitz-bloc-Toeplitz. Prenons la notation suivante $\tilde{S}_{i,k}$ est de taille $M \times (M + 2m)$ et est appelé bloc dans la matrice S . Les blocs $\tilde{S}_{i,k}$ lorsque k varie permettent de reconstruire la i ème ligne de g . Montrer que S est Toeplitz-bloc-Toeplitz revient à montrer que, partout où c'est défini :

$$\begin{cases} \tilde{S}_{i,k}(j, l) &= \tilde{S}_{i,k}(j - 1, l - 1) \text{ (chaque bloc de } S \text{ est Toeplitz)} \\ \tilde{S}_{i,k} &= \tilde{S}_{i-1, k-1} \text{ (} S \text{ est Toeplitz par bloc)} \end{cases}$$

Démontrons que chaque bloc est Toeplitz :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{i,k}(j - 1, l - 1) &= S(iM + j - 1, k(M + 2m) + l - 1) \\ &= h(i - k + m, j - l + m) \\ &= S(iM + j, k(M + 2m) + l) \\ &= \tilde{S}_{i,k}(j, l) \end{aligned}$$

Démontrons que S est Toeplitz par blocs :

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_{i-1, k-1} = \tilde{S}_{i,k} \\ \Leftrightarrow S((i - 1)M + j, (k - 1)(M + 2m) + l) &= S(iM + j, k(M + 2m) + l) \\ \Leftrightarrow h((i - 1) - (k - 1) + m, j - l + m) &= h(i - k + m, j - l + m). \end{aligned}$$

On cherche à trouver une matrice K telle que $f_v = K\tilde{f}_v$, c'est à dire à modifier la matrice S de sorte à la rendre inversible.

Premier type d'hypothèses sur f :

On peut supposer que f est nul en dehors du support de \tilde{f} . Cela permet de ramener la matrice S à une matrice Toeplitz-bloc-Toeplitz de taille $MN \times MN$. Dans ce cas, la diagonalisation de la matrice S utilise le théorème de décomposition en valeurs singulières, que nous rappelons maintenant :

Théorème 1 *Toute matrice H de dimension $N \times M$ pour laquelle le nombre de lignes est supérieur ou égal au nombre de colonnes M peut s'écrire sous la forme du produit d'une matrice orthonormée V de dimension $N \times N$, une matrice diagonale de taille $N \times M$ dont les éléments sont positifs ou nuls et de la transposée d'une matrice orthonormée U de dimension $M \times M$:*

$$H = V\Lambda^{\frac{1}{2}}U^T$$

Dans notre cas, la matrice S est carrée. Supposons que dans la formule précédente, les valeurs propres sont classées par ordre décroissant, alors une façon d'obtenir une valeur approchée de H^{-1} consiste à considérer $H_{tronc}^{-1} = U_{tronc}\Lambda_{tronc}^{-\frac{1}{2}}V_{tronc}^T$, où V_{tronc}^T s'obtient en gardant les R premières lignes de V^T , U_{tronc} s'obtient en gardant les R premières colonnes de U . Les petites valeurs singulières sont plus sensibles au bruit, il apparait donc intéressante de tronquer la suite de valeurs

singulières : la difficulté étant de déterminer la valeur de troncature optimale.

deuxième type d'hypothèses sur f :

L'image est considérée symétrique par rapport aux bords définis par le support de g . Cette symétrie est aussi bien de haut en bas que de droite à gauche. Une valeur à l'extérieur est égale à sa valeur symétrique.

L'hypothèse de symétrie est une autre manière de rendre la diagonalisation de la matrice H simple. Car avec une telle hypothèse H Toeplitz-plus-Hankel, qui est une matrice diagonalisable par utilisation de la matrice cosinus discrète C ayant pour éléments C_{ij} où i et j désignent respectivement la ligne et la colonne, avec :

$$C_{ij} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{i,1}}{M}} \cos\left(\frac{(i-1)(2j-1)\pi}{2M}\right) \text{ avec } 1 \leq i, j \leq M$$

où $\delta_{i,1}$ est le delta de Kronecker.

H peut-être décomposée en la somme de deux matrices de Toeplitz et de Hankel :

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & \cdots & H_m & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ H_m & & H_0 & & H_m \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & H_m & \cdots & H_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 & \cdots & H_{m-1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ H_{m-1} & & & & H_{m-1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & H_{m-1} & \cdots & H_1 \end{pmatrix}.$$

Où chaque sous-matrice H_i donnée par la formule suivante :

$$H_i = (0|T_i^l)J + T_i + (T_i^r|0)J$$

où J est une matrice carrée de dimension N ayant des 1 sur la diagonale secondaire et des zéros ailleurs. Chaque matrice H_i peut être diagonalisée par la matrice C :

$$H_i = {}^t C \hat{\Lambda}_i C.$$

Le calcul des valeurs propres se fait de la même manière que pour une matrice circulante :

$$[\Lambda_i]_{jj} = \frac{(CH_i e_1)_j}{(C e_1)_j}$$

La matrice H est diagonalisable par la matrice résultante du produit de Kronecker entre deux matrices C , et on peut procéder comme précédemment.

1.5 Développements récents

Bien que le filtre de Wiener assure un compromis optimal entre deconvolution et débruitage, quand le filtre admet des valeurs singulières, le filtre de Wiener amplifie le bruit. Ceci suggère d'ajouter une étape de débruitage de façon à enlever le bruit amplifié. Pour ce faire on peut ajouter en sortie du filtre de Wiener une étape de débruitage performante par exemple en utilisant les ondelettes. De nombreux autres développements ont été proposés autour de ce thème.

Chapitre 2

Détection de Contours

2.1 Détection de contours : Approches de Marr-Hildreth et de Canny

Une définition simple d'un contour consiste à considérer celui-ci comme une courbe fermée de part et d'autre de laquelle l'intensité de niveau de gris varie fortement. Une caractérisation simple des contours consisterait en les lieux où gradient de niveau de gris de l'image (notée u dans la suite) est fort. Cette définition des contours pose deux problèmes :

- a) les zones de fort gradient de niveau de gris correspondent à des régions et non à des contours fermés.
- b) de forts gradients sont observés en des points ne correspondant pas à des structures intéressantes. Ces forts gradients sont notamment dus à du bruit.

Pour éliminer les points de fort gradient correspondant à du bruit, on effectue classiquement un lissage de l'image à une échelle caractéristique liée au niveau de bruit observé dans l'image. En général, cette étape est effectuée par convolution avec des Gaussiennes.

Pour partiellement résoudre le point a) plusieurs approches sont possibles. La première approche dite de Marr-Hildreth consiste à considérer les lieux où la dérivée seconde s'annule. En 2D, on définit alors les contours comme les points d'annulation du Laplacien. Une seconde approche, dite approche de Canny, consiste à chercher les lieux des maxima locaux du module du gradient dans la direction du gradient. En termes mathématiques, cela revient à considérer une fonction g définie par :

$$g(t) = \|\nabla u(x + t\nabla u(x))\|,$$

puis à calculer les points x tels que $g'(0) = 0$. Pour voir à quoi est égale cette dérivée, remarquons que $g = d(h(c(t)))$ avec $c(t) = x + t\nabla u(x)$ et $h(x) = \nabla u(x)$ et $d(x) = \|x\|$. En rappelant la formule de différentiation d'une fonction composée, on obtient :

$$\begin{aligned} g'(t) &= d'(h(c(t))).h'(c(t)).c'(t) \\ &= \frac{\langle h(c(t)), h'(c(t)).c'(t) \rangle}{\|h(c(t))\|} \\ &= \frac{\langle \nabla u(x + t\nabla u(x)), D^2u(x + t\nabla u(x))\nabla u(x) \rangle}{\|\nabla u(x + t\nabla u(x))\|} \end{aligned}$$

On obtient que :

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow D^2u\left(\frac{\nabla u(x)}{\|\nabla u(x)\|}, \frac{\nabla u(x)}{\|\nabla u(x)\|}\right) = 0$$

Nous proposons alors deux implémentations pour les détecteurs de Marr-Hildreth et de Canny :

Algo 1 (Marr-Hildreth) :

- Convoluer u_0 (l'image initiale) avec un noyau Gaussien de taille croissante
- A chaque échelle, repérer les points correspondant à $\|\nabla u\| \neq 0$ et Δu change de signe.

L'opérateur de Marr-Hildreth correspond à la recherche des zéros du Laplacien de l'image préalablement convoluée avec une Gaussienne. On définit donc $b(x, y) = \Delta(u * g(x, y))$. Cela revient à appliquer directement sur l'image l'opérateur laplacien d'une Gaussienne Δg qui peut être valablement approché par la différence de deux Gaussiennes (DoG). En effet, pour le cas unidimensionnel, l'opérateur DoG s'écrit :

$$DoG(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{1}{\sigma_i} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}}$$

En posant $\sigma_i = \sigma + \delta\sigma$ on peut écrire :

$$DoG(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{1}{\sigma + \delta\sigma} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma + \delta\sigma)^2}}$$

En différentiant par rapport à σ , il vient que :

$$\begin{aligned} DoG(x) &\approx \delta\sigma \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{x^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ &= \sigma \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Cet opérateur s'étend naturellement en dimension 2 suivant :

$$DoG(x, y) = \frac{1}{(\sigma + \delta\sigma)^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(\sigma + \delta\sigma)^2}} - \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

un développement à l'ordre 1 en σ nous donne :

$$\begin{aligned} DoG(x, y) &= \delta\sigma \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \right) \\ &= \delta\sigma \left(-\frac{1}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^3} \right) \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

De même si on dérive deux fois la Gaussienne par rapport à x on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) = \frac{1}{\sigma^2} \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Le résultat étant analogue si l'on dérive deux fois par rapport à y , on obtient finalement :

$$\frac{1}{\sigma\delta\sigma} DoG(x, y) \approx \Delta g(x, y)$$

L'intérêt de cette formulation est de permettre un calcul très rapide d'une approximation du Laplacien de l'image lissée en considérant la différence de deux images lissées avec des noyaux Gaussiens de variance voisine.

