Analyse pour l'ingénieur

ENSIMAG 1$^{\text{ère}}$ **Année** 1$^{\text{er}}$ **semestre**

S. Meignen, **V. Perrier**

20010/2011

Table des matières

Chapitre 1

Intégration

$\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\} = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$.

Convention :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}_+}, \quad \begin{aligned} x + (+\infty) &= +\infty \\ x \times (+\infty) &= \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.1 Eléments de théorie de la mesure

1.1.1 Ensembles mesurables

Définition 1 *Une tribu sur $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^N$ contenant $\emptyset$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).*
Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^N$, les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables. On dit que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Exemples :
(i) $(\emptyset, \mathbb{R}^N)$ est la tribu grossière de $\mathbb{R}^N$.
(ii) $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ ensemble des parties de $\mathbb{R}^N$ est la tribu discrète.
(iii) La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^N$ est la tribu engendrée par les ouverts (et donc par les fermés) de $\mathbb{R}^N$. On peut montrer que cette tribu notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ est engendrée par les pavés :

$$\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \text{ avec } -\infty < a_j < b_j < +\infty$$

1.1.2 Mesures

Définition 2 *Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^N$. Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ vérifiant :*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a :

$$\mu(\bigcup_{1}^{\infty} B_i) = \sum_{1}^{\infty} \mu(B_i)$$

(μ est dénombrablement additive)
$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exercice : Montrer que l'on peut remplacer dans la définition : $\mu(\emptyset) = 0$ par "la mesure n'est pas partout égale à $+\infty$".

Définition 3 *Soit $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que cet espace est complet, ou que μ est complète ou que μ est complète pour $\mathcal{B}$ si :*

$$(B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0, A \subset B) \Rightarrow A \in \mathcal{B}$$

Si $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, on peut montrer qu' il existe une tribu $\tilde{\mathcal{B}}$ et une mesure (positive) $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{\mathcal{B}}$ telles que :

(i) $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$
(ii) $\forall B \in \mathcal{B}, \tilde{\mu}(B) = \mu(B)$
(iii) $(\mathbb{R}^N, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu})$ est complet

Exemple fondamental : On peut montrer qu'il existe une unique mesure μ sur la tribu des Boréliens $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ vérifiant :

$$\mu\left(\prod_{j=1}^{N}[a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^{N}(b_j - a_j)$$

μ est la mesure de Borel de $\mathbb{R}^N$.
La complétée de cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$.

Autres exemples de mesure :

1) mesure de comptage sur un ensemble X, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(A) = card(A)$
2) mesure de Dirac, $\mu(A) = 1$ si $a \in A$, $\mu(A) = 0$ si $a \notin A$ (A ensemble mesurable).

Propriétés des mesures positives

1) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$.
2) Si A_n est une suite d'ensembles mesurables, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$$

3) Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$ sont mesurables, on a :

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

4) Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables alors :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

5) Si (A_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables tels que $\mu(A_1) < +\infty$, alors on a :

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Exercice : $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ où μ est la mesure de Lebesgue.

Ensembles négligeables - Propriétés vraies presque partout

Définition 4 *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. Si $\mu(A) = 0$ on dit que A est négligeable (pour la mesure considérée).*

Remarque 1 *Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, dans $\mathbb{R}$ ($N = 1$), $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc négligeable car les points sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.*

$$\mu_L([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0, \mu_L([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = 1$$

où μ_L désigne la mesure de Lebesgue.

1.1.3 Fonctions mesurables

On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$

Définition 5 *Une fonction $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty[$ est étagée si elle prend un nombre fini de valeurs distinctes $a_1, \cdots, a_k < +\infty$ et si $B_i = f^{-1}(a_i) \in \mathcal{B}$*

Ecriture d'une fonction étagée : $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \; \mathbb{1}_{B_i}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$, B_i mesurable et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. La fonction $\mathbb{1}_{B_i}$ qui vaut 1 sur B_i et 0 en dehors est la fonction *indicatrice* de B_i.

Définition 6 *Une fonction $F : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable.*

Remarque : on en déduit que l'image réciproque de tout intervalle par une fonction mesurable est mesurable.
Exemple : une fonction continue est mesurable.

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable positive. Alors f est limite simple croissante d'une suite de fonctions étagées.