Algo 2 (Canny [2]) :

2.2. CALCUL DES FILTRES OPTIMAUX POUR L'ESTIMATION DES GRADIENTS DANS L'APPROCHE DE CANNY

- Convoluer u_0 avec un noyau Gaussien de taille croissante
- A chaque échelle trouver les points x où $\|\nabla u(x)\| \neq 0$ et $D^2u(\frac{\nabla u(x)}{\|\nabla u\|}, \frac{\nabla u(x)}{\|\nabla u(x)\|})(x)$ passe par zéro.
- Pour chaque échelle t , parmi les points précédemment sélectionnés, ne retenir que ceux satisfaisant $\|\nabla u(x)\| > \theta(t)$.

Remarques :

1. une implémentation simple consiste à utiliser les différences finies pour le calcul du gradient (mais on peut avoir des approches plus sophistiquées).
2. les calculs des dérivées secondes de u sont toujours possible car u est C^∞ si u_0 est bornée.

En pratique, l'implémentation la plus commune consiste néanmoins à revenir à la définition des bords, c'est à dire à chercher les lieux de maxima de la norme du gradient dans la direction du gradient. Pour ce faire, on procède comme suit : étant donné un noyau de lissage $\Lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le gradient de l'image lissée par :

$$\nabla u * \Lambda = \begin{pmatrix} f * \frac{\partial}{\partial x} \Lambda \\ f * \frac{\partial}{\partial y} \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x u \\ W_y u \end{pmatrix}$$

On calcule alors $Mf = \sqrt{|W_x u|^2 + |W_y u|^2}$ et l'orientation du gradient par :

$$Af = \begin{cases} \alpha(u)si & W_x f \geq 0 \\ \pi - \alpha(u)si & W_x f < 0 \end{cases}$$

Pour trouver les points de contours, on regarde en chaque pixel de l'image, si le module est maximal dans la direction du gradient en considérant l'approximation suivante :

- Si $Af \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ (modulo π), on regarde les voisins en $(x+1, y)$ et $(x-1, y)$.
- Si $Af \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ (modulo π), on regarde les voisins en $(x+1, y+1)$ et $(x-1, y-1)$.
- Si $Af \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}[$ (modulo π), on regarde les voisins en $(x, y+1)$ et $(x, y-1)$.

On chaîne ensuite les points obtenus en considérant la direction orthogonale au gradient local, et on élimine les chaînes de taille trop petites.

2.2 Calcul des filtres optimaux pour l'estimation des gradients dans l'approche de Canny

L'approche de détection des contours proposée par Canny se fonde sur les gradients de l'image. Le calcul des gradients de l'image se fait grâce à des filtres qui doivent avoir certaines propriétés pour garantir un bon résultat numérique. Ces propriétés introduites par Canny [2] et souvent reprises par la suite sont au nombre de 3 :

1. Garantir une **bonne détection**, i.e. une réponse forte même à de faibles contours.
2. Garantir une **bonne localisation**.
3. Assurer que pour un contour, il y aura une seule détection (i.e. une faible multiplicité des maxima liés au bruit).

2.2.1 Détermination du filtre optimal dans le cas monodimensionnel

Ces trois critères permettent de définir le filtre optimal pour la détection d'une marche d'escalier sous l'hypothèse d'un bruit additif indépendant du signal. Si l'on suppose que le filtre a une réponse

impulsionnelle $h(x)$. Le signal considéré est un signal monodimensionnel représentant un saut d'amplitude U_0 noyé dans un bruit blanc stationnaire $N(x)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance N_0^2 :

$$A(x) = U_0 Y(x) + N(x)$$

où Y est la fonction de Heavyside. Le signal de sortie est donné par : $C(x) = A * h(x)$ tel que $C(x)$ soit maximum au point $x = 0$, en respectant les trois contraintes énoncées précédemment.

En supposant que le bruit est stationnaire à l'ordre 2, c'est à dire :

$$R_{NN}(x_1, x_2) = R_{NN}(\tau) = \mathbb{E} [N(x + \tau)N(x)^*]$$

avec $x_1 - x_2 = \tau$ il s'ensuit que $R_{NN}(0) = \mathbb{E} [|N(x)|^2]$. Si on considère le signal, $I = N * h$, celui-ci est aussi stationnaire à l'ordre 2. On peut donc écrire $\mathbb{E} [|I(x)|^2] = R_{II}(0)$. En utilisant les relations liant transformée de Fourier et convolution, on obtient :

$$|\hat{I}(u)|^2 = |\hat{h}(u)|^2 |\hat{N}(u)|^2.$$

On rappelle que $\mathbb{E} [|\hat{I}(u)|^2]$ est la densité spectrale de puissance de I , qui est aussi la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, i.e. :

$$\mathbb{E} [|\hat{I}(u)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{II}(\tau) \exp(-2i\pi u\tau) d\tau$$

Donc par transformée de Fourier inverse :

$$\mathbb{E} [|I(x)|^2] = R_{II}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} [|\hat{h}(u)|^2 |\hat{N}(u)|^2] = N_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(u)|^2.$$

Le **critère de bonne détection** s'exprime alors à l'aide du rapport signal sur bruit (RSB) défini comme le maximum du rapport de la réponse due au signal seul sur la racine carrée de la puissance du bruit, soit :

$$RSB = \frac{U_0 \int_0^{+\infty} h(x-t) dt}{\left(\mathbb{E} \left[\left| \int_{-\infty}^{+\infty} N(t) h(x-t) \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{U_0 \int_0^{+\infty} h(x-t) dt}{N_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Afin d'obtenir une réponse nulle pour un signal d'entrée constant h est choisie impaire. On peut donc écrire :

$$RSB = \frac{U_0 \int_{-\infty}^0 h(t) dt}{N_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{U_0}{N_0} \sum$$

Le **critère de bonne localisation** est mesuré par l'inverse de la variance de la distance entre le maximum de la réponse et la position réelle de la transition (il faudra donc le rendre maximum). Pour le calculer, on cherche à exprimer $E [x_0^2]$, x_0 étant la position calculée de la transition. Cette position x_0 correspond au maximum du signal de sortie, donc à un passage par 0 de sa dérivée première puisque le filtre étudié est un dérivateur. Nous avons donc :

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} (A * h)(x_0) = A * h'(x_0)$$

2.2. CALCUL DES FILTRES OPTIMAUX POUR L'ESTIMATION DES GRADIENTS DANS L'APPROCHE DE C

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x}(x_0) &= U_0 Y * h'(x_0) + N * h'(x_0) \\ &= U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x_0 - t)h'(t)dt + N * h'(x_0) \\ &= U_0 \int_{-\infty}^{x_0} h'(t)dt + N * h'(x_0) \\ &= U_0 h(x_0) + N * h'(x_0)\end{aligned}$$

Ensuite, on exprime le développement limité de la fonction h impaire et continue au voisinage de $x = 0$:

$$h(x_0) = h(0) + x_0 h'(0) \approx x_0 h'(0) \text{ comme } h(0) = 0.$$

On en déduit donc :

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x_0) \approx U_0 x_0 h'(0) + N * h'(x_0) = 0.$$

Donc en considérant les espérances,

$$\mathbb{E} [|U_0 x_0 h'(0)|^2] = \mathbb{E} [|N * h'(x_0)|^2],$$

l'expression se réécrit :

$$U_0^2 h'(0)^2 \mathbb{E} [x_0^2] \approx N_0^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(t) dt \right)$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E} [x_0^2] \approx \frac{N_0^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(t) dt \right)}{U_0^2 h'^2(0)}.$$

Le **critère de bonne localisation** est la racine carrée de l'inverse de l'expression ci-dessus :

$$\frac{U_0}{N_0} \Delta = \frac{U_0 |h'(0)|}{N_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le produit $\sum \Delta$ est un critère qui combine une bonne détection et une bonne localisation. Il ne dépend pas du facteur d'échelle K . Pour démontrer cette dernière propriété, on pose $h_K(x) = h\left(\frac{x}{K}\right)$ et on obtient :

$$\sum_K = \sqrt{K} \sum \text{ et } \Delta_K = \frac{1}{\sqrt{K}} \Delta$$

d'où $\sum_K \Delta_K = \sum \Delta$.