Démonstration Pour i entier $\in [1, n2^n]$, on note $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}])$ et $F_n = f^{-1}([n, \infty])$. Chacune de ces parties appartient à la tribu $\mathcal{B}$ car f est mesurable. A l'aide des fonctions caractéristiques des ces parties on définit :

$$s_n = \sum_{1 \leq i \leq n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,i}} + n \mathbb{1}_{F_n}$$

qui est une fonction étagée. Quand on passe de n à $n+1$, les intervalles de la nouvelle subdivision de $[0, \infty]$ sont contenus dans les intervalles de la n-ième. Donc la suite s_n est croissante. On vérifie facilement que $s_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour $n \to \infty$; si $f(x) < +\infty$ et $n > f(x)$, s_n est l'approximation inférieure à $\frac{1}{2^n}$ près par un nombre dyadique.

Proposition 1

Le produit et la somme de deux fonctions mesurables à valeurs réelles sont mesurables

Démonstration Si f et g sont deux fonctions mesurables sur X à valeurs réelles, et si Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs rélles, alors la fonction h définie par :

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x))$$

est mesurable. En effet, pour tout nombre réel α, l'ensemble

$$\Omega_\alpha = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \Phi(u,v) > \alpha\right\}$$

est un ouvert, et est donc une rénuion dénombrable de rectangles ouverts

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \quad R_n =]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[.$$

Les ensembles

$$\{x, (f(x), g(x)) \in R_n\} = \{x, a_n < f(x) < b_n)\} \bigcap \{x, c_n < f(x) < d_n)\}$$

sont mesurables, et de même l'ensemble

$$\{x,\ h(x) > \alpha\} = \{x,\ (f(x), g(x)) \in \Omega_x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x,\ (f(x), g(x)) \in R_n\}$$

est mesurable. On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables.

Pour une suite $(a_n) \in [0, \infty]$, $\sup(a_n)$ désigne la borne supérieure dans $[0, \infty]$.
Pour une suite de fonctions $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sup_n f_n$ est la fonction $x \to \sup_n f_n(x)$.

Proposition 2

Soit $f_n : X \to [0, \infty]$, une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \left\{x \in X,\ a < \sup_n f_n < b\right\} &= \left\{x \in X, \sup_n f_n < b\right\} \bigcap \left\{x \in X, a < \sup_n f_n\right\} \\ &\subset \bigcup_n \{x \in X, f_n(x) > a\} \bigcap \bigcup_n \{x \in X, f_n(x) < b\} \end{aligned}$$

qui est mesurable en tant que réunion dénombrable d'ensembles mesurables. On a une égalité identique pour l'inf d'où la conclusion.

Remarque : il est très compliqué de construire des ensembles non mesurables pour la mesure de Lebesgue. Dans la pratique, on considèrera que toutes les fonctions étudiées sont mesurables (sans le démontrer).

1.2 Intégration des fonctions positives

Dans la suite μ désigne une mesure sur $\mathbb{R}^N$.

1.2.1 Définition de l'intégrale

Définition 7 *1) Si $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est une fonction étagée de valeurs distinctes $a_1, a_2, \cdots, a_n$, on note $A_i = f^{-1}(a_i)$ et on pose*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

2) Si $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable, on définit l'intégrale de f par rapport à μ comme l'élément de $[0, \infty]$ donné par la formule suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \sup\{\int_{\mathbb{R}^N} s d\mu, s \text{ est étagée et } s \leq f\}$$

On dira que f est <u>intégrable</u> sur $\mathbb{R}^N$ si cette quantité est finie.

3) Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est mesurable et si $\mathbb{1}_E$ est sa fonction indicatrice, on pose :

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f \mathbb{1}_E d\mu$$

<u>Remarque</u> : au 2), on peut définir de façon équivalente $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_n d\mu$ où (s_n) est une suite croissante de fonctions étagées convergeant simplement vers f (dans ce cas il faut montrer que l'intégrale ne dépend pas du choix de la suite (s_n)).

1.2.2 Propriétés élémentaires

1) Si $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ sont mesurables et si $\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \text{ (croissance de l'intégrale)}$$

2) Si s et t sont deux fonctions étagées, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (s+t) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} s d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} t d\mu$$

3) Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ tel que $\mu(E) = 0$. Alors :

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f\ \mathbb{1}_E\ d\mu = 0$$

Démonstration

1) Si s est étagée $\leq f$, on a $s \leq g$ et donc $\int_{\mathbb{R}^N} s d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$. En prenant la borne supérieure du membre de gauche lorsque s varie parmi les fonctions étagées $\leq f$, on obtient l'égalité voulue.