Pour l'optimisation, Canny propose de maximiser le produit $\sum \Delta$ en utilisant une troisième contrainte qui est la minimisation de la densité des maxima liés à au bruit (hypothèse c)). En effet, le bruit crée autour des maxima liés au contour toute une série de maxima locaux qu'il s'agit d'éliminer. On connaît une expression de la densité d_0 de passages par zéro de la réponse due au bruit. Pour un processus Gaussien $B(x)$ de moyenne nulle, on démontre que :

$$d_0 = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{R''_{BB}(0)}{R_{BB}(0)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $B(x) = N * h(x)$, où $N(x)$ est un bruit blanc Gaussien, nous avons :

$$R_{BB}(0) = N_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt.$$

Compte tenu de la relation $R_{B'B'}(\tau) = -R''_{BB}(\tau)$, nous pouvons écrire :

$$R''_{BB}(0) = -N_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(t) dt.$$

Nous nous intéressons aux transitions du signal d'entrée qui correspondent aux extrema du signal de sortie du filtre dérivateur du signal étudié. Ces extrema sont aussi les passages par zéro de la dérivée seconde du signal d'entrée, donc de la dérivée du signal de sortie. On exploite la formule précédente en remplaçant $B(x)$ par $B'(x)$, pour obtenir :

$$d_0 = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} h''^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(t) dt} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on pose $x_{moy} = \frac{1}{d_0}$.

Canny choisit de prendre un filtre à réponse impulsionnelle finie de taille M . Ceci revient à remplacer les bornes infinies par $-M$ et M . Ensuite, il impose comme troisième contrainte que la distance x_{max} entre deux maxima consécutifs de la réponse due au bruit seul soit égale à une fraction de M , de façon à contrôler le nombre d'extrema sur un intervalle de longueur $2M$ centré sur la singularité. Autrement dit, ce critère correspond à la limitation du nombre de maxima locaux détectés en réponse à un seul contour. x_{max} est alors donné par :

$$x_{max} = 2x_{moy} = 2 \left(\frac{\int_{-M}^M h'^2(t) dt}{\int_{-M}^M h''^2(t) dt} \right)^{\frac{1}{2}} = k_m M$$

car le nombre moyen de maxima est égal 2 fois le nombre de passages par zéro. Le problème à résoudre est donc la maximisation de :

$$\sum \Delta = \frac{\int_{-\infty}^0 h(t) dt}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{|h'(0)|}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Sous la contrainte du nombre d'extrema liés au bruit constant. Etant donné que le filtre h est anti-symétrique, on peut remplacer dans les expressions faisant intervenir h et ses dérivés, l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ par l'intégrale de $-M$ à 0 . Le principe de la maximisation de $\sum \Delta$ est de minimiser une des intégrales se trouvant au dénominateur sous la contrainte que les autres soient constantes. On est alors ramenés au problème d'optimisation suivant [?] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-M}^0 h^2(t) dt \\ \int_{-M}^0 h(t) dt = c_1 \quad \int_{-M}^0 h'^2(t) dt = c_2 \\ \int_{-M}^0 h''^2(t) dt = c_3 \quad h'(0) = c_4 \end{array} \right.$$

ce qui correspond à la minimisation d'une fonctionnelle $\int_{-M}^0 F(t, h, h', h'') dt$ sous des contraintes $\int_{-M}^0 G_i(t, h, h', h'') dt = c_i$. Ce problème est équivalent à la minimisation du problème sans contrainte :

$$\min_h J(h) = \min_h \int_{-M}^0 F(t, h, h', h'') dt + \sum_i \lambda_i \int_{-M}^0 G_i(t, h, h', h'') dt$$

2.2. CALCUL DES FILTRES OPTIMAUX POUR L'ESTIMATION DES GRADIENTS DANS L'APPROCHE DE C

Dans notre cas, cette expression se réécrit :

$$\min_h J(h) = \min_h \int_{-M}^0 h^2 + \lambda_1 h'^2 + \lambda_2 h''^2 + \lambda_3 h dt.$$

On cherche alors la fonction qui annule la différentielle de J qui s'écrit :

$$\begin{aligned} J(h+k) &= \int_{-M}^0 (h+k)^2 + \lambda_1 (h+k)'^2 + \lambda_2 (h+k)''^2 + \lambda_3 (h+k) dt \\ &= \int_{-M}^0 h^2 + \lambda_1 h'^2 + \lambda_2 h''^2 + \lambda_3 h + 2hk + 2\lambda_1 h'k' + 2\lambda_2 h''k'' + \lambda_3 hk + k\epsilon(k) \\ &= J(h) + \int_{-M}^0 (2h - 2\lambda_1 h'' + 2\lambda_2 h'''' + \lambda_3)k + k\epsilon(k). \end{aligned}$$

La différentielle doit s'annuler pour tout k donc l'équation vérifiée par h est l'équation d'Euler (car l'espace des contraintes est un sous-espace) :

$$2h - 2\lambda_1 h'' + 2\lambda_2 h'''' + \lambda_3 = 0.$$

La solution de cette équation est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de l'équation homogène. Une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par $h = -\frac{\lambda_3}{2}$ et la solution générale de l'équation sans second membre est donnée par une fonction du type $Ce^{-\gamma x}$ avec γ qui satisfait $2 - 2\lambda_1 \gamma^2 + 2\lambda_2 \gamma^4 = 0$. On a donc :

$$\gamma^2 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \pm \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2}}{2\lambda_2}. \quad (2.1)$$

L'équation d'Euler fournit une condition nécessaire à l'existence d'un minimum mais cette condition n'est pas forcément suffisante. En effet, l'annulation de la différentielle première ne nous indique pas s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. Il faut pour cela étudier la différentielle seconde. On utilise alors le théorème de Taylor MacLaurin, sous la forme :

$$J(h + \epsilon k) = J(h) + \epsilon DJ(h).k + \frac{1}{2}\epsilon^2 D^2 J(h + \rho k)(k, k).$$

Il suffit donc d'étudier la différentielle seconde. On calcule les variations de la différentielle première,

$$DJ(h+q)(k) = DJ(h)(k) + 2 \int_{-M}^0 qk + \lambda_1 q'k' + \lambda_2 q''k''.$$

Pour que le point d'annulation de la différentielle corresponde bien à un minimum il faut que :

$$D^2 J(h)(k, k) = 2 \int_{-M}^0 k^2 + \lambda_1 k'^2 + \lambda_2 k''^2 \geq 0$$

Comme k est une fonction admissible (i.e. support $[-M, M]$) cela se réécrit :

$$\int_{-M}^0 k^2 - \lambda_1 k k'' + \lambda_2 k''^2 dx \geq \int_{-M}^0 (k - \frac{\lambda_1}{2} k'')^2 + (\lambda_2 - \frac{\lambda_1^2}{4}) k''^2 dx \geq 0.$$

Donc si $4\lambda_2 > \lambda_1^2$, la condition est remplie pour toute fonction g . Par ailleurs, cela prouve que nous n'avons que des racines complexes à l'équation (2.1). Nous pouvons alors en déduire la forme générale $\gamma = \pm\alpha \pm i\omega$ avec α et ω réels. Maintenant que nous avons $\gamma^2 = \alpha^2 - \omega^2 \pm 2i\alpha\omega$, en écrivant l'égalité des parties réelles et imaginaires non obtenons :

$$\alpha^2 - \omega^2 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \text{ et } 4\alpha^2\omega^2 = \frac{4\lambda_2 - \lambda_1^2}{4\lambda_2^2}.$$

Dans ce cas la forme générale de la solution est la suivante :

$$h(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin(\omega x) + a_2 e^{\alpha x} \cos(\omega x) + a_3 e^{-\alpha x} \sin(\omega x) + a_4 e^{-\alpha x} \cos(\omega x).$$

Pour trouver l'opérateur $h(x)$ sous la forme d'un filtre à réponse impulsionnelle finie et présentant une pente S à l'origine, Canny a imposé les conditions aux limites suivantes :

$$h(0) = 0, h(M) = 0, h'(0) = S, h'(M) = 0.$$

Ces quatre conditions aux limites permettent de déterminer les coefficients de a_1 à a_4 . h étant impaire, la solution est étendue aux x négatifs. La mise en oeuvre pratique du filtre étant complexe, Canny propose d'approximer le filtre par la dérivée première d'une Gaussienne :

$$h(x) \approx -x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Les résultats de détection-localisation sont néanmoins moins bons avec la dérivée de la Gaussienne (20 % de perte) de plus ce filtre n'est pas à réponse impulsionnelle finie.

2.3 Le filtre de Deriche

On préfère souvent le détecteur de Deriche au détecteur de Canny. Celui-ci répond aux mêmes exigences que le filtre de Canny sauf qu'il n'est pas à réponse impulsionnelle finie. Celui-ci à une expression générale de la forme [3] :

$$h(x) = -cx \exp(-\alpha|x|)$$

avec $h(0) = 0, h(\infty) = 0, h'(0) = S$ et $h'(\infty) = 0$. Le paramètre c est calculé de manière à avoir une réponse maximale égale à 1 en zéro lorsque le signal d'entrée est la fonction de Heavyside, soit : $c \int_{-\infty}^0 t \exp(-\alpha t) dt = 1 \Rightarrow c = -\alpha^2$. Un tel filtre présente de meilleures performances de détection-localisation que le filtre de Canny. Le paramètre α représente l'inverse de l'écart type σ ($\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}$).