2) On peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} (s+t) d\mu = \sum_i \sum_j (s_i + t_j) \mu(A_i \bigcap B_j)$$

avec $s = \sum_i s_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $t = \sum_j t_j \mathbb{1}_{B_j}$. On remarque alors que $\sum_i \sum_j (s_i + t_j) \mu(A_i \bigcap B_j) = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \bigcap B_j) + \sum_j b_j \sum_i \mu(A_i \bigcap B_j) = \sum_i a_i \mu(A_i) + \sum_j b_j \mu(B_j) = \int_{\mathbb{R}^N} s d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} t d\mu$, car $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ if $i \neq j$ (idem pour A_i) et $\bigcup B_j = \mathbb{R}^N$.

3) En exercice !

1.2.3 Théorème de convergence monotone

On admet le théorème suivant dit de Beppo-Levi :

Théorème 2 Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^N$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim f_n(x) d\mu = \lim \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) d\mu \leq +\infty$$

Corollaire 1

Linéarité

1) Si f et g sont deux fonctions mesurables $\mathbb{R}^N \to \overline{R_+}$ et α, β deux réels ≥ 0, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$

2) Soit $(f_n) : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurables pour tout n, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu$$

Démonstration

1) On sait qu'il existe des suites croissantes de fonctions positives et étagées telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$. Alors $\alpha f_n + \beta g_n$ est une suite croissante de fonctions étagées et $\lim\limits_{n} \alpha f_n + \beta g_n = \alpha f + \beta g$. Comme on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g_n d\mu$$

Le résultat s'obtient alors en appliquant le théorème de convergence monotone à chacun des membres de l'égalité.

2) Posons $\forall\, x,\ g_j(x) = \sum\limits_{n=0}^{j} f_n(x)$. On a alors $\forall\, x,\ g_j(x) \leq g_{j+1}(x)$ et $\forall\, j,\ g_j : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable. $\forall\, j \in \mathbb{N},\ a_j \geq 0$ donc $\sum\limits_{j\geq 0} a_j$ converge toujours dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. $S_K = \sum\limits_{j=0}^{K} a_j$.

1.2.4 Propriétés des fonctions intégrables positives

Propriétés : Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable. On a :

1)
$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ p.p. } (f(x) = 0 \text{ p.p.})$$

2)
$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu < +\infty \Rightarrow f < +\infty \text{ p.p. } (f(x) < \infty \text{ p.p.})$$

Démonstration

1) Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ f(x) \neq 0\}$

– $(\Leftarrow)$
$\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A(x)$
$$\int_{\mathbb{R}^N} f\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A d\mu \overset{th2}{=} \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A d\mu}_{\mu(A)=0} \text{ car } n\mathbb{1}_A \text{ est croissante.}$$

– $(\Rightarrow)$
$\mathbb{1}_A(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} nf(x)$
$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} nf d\mu \overset{th2}{=} \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, d\mu}_{=0} = 0$$

2) Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ f(x) = +\infty\}$, On a alors $\int_A f d\mu = +\infty$ si $\mu(A) \neq 0$ et 0 sinon. Donc, comme $\int_A f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$, $\mu(A) = 0$.

1.3 Fonctions intégrables

1.3.1 L'espace des fonctions intégrables

Définition 8 *Soit f une fonction mesurable. Si $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$, on dit que f est intégrable (pour la mesure μ) sur $\mathbb{R}^N$ si*
$$\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$$
On appelle intégrale de f le nombre noté $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$ tel que :
$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_+\, d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f_-\, d\mu$$

Remarque : si f est mesurable f_+ et f_- le sont. Par contre si f et g sont mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ la somme $f + g$ n'est pas forcément définie par exemple si $f(x) = +\infty$ et $g(x) = -\infty$. En revanche si f et g sont mesurables et intégrables f et g sont finies presque partout donc $f + g$ est définie presque partout. En posant $\tilde{f} = 0$ là où f est infini, $\tilde{g} = 0$ là où g est infini, $\tilde{f} + \tilde{g}$ a même intégrale que $f + g$ et est mesurable.