2.4 Extension au cas bidimensionnel

Le filtrage 2D est obtenu par l'action d'un filtre selon x et d'un filtre selon y . Pour détecter les contours orientés selon Oy on choisit un filtre passe-bas dans la direction Oy et un filtre passe haut dans la direction Ox, typiquement on choisira :

$$f(x, y) = -x \exp(-\alpha^2 x^2) \exp(-\alpha^2 y^2)$$

Ces filtres ne sont pas isotropes, i.e. ils ne répondent pas de manière identiques à des contours similaires mais d'orientation différentes.

2.5 Détection de contour par contours actifs

Une approche très différente des méthodes antérieures de détection de contours à été proposée en 1987 par Kass [4], appelée contours actifs ou "snakes". Il s'agit d'une méthode semi-interactive dans laquelle l'opérateur place dans l'image, au voisinage de la forme à détecter, une ligne initiale de contour. Cette ligne sera amenée à se déformer sous l'action de plusieurs forces :

- Une énergie propre assimilée à l'énergie mécanique de tension et de torsion d'une ligne matérielle.
- Une énergie potentielle imposée par l'image qui vise à plaquer la courbe sur les contours
- Une énergie externe, introduite par l'utilisateur pour traduire les contraintes spécifiques du problème qu'il se pose.

2.6 Formulation mathématique

Sous ces énergies, le contour actif va évoluer pour rechercher la position d'énergie minimale qui sera un compromis entre les diverses contraintes du problème. L'écriture formelle du problème passe par la définition paramétrique du contour, en fonction d'une variable s , généralement l'abscisse curviligne, la variable temporelle t :

$$v(s, t) = [x(s, t), y(s, t)]^t \quad s \in [a, b], \quad t \in [0, T].$$

L'expression de l'énergie que l'on cherche à minimiser comporte 3 composantes, ces énergies dépendent de t ce que l'on écrit pas pour alléger les notations :

$$E_{totale} = E_{interne}(v) + E_{image}(v) + E_{externe}(v)$$

pour récupérer un contour C^2 [4] :

$$E_{interne} = \int_a^b \alpha(s) \left\| \frac{dv}{ds} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{d^2v}{ds^2} \right\|^2 ds.$$

La première dérivée prend en compte les variations de longueur de la courbe (c'est donc un terme de tension (résistance à la rupture), qui est contrôlé par l'élasticité que l'on attribue au contour), tandis que la seconde exprime les variations de la courbure (c'est un terme de flexion contrôlé par la raideur du contour). La courbe doit être lisse et rigide sans induire de boucles. Ces deux termes agiront donc pour produire une courbe régulière de classe C^2 . Dans certains cas, une telle régularité est insuffisante. Le second terme E_{image} caractérise les lignes que l'on souhaite suivre. Dans le cas de la détection de contours, ce sont les lignes de fort gradient, il vaut généralement :

$$E_{image} = - \int_a^b \|\nabla u(v(s))\|^2 ds$$

Enfin, le dernier terme $E_{externe}$ est donné par l'utilisateur. Le plus souvent ce terme permet de contraindre le contour à ressembler à un gabarit donné. En l'absence du terme E_{ext} , l'énergie totale peut alors s'écrire :

$$E_{totale} = \int_a^b \left[-\|\nabla u(v(s))\|^2 + \alpha(s) \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right\|^2 \right] ds$$

On utilise alors un important résultat de calcul variationnel pour calculer le minimum de l'énergie :

Théorème 1 Soit s une variable à valeurs dans $[a, b]$ et soit v une fonction dépendant de la variable s . Soit $F(s, v, v', v'', \dots, v^{(n)})$ une fonction de classe C^2 par rapport à tous ses arguments et soit $J(v)$ la fonctionnelle définie par :

$$J(v) = \int_a^b F(s, v, v', v'', \dots, v^{(n)}) ds$$

Alors, trouver v extremum de $J(v)$ sous la condition que les extrémités de v et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ soient fixées, est équivalent à résoudre l'équation d'Euler donnée par :

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\partial^m F_{v^{(m)}}}{\partial s^m}(s, v, v', v'', \dots, v^{(n)}) = 0$$

où $F_{v^{(m)}}$ désigne la dérivée partielle de F par rapport à $v^{(m)}$.

dém : une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un extremum est que la différentielle s'annule. On peut calculer cette différentielle simplement :

$$\begin{aligned} J(v+k) &= \int_a^b F(s, v+k, v'+k', v''+k'', \dots, v^{(n)}+k^{(n)}) ds \\ &= \int_a^b F(s, v, v', v'', \dots, v^{(n)}) ds + \int_a^b F_v k + F_{v'} k' + \dots + F_{v^{(n)}} k^{(n)} ds + \|k\| \epsilon(k) \\ &= \int_a^b F(s, v, v', v'', \dots, v^{(n)}) ds + \sum_{m=0}^n \int_a^b (-1)^m \frac{\partial^m F_{v^{(m)}}}{\partial s^m} k + \|k\| \epsilon(k). \end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue par intégration par parties et en utilisant le fait que les expressions considérées sont égales en a et b ■.

Dans notre cas, la variable s joue le rôle de l'abscisse curviligne et la variable x celui de l'une des deux variables $x(s)$ et $y(s)$ qui composent $v(s)$. Par simplification d'écriture, on notera :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx(s)}{ds} & y' &= \frac{dy(s)}{ds} \\ x'' &= \frac{d^2x(s)}{ds^2} & y'' &= \frac{d^2y(s)}{ds^2} \\ v' &= \frac{\partial v(s)}{\partial s} & v'' &= \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} \end{aligned}$$

L'énergie à minimiser est de la forme :

$$E_{totale} = \int_a^b \alpha(s)(x'^2 + y'^2) + \beta(s)(x''^2 + y''^2) - \|\nabla u(v(s))\|^2 ds$$

En appliquant le théorème précédent, la minimisation de E_{totale} s'effectue en calculant les solutions de l'équation d'Euler.

$$\begin{aligned} E_{totale}(v+h) &= \int_a^b \alpha(s)\|v' + h'\|^2 + \beta(s)\|v'' + h''\|^2 - \|\nabla u(v(s) + h(s))\|^2 ds \\ &= E_{totale}(v) + \int_a^b 2\alpha(s)\langle v', h' \rangle + 2\beta(s)\langle v'', h'' \rangle - 2\langle D^2u(v)\nabla u(v), h \rangle ds + \|h\| \epsilon(h) \\ &= E_{totale}(v) + 2 \int_a^b \langle -(\alpha(s)v')' + (\beta(s)v'')'' - 2D^2u\nabla u, h \rangle ds + \|h\| \epsilon(h). \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en supposant que $v(a) = v(b)$, $v'(a) = v'(b)$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\beta(a) = \beta(b)$, $\beta'(a) = \beta'(b)$, $v''(a) = v''(b)$ et $v^{(3)}(a) = v^{(3)}(b)$. Dans ce cas, l'équation d'Euler est la suivante :

$$-(\alpha v')' + (\beta v'')'' = D^2u(v)\nabla u(v).$$

Comme le second membre possède dépend aussi de v , une résolution directe n'est pas possible, et le minimum d'énergie va correspondre à un état d'équilibre d'une certaine équation d'évolution comme nous allons l'expliquer maintenant.

2.7 Aspects numériques

2.7.1 Formulation en utilisant les différences finies

La recherche de la courbe réalisant le minimum d'énergie nécessite la résolution de l'équation aux dérivées partielles et ceci passe par une phase de discrétisation du problème à l'aide des différences finies. On considère la courbe discrétisée $\{v_i = (x_i, y_i), i = 0, \dots, N-1\}$. Au point v_i , les dérivées première et seconde par rapport à x de la première composante du vecteur v sont respectivement approchées par $\frac{x_i - x_{i-1}}{h}$ et $\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}$ (de même pour y). Les équations de x et y sont découplées. Supposant $\alpha_i = \alpha$ et $\beta_i = \beta$ pour toutes les valeurs de i , l'équation $-(\alpha x')' + (\beta x'')'' = -\alpha x'' + \beta x^{(4)} = f$ devient :

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{1}{h^2} (x_{i+1} - 2x_i - x_{i-1}) + \beta \frac{1}{h^4} ((x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i) - 2(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + (x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2})) \\ = f_{i+1} \\ \Leftrightarrow \beta x_{i-2} + (-4\beta - h^2\alpha)x_{i-1} + (6\beta + 2h^2\alpha)x_i + (-4\beta - h^2\alpha)x_{i+1} + \beta x_{i+2} \\ = h^4 f_{i+1}. \end{aligned}$$

On obtient alors un système linéaire de la forme générale $BX = F$ où :

$$\begin{aligned} X &= (x_i)_{i=0, \dots, N-2} \\ F &= (h^4 f_{i+1})_{i=0, \dots, N-2} \end{aligned}$$

et B une matrice définie ci-dessous. Dans le cas des snakes fermés, compte tenu du caractère périodique des courbes, la matrice B est circulante et s'exprime sous la forme (on prend le pas d'échantillonnage h égal à 1) :

$$B = \begin{pmatrix} 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta \\ -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & \dots & 0 & \beta \\ \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta \\ \beta & 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta \\ -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta \end{pmatrix}.$$

Du fait que l'énergie à minimiser n'est pas convexe, on ne peut être certain d'accéder à un minimum global et c'est pour cette raison qu'il importe de se situer près de l'objet à segmenter afin de s'assurer que le minimum local que l'on percevra correspondra au contour cherché.