Proposition 3

La définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de g et h tel que $f = g - h$ avec $g \geq 0$ et $h \geq 0$

Démonstration On a $f = f_+ - f_-$. Si on pose $f = g - h$, avec$g, h \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \leq +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^N} h d\mu \leq +\infty$, on a $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu$.
Soit $r = g - f_+ = h - f_-$, $r \geq 0$ et $r \leq g$: $0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} r d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \leq +\infty$
On a $\int_{\mathbb{R}^N} g d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} r d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu$ et $\int_{\mathbb{R}^N} r d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu$, d'après la linéarité des fonctions positives. D'où $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu$.

Proposition 4

1) L'ensemble des applications intégrables de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, et l'application $(f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu)$ est une forme linéaire.
2) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telles que $f \leq g$. Alors $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$.
3) Soient $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $|f| \leq g$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.
4) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$
5) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| \, d\mu$.

Remarque : L'ensemble de ces propriétés est vrai pour d'autres mesures que la mesure de Lebesgue.

Démonstration

- Point 1
  $f = g - h$, avec $g \geq 0$ $h \geq 0$ $f' = g' - h'$ avec $f' \geq 0$ and $g' \geq 0$. $f + f' = (g + g') - (h + h')$, $\int_{\mathbb{R}^N} (f + f') d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} (g + g') d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} (h + h') d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} g' d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h' d\mu = \int f d\mu + \int f' d\mu$
- Point 4
  $f = f_+ - f_-$ et $\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$
  $|f| = f_+ + f_-$
  $\int_{\mathbb{R}^N} |f| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$

1.3.2 Intégration sur un sous-ensemble, intégrale p.p.

Définition 9 *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et soit $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On note :*

$$f_A : x \mapsto f_A(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et on pose

$$\int_A f d\mu \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f_A d\mu$$

(f est intégrable sur $A \Longleftrightarrow f_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$).
On note $\mathcal{L}^1(A)$ l'ensemble des applications intégrables sur A.

Remarque 2 *Si f est mesurable et définie sur un ensemble de mesure nulle, alors f est intégrable et $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$.*

Définition 10 *Soit P(x) une propriété faisant intervenir les points x de $\mathbb{R}^N$. On dit que P est vraie presque partout si $\{x \in \mathbb{R}^N; P(x)$ est fausse$\}$ est négligeable.*

Définition 11 *Soit f mesurable définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ mesurable tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}^N \backslash A$, $f(x)$ est défini et $\mu(A) = 0$. Posons :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}^N \backslash A \\ \text{"autre chose"} & si\ x \in A \end{cases}$$

Si $\tilde{f}$ est intégrable, alors tout autre prolongement l'est aussi et l'intégrale est la même (démonstration en exercice). On dit que f est intégrable et on pose

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f} d\mu$$

1.3.3 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

On démontre maintenant le théorème fondamental :

Théorème 3 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que :
(i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p..
(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p.
Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

Démonstration
Posons
$A_n = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ |f_n(x)| > g(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ f_n(x)$ ne tend pas vers $f(x)\}$
$N = B \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n \right)$, N est alors négligeable.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_n(x) &= \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
\tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
\tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$g_n(x) = \left| \tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x) \right|$ et $h_n(x) = \sup_{k\geq n} g_k(x)$
$\forall\, n,\ h_n \geq h_{n+1}; \forall\, n,\ h_n \geq 0$
$h_n(x) \to 0$
$0 \leq h_n \leq 2\tilde{g}$ donc $2\tilde{g} - h_n \geq 0$ et $(2\tilde{g} - h_n)$ est croissante.
Alors, le théorème 2 (page 10) (Beppo-Levi) donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (2\tilde{g} - h_n) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} (2\tilde{g} - h_n) d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g} d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (2\tilde{g} - h_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g} - \int_{\mathbb{R}^N} h_n \right) d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g} d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (h_n) d\mu$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (h_n) d\mu = 0$

1.4 Calcul pratique d'intégrales

Dans cette partie μ désigne la mesure de Lebesgue (également notée dx)

1.4.1 Lien avec l'intégrale de Riemann

Le théorème de convergence dominée permet de retrouver le résultat suivant pour l'intégrale de Lebesgue, et qui est classique pour l'intégrale de Riemann :

Proposition 5

Soit $(f_n) \in C([a, b])$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f \in C([a, b])$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Démonstration $\exists\, C$ tq $\|f\|_\infty \leq C$. Montrons qu'il existe $M > 0 \forall\, n,\ |f_n| \leq M$. En effet, $\exists\, n_0$ tq $\forall\, n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leq 1 \Longrightarrow \|f_n\|_\infty \leq 1 + \|f\|_\infty \leq 1 + C$.
$\forall\, n \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$, $\exists\, C_n$ tq $\|f_n\|_\infty \leq C_n$. On pose alors $M = \max_{0\leq n\leq n_0-1}(1 + C, C_n)$

Maintenant, pour une fonction continue, on a le lien suivant entre les deux intégrales :

Proposition 6

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ et l'intégrale au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ est égale à l'intégrale de Riemann sur $[a,b]$.

Démonstration On démontre la proposition uniquement dans le cas où f est continue. Soit $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ l'intégrale de Riemann. F est une primitive de f. Considérons alors $G(x) = \int_{[a,x]} f(x)d\mu$ où μ est la mesure de Lebesgue, montrons que $G'(x) = f(x)$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} f(t)d\mu \\ &= \int_{[0,1]} f(x+th)d\mu \text{ (formule de changement de variables à la fin du chapitre)}\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de convergence dominée à $t \to f(x+th)$, on obtient $\lim\limits_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$. Donc F et G sont deux primitives de f qui s'annulent en a donc elle sont égales.

Proposition 7

si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors f est mesurable et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

On parle dans ce cas d'intégrale de Riemann semi-convergente

Démonstration $f_n = f\mathbb{1}_{[-n,n]}$. Comme $f \geq 0$, (f_n) est une suite croissante positive de fonctions Lebesque intégrable sur $\mathbb{R}$. et $f_n(x) \to f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(t)dt \text{ d'après la proposition précédente} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ intégrale de Riemann semi-convergente}\end{aligned}$$

Remarques :

1. Si $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = +\infty$ le résultat reste vrai
2. Si f n'est pas positive, la proposition est fausse (cf $\frac{\sin(x)}{x}$)

Exemples :

1. Montrer que $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.
2. Montrer que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

3. $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$. $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. $\forall\, x \geq 0,\ f_n(x) \longrightarrow 0$. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_n = 1$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} f_n = 0$: ne marche pas ! La fonction g du théorème est $g(x) = 1$ sur $\mathbb{R}^+$, qui n'est pas intégrable.

1.4.2 Primitive et intégrale de Lebesgue

Proposition 8

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable alors $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)d\mu$ est dérivable p.p sur $]a,b[$ et $F'(x) = f(x)$.

1.4.3 Intégrales complexes

Définition 12 *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, f = f_1 + if_2, f_1, f_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Soit $f = f_1 + if_2$ f est <u>mesurable</u> $\Longleftrightarrow f_1$ et f_2 sont mesurables.*
f est <u>intégrable</u> $\Longleftrightarrow f_1$ et f_2 sont intégrables, et alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f_1 + i\int_{\mathbb{R}^N} f_2$$

On a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|\, d\mu \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |f+g|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} |g|\, d\mu$$

1.5 L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$

1.5.1 Motivation pour une norme

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Posons $N_1(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f|\, d\mu$, où μ est la mesure de Lebesgue.
On a :

1. $N_1(0) = 0$
2. $\forall\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $N_1(\lambda f) = |\lambda|\, N_1(f)$
3. $\forall\, f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N),\ N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.

Donc on a presque une norme.
Si $N_1(f) = 0$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f = 0$ p.p., donc N_1 n'est pas une norme.

1.5.2 L'espace L^1

Définition 13 *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On dit que $f \sim g$ (f équivalente à g) si et seulement si $f = g$ p.p.. C'est une relation d'équivalence.*
Posons $L^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)_{/\sim} = \{\dot{f}\ ;\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)\}$. On a alors $g \in \dot{f} \Longleftrightarrow f \sim g$.

Proposition 9

$L^1(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel si on pose $\dot{f} + \dot{g} = \dot{\overline{f+g}}$ et $\lambda\dot{f} = \dot{\overline{\lambda f}}$
$\|.\|_1$ est une norme sur $L^1(\mathbb{R}^N)$ si on pose $\left\|\dot{f}\right\|_1 = N_1(f)$.

Proposition 10

$L^1(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel normé complet

Théorème 4

Soient $(f_n), f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors, il existe une suite extraite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. et il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p..