La résolution du problème se fait de manière itérative en étudiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (\alpha v')' + (\beta v'')'' = D^2 u(v) \nabla u(v) = F(v) \quad (2.2)$$

On peut chercher à faire le calcul en utilisant les différences finies pour résoudre l'équation (2.2) : les éléments de la courbe sont réduits à des points auxquels sont attachés les éléments mécaniques (masse, raideur, etc) de la courbe concentrés en ces points.

Dans cette approche, on discrétise la courbe en un nombre n de points :

$$V(t) = [v_0(t) \dots v_{n-1}(t)]$$

Deux schémas sont alors possibles pour la résolution du problème, un schéma dit implicite et un schéma dit explicite. Le schéma explicite présente l'avantage de ne pas nécessiter d'inversion de

matrice mais peut en revanche être instable dans certain cas (cf cour première année sur la stabilité des schémas numériques). Le schéma explicite est de la forme suivante :

$$h^4 \frac{v_i^{t+\Delta t} - v_i^t}{\Delta t} + \beta v_{i-2}^t - (4\beta + h^2\alpha)v_{i-1}^t + (6\beta + 2h^2\alpha)v_i^t - (4\beta + h^2\alpha)v_{i+1}^t + \beta v_{i+2}^t = h^4 F(v_i^t)$$

on peut alors écrire sous forme matricielle :

$$V(t + \Delta t) = (I + \Delta t B)V(t) + \Delta t F(V(t)).$$

Si on considère la résolution sous forme implicite du problème, on obtient :

$$(I + \Delta t B)V(t + \delta t) = (V(t) + \Delta t F(V(t))).$$

2.7.2 Approche variationnelle

On repart de l'expression de la différentielle, et on considère un sous-espace V de $L^2[a, b]$ et une fonction w appartenant à V . Ecrivons alors la formulation variationnelle associée. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur \mathbb{R}^2 . On écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v, w \rangle + \int_a^b (\alpha \langle v', w' \rangle + \beta \langle v'', w'' \rangle) ds = \langle F(v), w \rangle = L_v(w)$$

On note $a(v, w)$ la forme bilinéaire définie par :

$$a(v, w) = \int_a^b (\alpha \langle v', w' \rangle + \beta \langle v'', w'' \rangle) ds$$

On se ramène à la recherche d'un espace V satisfaisant aux conditions aux limites et dans lequel on résout le problème variationnel suivant :
déterminer v :

$$\begin{cases} v : [0, T] \rightarrow V \\ t \rightarrow v(t) \end{cases}$$

tel que :

$$\forall w \in H, \frac{\partial}{\partial t} \langle v(t), w \rangle + a(v(t), w) = \langle F(v), w \rangle = L_v(w) \quad (2.3)$$

Dans le cas des snakes fermés l'espace V est $H_p^2([a, b])$, espace des fonctions de $L^2([a, b])$ périodiques sur $]a, b[$ ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2. Cette approche permet une résolution par éléments finis du problème.

La résolution pratique se fait de la manière suivante : on remarque tout d'abord que le problème $a(v, w) = L(w)$ admet une unique solution dans $H_p^2([a, b])$, l'espace des fonctions telles que $\int_a^b \|D^m v\|^2 < +\infty$ pour $m = 0, 1, 2$ où $D^m v$ est la différentielle d'ordre m de la fonction v , à condition que la forme bilinéaire a soit coercive ($a(x, x) \geq \|x\|^2 \forall x \in H$), ce qui est le cas dès que $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ sont positifs.

Ayant montré l'existence, d'une solution au problème stationnaire on approche cette solution dans un sous-espace V_h de dimension finie de V (méthode de Galerkin) :

$$a(v_h, w_h) = L_{v_h}(w_h) \quad \forall w_h \in V_h,$$

où (w_h) est une base de V_h . En décomposant v_h sur la base des w_h , on peut écrire l'égalité précédente sous la forme d'un système linéaire : $AV = L$, où V correspond aux coordonnées de v_h dans la base d'éléments finis (w_h) . Néanmoins, du fait que le second membre dépend de v , on ne peut pas s'assurer de la convergence de v_h vers v

On discrétise alors l'équation d'évolution (2.3) en utilisant des différences finis pour obtenir :

$$\frac{V^t - V^{t-1}}{\Delta t} + AV^{t-1} = L_{V^{t-1}}$$

Chapitre 3

Equations aux dérivées partielles et traitement d'images

3.1 Introduction

L'origine du lien entre équations aux dérivées partielles et traitement d'images provient du fait qu'une image ne peut être représentée par ses échantillons que si la fonction sous-jacente est suffisamment lisse (en pratique il faut même que la fonction soit C^∞ pour que sa transformée de Fourier soit à support compact). Cela oblige à faire des convolutions avec des fonctions appelées noyaux en guise de prétraitement. D'autre part, ces prétraitements ont aussi pour rôle de lisser les images de façon à rendre l'analyse plus facile. Nous allons voir deux types de lissage différents fondés sur l'utilisation d'équation aux dérivées partielles isotropes ou anisotropes.

Dans ce qui suit nous aurons besoin des notations suivantes : $x = (x_1, x_2)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \cdot y$ dénote le produit scalaire sur \mathbb{R}^2 , $u(x)$ est le niveau de gris au point x . En supposant que u est assez régulière nous notons : $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ et $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Nous notons aussi le gradient de u sous la forme $Du = (u_x, u_y)$ et le laplacien est noté $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

3.2 Noyau de Lissage et équation de la chaleur

3.2.1 Rappel sur le l'équation de la chaleur et le noyaux Gaussien

Commençons par définir la transformée de Fourier bidimensionnelle. Pour toute fonction $u(t, \cdot)$ de $L^1(\mathbb{R}^2)$, la transformée de Fourier est définie par :

$$F(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} dx \quad (3.1)$$

Considérons alors l'équation de la chaleur bidimensionnelle :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta u(t, x) \quad (3.2)$$

Supposons que $\frac{\partial u(\cdot, x)}{\partial t}$ est continue pour tout t et presque tout x , et que $|\frac{\partial u(\cdot, x)}{\partial t}| \leq g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ pour tout t , alors nous pouvons écrire que :

$$\frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} dx.$$

Ensuite, si $u(t, \cdot)$ appartient à $C^2 \cup L^1(\mathbb{R}^2)$ et est tel que $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ ainsi que $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2}$, alors nous pouvons écrire que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2} \right) e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} dx = -4\pi^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) F(\xi, t)$$

En effet, nous pouvons écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} e^{-2i\pi \xi_1 x_1} dx_1 \right) e^{-2i\pi \xi_2 x_2} dx_2$$

En faisant une double intégration par parties on obtient le résultat escompté.

Donc, si l'on considère la transformée de Fourier de l'équation de la chaleur on obtient que :

$$\frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = -4\pi^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) F(t, \xi) \tag{3.3}$$

D'où $F(t, \xi) = C(\xi) e^{-4\pi^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) t}$ En supposant que $u(0, x) = u_0(x)$ et en notant \hat{u}_0 la transformée de Fourier de u_0 on obtient que : $F(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-4\pi^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) t}$. En utilisant alors des résultats classiques sur les transformées de Fourier des Gaussiennes que :

$$F(t, \xi) = \hat{u}_0(t, \xi) \frac{1}{4\pi t} \widehat{e^{-4t(x_1^2 + x_2^2)}}(\xi).$$

Ainsi, en prenant la transformée de Fourier inverse on obtient que :

$$u(t, x) = u_0 * G_t(x)$$

où $G_t(x) = \frac{1}{4\pi t} e^{-4t(x_1^2 + x_2^2)}$.

3.2.2 Propriété de l'opérateur de moyennisation

On définit l'opérateur de moyennisation sur le disque de centre x et de rayon h par :

$$m_h u_0(x) = \frac{1}{\pi h^2} \int_{D(x, h)} u_0(y) dy$$

On montre que l'opérateur de moyennisation vérifie la propriété :

$$\frac{m_h u_0(x) - u_0(x)}{h^2} = \frac{1}{8} \Delta u_0(x) + \epsilon(h)$$

Dém : Sans perte de généralité plaçons nous en $x = 0$. Rappelons alors (Calcul de différentielles dans les espaces de Banach) :

$$u_0(y) = u_0(0) + D u_0(0) \cdot y + \frac{1}{2} ((u_0)_{xx}(0) y_1^2 + (u_0)_{yy}(0) y_2^2 + 2(u_0)_{xy}(0) y_1 y_2) + o(h^2).$$

La valeur moyenne calculée alors sur le disque nous donne :

$$(m_h u_0)(0) = u_0(0) + \frac{1}{2\pi h^2} ((u_0)_{xx}(0) \int_{D(0, h)} y_1^2 dy_1 dy_2 + (u_0)_{yy}(0) \int_{D(0, h)} y_2^2 dy_1 dy_2) + o(h^2)$$

On obtient alors le résultat souhaité en remarquant que :

$$\frac{1}{2\pi h^2} \int_{D(0, h)} x_1^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{4\pi h^2} \int_{D(0, h)} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{4\pi h^2} \int_0^h 2\pi r^3 dr = \frac{h^2}{8} \blacksquare$$

Nous allons maintenant généraliser cette propriété qui nous permettra de faire le lien entre noyau de convolution et équation de la chaleur.

3.2.3 Convolution par des noyaux à symétrie radiale normalisés

Nous définissons les noyaux à symétrie radiale normalisés de la manière suivante, $g(x) = g(|x|)$ et :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x)dx = 1 \quad \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} x_2^2 g(x)dx = 2.$$

Nous nous intéressons alors à la préservation de ces propriétés par changement d'échelle. Regardons les propriétés satisfaites par $ag(\frac{x}{b})$. Pour que la première égalité soit satisfaite, il faut nécessairement que $ab^2 = 1$ c'est à dire $b = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Avec cette relation liant a et b , les deux dernières relations sont satisfaites (changement de variables). Il est facile de voir alors que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} x_1 g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} x_2 g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 g(x)dx = 0 \quad (3.4)$$

En effet, la fonction g étant à symétrie radiale, on a :

$$\int (x_1 - x_2)^2 g(x)dx = \int (x_1 + x_2)^2 g(x)dx$$

Ce qui permet de déduire la dernière propriété. Pour l'une des deux premières propriétés, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} x_1 g(x)dx &= \int_0^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx_2 dx_1 + \int_{-\infty}^0 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx_2 dx_1 - \int_0^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx_2 dx_1 = 0. \end{aligned}$$

On considère alors le changement d'échelle $g_h(x) = \frac{1}{h}g(\frac{x}{h^{\frac{1}{2}}})$, et l'on dénote par $g^{n*} = g * g * \dots * g$ la convolution d'ordre n . On définit de même g_h^{n*} , dont on étudie le comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $h \rightarrow 0$. On étudie tout d'abord les propriétés de la convolution par g_h . Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1 Soit $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction radiale normalisée, supposons de plus que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(z)||z|^3 dz = C < +\infty$$

alors pour toute fonction $u \in L^\infty(K) \cap C^3(K)$, avec K compact de \mathbb{R}^2 , on a :

$$(g_h * u)(x) - u(x) = h\Delta u(x) + O(h^{\frac{3}{2}})$$

Dém : on peut écrire :

$$\begin{aligned} (g_h * u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} h^{-1}g\left(\frac{y}{h^{\frac{1}{2}}}\right)(u(x-y) - u(x))dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(z)(u(x - h^{\frac{1}{2}}z) - u(x))dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(z)(-h^{\frac{1}{2}}Du(x).z + \frac{h}{2}D^2u(x)(z, z))dz \\ &\quad - \frac{1}{6}h^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} g(z)D^3u(x - h^{\frac{1}{2}}\theta z)(z, z, z)dz \end{aligned}$$

où $\theta = \theta(x, z, h)$ appartient à $[0, 1]$. Ceci utilise une généralisation de la formule de Taylor Lagrange. Commençons par l'écriture de la différentielle première. L'application u est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Considérons alors l'application $g(t) = u(x + th) - t(u(x + h) - u(x))$. $g(0) = g(1) = u(x)$. En utilisant le théorème de Rolle, il vient que :

$$\exists \theta \in]0, 1[\text{ tel que } g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow u(x + h) = u(x) + Du(x + \theta h)h.$$

Pour montrer l'égalité avec la différentielle seconde, on pose cette fois $g(t) = u(x + th) - u(x) - Du(x)th$. On peut alors écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et 1 ce qui donne :

$$\begin{aligned} g(1) &= g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t)dt \\ u(x+h) - u(x) - Du(x)h &= \int_0^1 (1-t)D^2u(x+th)(h, h). \end{aligned}$$

En appliquant alors le théorème de la moyenne à l'intégrale, on obtient :

$$u(x+h) = u(x) + Du(x)h + \frac{1}{2}D^2u(x+\theta h)(h, h).$$

Pour le développement à l'ordre 3, on écrit :

$$g(t) = u(x+th) - u(x) - Du(x).th - \frac{1}{2}D^2u(x).t^2h.$$

On a alors :

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 g^{(3)}(t)dt,$$

ce qui entraîne

$$u(x+h) - u(x) - Du(x).h - \frac{1}{2}D^2u(x).h = u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 g^{(3)}(t)dt.$$

En utilisant de nouveau le théorème de la moyenne pour exprimer l'intégrale, on obtient :

$$u(x+h) = u(x) + Du(x).h + \frac{1}{2}D^2u(x)(h, h) + \frac{1}{6}D^3u(x+\theta h)(h, h, h)$$

Revenons alors à la démonstration. En utilisant l'information des moments (3.4) et la définition des fonctions radiales normalisées, on obtient :

$$|(g_h * u)(x) - u(x) - h\Delta u(x)| \leq Ch^{\frac{3}{2}} \max_{x \in K} \|D^3u(x)\|.$$

Nous allons alors montrer que $T_h u_0 = g_h * u_0$ permet de définir des itérés $((T_h)^n u_0)(x)$ qui tendent vers $u(t, x)$ où $u(t, x)$ est la solution de l'équation de la chaleur. Ce résultat est démontré dans le théorème suivant :

Théorème 2 Soit $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction radiale normalisée, non négative satisfaisant en plus la condition du théorème 1 et posons $g_h(x) = \frac{1}{h}g(\frac{x}{h})$ et $T_h u = g_h * u$. Alors, $((T_h)^n u_0)(x) \rightarrow u(t, x) \in L^1(K)$, quand $n \rightarrow +\infty$ et $nh \rightarrow t$, où $u(t, x) = G_t * u_0 \in L^\infty(K)$ est solution de l'équation de la chaleur avec comme solution initiale u_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \int_K |u(t, x) - u_0(x)|dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0$$

Ce théorème montre que l'itération de filtres passe-bas, isotropes et correctement normalisés est asymptotiquement équivalent à l'équation de la chaleur.

Dém : Nous étudions tout d'abord les propriétés de T_h appliquée à la solution de l'équation de la chaleur. En utilisant le résultat donné par le théorème précédent, en supposant que $t \in [t_1, t_2]$, nous avons que :

$$T_h u(t, x) - u(t, x) = g_h * u(t, x) - u(t, x) = h\Delta u(t, x) + O(h^{\frac{3}{2}}),$$

le dernier terme est indépendant de t car $\|D^3 u(t, x)\|$ est uniformément borné sur le compact $[t_1, t_2] \times K$. Par ailleurs, comme u est solution de l'équation de la chaleur, nous avons :

$$u(t + h, x) - u(t, x) = h\Delta u(t, x) + O(h^2),$$

u étant C^∞ peut-être uniformément borné sur le compact $[t_1, t_2] \times K$, ce qui permet d'écrire :

$$T_h u(t, x) - u(t + h, x) = O(h^{\frac{3}{2}})$$

L'opérateur T_h vérifie le principe du maximum, c'est à dire que si $u \leq C$ alors $T_h u \leq C$. En conséquence, $T_h(O(h^\alpha)) = O(h^\alpha)$. On en déduit donc :

$$(T_h)^2 u(t, x) - T_h u(t + h, x) = O(h^{\frac{3}{2}})$$

En utilisant alors l'équation précédente en remplaçant t par $t + h$, il vient :

$$T_h u(t + h, x) - u(t + 2h, x) = O(h^{\frac{3}{2}})$$

En additionnant les équations, on obtient :

$$T_h^2 u(t + h, x) - u(t + 2h, x) = 2O(h^{\frac{3}{2}})$$

et en itérant le procédé, on obtient :

$$T_h^n u(t, x) - u(t + nh, x) = nO(h^{\frac{3}{2}})$$

à condition que $t_1 \leq t + nh \leq t_2$. En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ et en posant $h = \frac{\tau}{n}$, il vient :

$$T_h^n u(t, x) - u(t + \tau, x) = O(h^{\frac{1}{2}}) \tag{3.5}$$

à condition que $t_1 \leq t + \tau \leq t_2$. Si nous pouvions prendre $t = t_1 = 0$, la démonstration serait terminée. Cependant, nous pouvons seulement le fixer très petit. On fixe $\epsilon > 0$ et on considère t_1 suffisamment petit tel que l'on ait :

$$\|u(t_1) - u_0\|_{L^1(K)} = \int_K |u(t_1, x) - u_0(x)| dx < \epsilon$$

D'après les propriétés de la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, nous avons que pour tout $u \in L^1(K)$,

$$\|g_h * u\|_{L^1(K)} \leq \|g_h\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^1(K)}$$

Comme $\int g_h = 1$, Nous pouvons déduire que

$$\|T_h^n u(t_1, \cdot) - T_h^n u_0\|_{L^1(K)} \leq \epsilon$$

On intègre alors la relation (3.5) sur le compact K avec $t = t_1$ pour obtenir :

$$\|T_h^n u(t_1, \cdot) - u(t_1 + \tau, \cdot)\|_{L^1(K)} = O(h^{\frac{1}{2}}) < \epsilon$$

pour n pris suffisamment grand. En combinant les équations précédentes on obtient :

$$\|T_h^n u_0 - u(t_1 + \tau)\|_{L^1(K)} \leq 2\epsilon$$

et par suite en prenant t_1 suffisamment petit et $hn = \tau$, on conclut que

$$\|T_h^n u_0 - u(\tau)\| \leq 2\epsilon$$

ce qui termine la démonstration ■.

3.3 Equations de diffusion non linéaire

En chaque point (x, y) où $\nabla u(x, y) \neq 0$, on considère

$$\eta = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \text{ et } \xi = \frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u^\perp\|}.$$

Ces deux quantités définissent un nouveau système de coordonnées. Appelons maintenant Φ l'angle formé par le gradient et l'axe Ox . On a alors $\eta = \begin{pmatrix} \cos(\Phi) \\ \sin(\Phi) \end{pmatrix}$ Ecrivons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \nabla u \cdot \eta \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\Phi) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\Phi). \end{aligned}$$

Une seconde dérivation conduit à :

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2(\Phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos(\Phi) \sin(\Phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2(\Phi) \\ &= \eta^t D^2 u \eta \\ &= D^2 u \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}, \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right). \end{aligned}$$

De la même manière, on a $D^2 u \left(\frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u^\perp\|}, \frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u^\perp\|} \right) = u_{\xi\xi}$.

3.3.1 Le modèle de Perona et Malik

Parmi les défauts multiples de l'équation de la chaleur, un défaut important est de détériorer les bords des images donc il n'est pas forcément judicieux de l'utiliser comme prétraitement. Une approche proposée par Perona et Malik [8] consiste à lisser les régions homogènes tout en préservant les bords. La forme générale de l'équation utilisée est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|)\nabla u)$$

avec $g(s) = \frac{1}{1+(\lambda s)^2}$. On montre facilement que si $\|\nabla u\| \leq \frac{1}{\lambda}$, il y a diffusion tandis que si $\|\nabla u\| > \frac{1}{\lambda}$ il y a anti-diffusion. Nous allons réécrire l'équation de Perona-Malik dans le repère local défini par η et ξ . On a donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|)\nabla u) &= \frac{\partial}{\partial x}(g(\|\nabla u\|)u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(g(\|\nabla u\|)u_y) \\ &= Dg(\|\nabla u\|)\nabla u + g(\|\nabla u\|)\Delta u \\ &= g'(\|\nabla u\|)u_{\eta\eta}\|\nabla u\| + g(\|\nabla u\|)(u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}) \\ &= \frac{u_{\xi\xi}}{1+(\lambda\|\nabla u\|)^2} + \frac{(1-\lambda^2(\|\nabla u\|^2))u_{\eta\eta}}{(1+\lambda^2\|\nabla u\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Le premier terme apparait donc comme un terme de diffusion dans la direction orthogonale au gradient tandis que le second est un terme de lissage dans la direction du gradient. Ce modèle permet un analyse de l'image en terme de bords et en plus permet la restauration des images par lissage des zones homogènes, tout en préservant les bords. Cependant, comme la diffusion dépend du gradient de u , cet opérateur n'est pas très performant en présence de bruit. Pour pouvoir s'affranchir du problème posé par le non traitement du bruit par l'équation de Perona et Malik, Catté, Lions et Morel ont proposé le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla(u * G_\sigma)\|)\nabla u), \quad (3.6)$$

où G_σ est un noyau Gaussien. En faisant dépendre la diffusion du gradient de l'image régularisée, cela permet d'avoir une diffusion importante là où il y a du bruit.

3.3.2 Approche par Minimisation de Tikhonov

Les équations de diffusion non linéaires précédentes utilisées comme prétraitement ont la propriété d'avoir des états d'équilibre peu intéressants par rapport au but recherché, i.e. lisser l'image tout en préservant les bords, donc pour être utiles ces équations nécessitent un temps d'arrêt. Une autre façon de voir les choses consiste à considérer la résolution d'un problème d'optimisation. Si on appelle u_0 l'image bruitée (que l'on cherche à lisser), on souhaite que l'image \hat{u} (l'image lissée) soit proche de u_0 et que les gradients de \hat{u} soit les plus petits possibles. Ceci doit se faire sous la contrainte que u_0 et u satisfont la propriété de consistance suivante : $\int_\Omega u_0 = \int_\Omega \hat{u}$ (le bruit étant de moyenne nulle).

On trouve l'image \hat{u} lissée comme la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{u} = \operatorname{argmin}_u \left\{ \lambda \int_\Omega |u - u_0|^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|_2^2 \right\} \quad (3.7)$$

sous la contrainte que $\int_\Omega u_0 = \int_\Omega u$.

Cherchons maintenant l'équation d'Euler associé à ce problème d'optimisation. Soit

$$J(u) = \lambda \int_\Omega |u - u_0|^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|_2^2.$$

Pour ce faire, on calcule la différentielle de J .

$$\begin{aligned} DJ(u).h &= \int_\Omega 2\lambda(u - u_0)h + 2\langle \nabla u, \nabla h \rangle \\ &= \int_\Omega 2\lambda(u - u_0)h - 2\operatorname{div}(\nabla u)h + \int_\Gamma \langle \nabla u, n \rangle h, \end{aligned}$$

où n un vecteur orienté extérieurement à Γ (On obtient ce résultat en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski). En supposant que u satisfait des conditions de Neumann aux bords ($\langle \nabla u, n \rangle = 0$ sur Γ), on obtient que :

$$DJ(u).h = 2 \int_\Omega (\lambda(u - u_0) - \Delta u)h,$$

qui s'annule pour tout h si u satisfait l'équation d'Euler suivante :

$$-\lambda(u - u_0) + \Delta u = 0.$$

Finalement, on peut relier le problème d'optimisation à une EDP de la forme.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda(u - u_0) + \Delta u & \forall x \in \Omega \\ \langle \nabla u, n \rangle = 0 \text{ sur } \Gamma & \text{(condition de Neumann)} \end{cases}$$

On voit qu'il s'agit d'une équation de la chaleur modifiée par le terme $\lambda(u - u_0)$, celui-ci empêchant la diffusion d'éloigner trop u de u_0 . Si on appelle u_∞ la solution u lorsque t tend vers $+\infty$, alors on a les propriétés :

Si λ est grand, u_∞ est proche de u_0 .

Si λ est petit, les bords dans l'image peuvent être très abîmés.

Le problème de la régularisation de Tikhonov est que les résultats pratiques de débruitage ne sont pas extraordinaires. Une autre approche consiste à considérer une minimisation L^1 du gradient :

$$\hat{u} = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \lambda \int_{\Omega} |u - u_0|^2 + \int_{\Omega} \|\nabla u\| \right\}$$

avec la condition supplémentaire $\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u_0$. Pour étudier l'équation d'Euler associée, on pose cette fois :

$$J(u) = \int_{\Omega} \lambda(u - u_0)^2 + \int_{\Omega} \|\nabla u\|$$

On obtient cette fois l'écriture suivante pour la différentielle :

$$\begin{aligned} DJ(u).h &= \int_{\Omega} 2\lambda(u - u_0)h + \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{\|\nabla u\|} \\ &= \int_{\Omega} 2\lambda(u - u_0)h + \int_{\Gamma} \frac{\langle \nabla u, n \rangle}{\|\nabla u\|} h - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) h. \end{aligned}$$

En supposant que u satisfait la condition de Neumann : $\langle \nabla u, n \rangle = 0$ sur Γ , on obtient que :

$$DJ(u).h = \int_{\Omega} (2\lambda(u - u_0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)) h.$$

La différentielle s'annule si

$$2\lambda(u - u_0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) = 0.$$

Donc l'EDP associée est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -2\lambda(u - u_0) + \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) & \text{sur } \Omega \\ \langle \nabla u, n \rangle = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Ainsi, contrairement à la régularisation de Tikhonov, le terme de diffusion n'est pas isotrope et dépend des gradients de l'image (là où le gradient est important, il y a peu de diffusion). En poussant un peu plus loin on pourrait envisager l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -2\lambda(u - u_0) + \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|)\nabla u) & \text{sur } \Omega \\ \langle \nabla u, n \rangle = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le problème est alors de relier cette équation à un problème d'optimisation simple ce qui n'est pas possible.

Remarque 1 *L'intérêt de relier des équations de minimisation à des états asymptotiques EDPs est que ces dernières permettent une résolution numérique du problème.*

3.3.3 Le modèle de Mumford-Shah et variantes

Pour segmenter l'image $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Mumford et Shah [6] ont proposé de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$E_{u_0}(u, K) = \beta \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + \int_{\Omega \setminus K} \|\nabla u\|^2 + \alpha \text{mes}(K)$$

Ce modèle possède de nombreuses variantes.

Une approche voisine consiste à écrire explicitement une fonction de bord dans la minimisation, c'est le modèle de Nordström [7] :

$$E_{u_0}(u, w) = \int_{\Omega} \beta(u - u_0)^2 + w\|\nabla u\|^2 + \lambda^2(w - \ln(w))dx$$

où $w : \Omega \rightarrow [0, 1]$ avec $w \approx 1$ à l'intérieur d'une zone homogène et est nulle sur les bords, α et β étant deux constantes positives. L'équation d'Euler associée est :

$$\begin{cases} \beta(u - u_0) - \text{div}(w\nabla u) & = 0 \\ \lambda^2(1 - \frac{1}{w}) + \|\nabla u\|^2 & = 0 \end{cases}$$

La seconde équation nous permet d'écrire w sous la même forme que la fonction g du modèle de Perona et Malik :

$$w = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla u\|^2}{\lambda^2}}$$

La méthode du gradient correspondant à la minimisation précédente conduit à l'équation dit de réaction diffusion suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = \text{div}(g(\|\nabla u\|^2)\nabla u) + \beta(u_0 - u) \\ u(x, 0) & = u_0(x) \end{cases}$$

Cette équation combine le terme de diffusion de Perona-Malik et un terme de rappel vers l'image initiale.

3.3.4 Approches par courbure moyenne

La motivation principale des filtres fondés sur le déplacement de la courbure principale dit "mean curvature motion" (MCM), est la construction d'un opérateur de diffusion non linéaire capable de diffuser "plus" dans la direction parallèle aux objets significatifs et "moins" dans leurs directions perpendiculaires. On rappelle que l'équation de la chaleur peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi\xi} + u_{\eta,\eta}$$

Si on ne conserve que la diffusion dans la direction des contours on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi\xi} = \Delta u - \frac{D^2u(\nabla u, \nabla u)}{\|\nabla u\|^2} = \|\nabla u\| \text{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right). \quad (3.8)$$

Cette dernière égalité s'obtient grâce au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right) &= \|\nabla u\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\|\nabla u\|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\|\nabla u\|} \right) \right) \\ &= \Delta u - \nabla \left(\frac{1}{\|\nabla u\|} \right) \nabla u \\ &= \Delta u - \frac{D^2 u(\nabla u, \nabla u)}{\|\nabla u\|^2} \end{aligned}$$

Le front de diffusion est une ligne de niveau définie à l'instant t par :

$$F_{r_t} = \{(x, y), u(x, y, t) = \text{cste}\}.$$

Cette courbe peut être paramétrée par :

$$F_{r_t} = \{M(s, t), u(M(s, t), t) = \text{cste}\} \quad (3.9)$$

La vitesse $\frac{\partial M}{\partial t}$ de déplacement du point M et $\frac{\partial M}{\partial s}$, la direction de la tangente à F_{r_t} en M sont liées par la relation suivante :

$$\left\langle \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial M}{\partial s} \right\rangle = 0, \quad (3.10)$$

car seule la composante orthogonale à $\frac{\partial M}{\partial s}$ fait évoluer u . Une différentiation de (3.9) par rapport à t et à s nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial M}{\partial t}, \nabla u \right\rangle + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial M}{\partial s}, \nabla u \right\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Alors les équations (3.10) et (3.11) nous donnent $\frac{\partial M}{\partial t} = \lambda \nabla u$. En remplaçant dans (3.11) et en utilisant (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \left[-\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right] \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right) \\ &= \left[-\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right] \operatorname{courbure}(u) \end{aligned}$$

où $\operatorname{courbure}(u)$ est la courbure en chaque point d'une ligne de niveau. Pour obtenir une telle relation, nous avons d'abord dérivé deux fois (3.9) par rapport à s . En effet en écrivant $M(s, t) = (x(s), y(s))$, il vient :

$$\begin{aligned} x''(s) \frac{\partial u}{\partial x} + (x'(s))^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y''(s) \frac{\partial u}{\partial y} + y'(s)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x'(s)y'(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y'(s)x'(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \\ (x'(s), y'(s)) H(u)^t (x'(s), y'(s)) + x''(s)u_x + y''(s)u_y &= 0 \end{aligned}$$

où $H(u)$ est la matrice Hessienne de u et $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et idem pour y . on remarque ensuite que :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = Kn \quad (3.12)$$

où K est la courbure et n est un vecteur normal à la courbe orienté intérieurement. Comme $n = -\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$, on obtient que $K = -\frac{x''(s)u_x + y''(s)u_y}{\nabla u}$, et en remarquant que ${}^t(x'(s), y'(s)) = \frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u\|}$, on obtient

$$\begin{aligned} D^2(u)\left(\frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u\|}, \frac{\nabla u^\perp}{\|\nabla u\|}\right) &= u_{\xi\xi} \\ &= \|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right) \\ &= K\|\nabla u\|, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. Les fronts de diffusion se déplacent ainsi avec une vitesse proportionnelle à la courbure. Les courbes C , correspondant aux lignes de niveaux de u , évoluent selon l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\cdot, t) = K(\cdot, t)N$$

où $K(x, y, t)$ est la courbure de C au point (x, y) et au temps t et N le vecteur normale à cette courbe. L'équation diffuse peut donc être interprété comme un filtre fondé sur la courbure principale et correspond à une diffusion anisotrope dans la direction des lignes de niveau de l'image.

Partant de cette équation a été proposé par Alvarez, Lions et Morel [1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(\|\nabla G_\sigma\|)\|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right), \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y). \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce modèle se fonde donc sur le principe de la diffusion dans la direction des lignes de niveaux sauf aux endroits où le gradient régularisé est fort.

3.3.5 MCM et contours actifs

On peut voir le modèle de diffusion précédent comme un modèle de contours actifs de la manière suivante :

$$\begin{cases} C_t &= C_{ss} \\ C(\cdot, 0) &= C_0(\cdot) \end{cases}$$

On peut alors voir le modèle (3.13) comme un exemple plus sophistiqué de contours actifs où les contours (correspondant aux lignes de niveau) se déplacent en fonction de la courbure et de la valeur du gradient local.

3.3.6 Formulation dans une base d'ondelette du problème de minimisation

Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et soit $\{\Psi_{j,k}\}$ une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\Omega)$. Soit

$$u_0(x) = \sum_{j,k} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x),$$

la décomposition de u_0 sur cette base. Comme u appartient aussi à $L^2(\Omega)$, il admet la décomposition suivante dans la base d'ondelettes : $u(x) = \sum_{j,k} \tilde{c}_{j,k} \Psi_{j,k}(x)$. Le fait que la base soit orthonormée entraîne :

$$\|u - u_0\|^2 = \sum_{j,k} |c_{j,k} - \tilde{c}_{j,k}|^2.$$

On veut approcher $\int_{\Omega} \|\nabla u\|$ à l'aide des coefficients d'ondelettes, cela veut dire que l'on suppose que u appartient à :

$$BV = \left\{ u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} \|\nabla u\| < +\infty \right\}$$

où BV signifie Bounded Variations (en français, à variations bornées), et que l'on cherche à trouver u qui minimise la semi-norme associée. Malheureusement, l'espace BV ne s'écrit pas exactement à l'aide des coefficients d'ondelettes mais on a une quasi-caractérisation de BV avec les coefficients d'ondelettes :

$$u \in BV \approx \sum_{j,k} |\tilde{c}_{j,k}| 2^{j/2} < \infty.$$

Écrit à l'aide des coefficients d'ondelettes, le problème de débruitage s'écrit :

$$\operatorname{argmin}_{\tilde{c}} \left\{ \lambda \sum_{j,k} |\tilde{c}_{j,k} - c_{j,k}|^2 + \sum_{j,k} |\tilde{c}_{j,k}| 2^{j/2} \right\}.$$

Le problème de recherche de solution ne nécessite plus d'EDP.

Remarque 2 *Il est à noter qu'un tel algorithme de minimisation peut servir à séparer géométrie et texture dans une image. Soit f une image de départ (non bruitée), on peut chercher à minimiser (modèle proposé par Yves Meyer) :*

$$\operatorname{argmin}_{(u,v), f=u+v} \left\{ \lambda \underbrace{\|u\|_H}_{\text{norme géométrie}} + \underbrace{\|v\|_V}_{\text{norme partie oscillante}} \right\}$$

Bibliographie

- [1] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M. Morel, *Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion. II*, SIAM Journal Numer. Anal., vol 29, no. 3, pp. 845-866, 1992.
- [2] J. Canny, *A Computational Approach to Edge Detection*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 8, 679-698, 1986.
- [3] Deriche R., *Using Canny's criteria to derive recursively implemented optimal edge detector*, International Journal of Computer Vision, vol. 1, pp. 167-187, 1987.
- [4] Kass M., Witkin A., Terzopoulos D., *Active Contour Models*, International Journal of computer Vision, vol. 1, pp. 321-331, 1988.
- [5] Mackworth A, Mokhtarian F., *A theory of Multiscale, curvature-based shape representation for planar curves*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 14, pp. 789-805, 1992.
- [6] D. Mumford and J. Shah, *Boundary Detection by Minimizing Functionals*, IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '85), san Francisco, pp. 22-26, 1985.
- [7] N. Nordström, *Biased Anisotropic Diffusion- a unified regularization and diffusion approach to edge detection*, Image Vision Comput., vol. 8, pp. 318-327, 1990.
- [8] Perona. P and malik. J, *Scale Space and Edge Detection using Anisotropic Diffusion*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12, pp. 629-639, 1990.
- [9] A. Witkin, *Scale-space Filtering*, International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 1019-1023, 1983.