1.5.3 Les espaces L^p

Définition 14 *On peut de même définir* $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $L^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)_{/\sim}$. *On munit* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *de la norme :* $\left\|\dot{f}\right\|_p = N_p(f) = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Définition 15 $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$; f *mesurable et* $\exists\, c \geq 0$ *tq* $|f(x)| \leq c$ *p.p.*$\}$.
$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ *est un espace vectoriel normé.*
Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$, *on pose alors* $N_\infty(f) = \inf\{c \geq 0 / \, |f(x)| \leq c \ pp\}$.

On a :

1. $N_\infty(0) = 0$
2. $N_\infty(\lambda f) = |\lambda|\, N_\infty(f)$
3. $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$
4. $N_\infty(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ p.p.

Définition 16 *On pose* $L^\infty(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)/\sim$ *et* $\left\|\dot{f}\right\|_\infty = N_\infty(f)$.

1.6 Intégrales définies par un paramètre

Théorème 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. Soit f une fonction mesurable définie sur $I \times A$ (en fait définie $\forall t \in I$ et p.p. sur A).
On suppose que $\forall t \in I, (x \mapsto f(t,x)) \in \mathcal{L}^1(A)$ et on pose :

$$F(t) = \int_A f(t,x) d\mu$$

1. Continuité : Sous les hypothèses suivantes :
   (a) x p.p. sur $A, (t \mapsto f(t,x))$ est continue sur I
   (b) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(A)$ tq $\forall\, t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$, x p.p. sur A
   Alors F est continue sur I.
2. Dérivabilité : Sous les hypothèses suivantes :
   (a) x p.p. $(t \mapsto f(t,x))$ est dérivable sur I
   (b) $\exists\, h \in \mathcal{L}^1(A)$ tq $\forall\, t \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq h(x)$, x p.p. sur A
   Alors F est dérivable sur I et :
   $$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$$

Démonstration

1. Soit (t_n) tel que $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$ dans I. $F(t_n) = \displaystyle\int_A f(t_n,x)\, d\mu$. Soit $f_n(x) = f(t_n,x)$, $f_n(x) \longrightarrow f(t,x)$ p.p. sur A et $\forall\, n$, $|f_n| \leq g$ p.p. Le théorème de convergence dominée assure que $F(t_n) \to F(t)$.
2. On considère
   $$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_A \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} d\mu$$
   On a $\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ et $\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial t}(\theta_h, x)$ avec $\theta_h \in]t, t+h[$ donc avec les hypothèses du théorème, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et il vient :
   $$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$$

1.7 Intégrales multiples

1.7.1 Intervertion des intégrales

Soit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et $\mu(x)$,$\mu(y)$ les mesures de Lebesgue resp. sur $\mathbb{R}^{N_1}$ et $\mathbb{R}^{N_2}$.
Dans le cas des fonctions positives on a :

Théorème 6 Théorème de Tonelli ou Fubini≥ 0

Soit f mesurable positive sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$ $y \to f(x,y)$ est mesurable et pour presque tout $y \in \Omega_2$ $x \to f(x,y)$ est mesurable et on a :
(i)

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

(ii) Si ces intégrales sont finies, alors $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Pour les fonctions de signe quelconque intégrables, on a le théorème de Fubini :

Théorème 7 Théorème de Fubini

Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$f(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu(y) \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$f(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus, on a :

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

Application pratique Pour une fonction f de signe quelconque on procède de la façon suivante :
(i) On applique le théorème de Tonelli à $|f|$ pour savoir si $|f| \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ (ce qui est équivalent à $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$).

(ii) Si oui, alors on peut alors appliquer le théorème de Fubini à f pour intervertir l'ordre d'intégration et utiliser le calcul le plus facile.

1.7.2 Changement de variable

Théorème 8 Théorème de changement de variable

Soient U et Ω des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $\phi : U \to \Omega$ un C^1-difféomorphisme (ϕ est une bijection de U sur Ω, $\phi \in C^1(U)$ et $\phi^{-1} \in C^1(\Omega)$). On note pour $x \in U$:

$$J_\phi(x) = \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \le i,j \le N} \qquad \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$$

Soit f une fonction mesurable définie p.p. sur Ω.

1) Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\int_\Omega f(y)\, d\mu(y) = \int_U f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\ d\mu(x)$$

2) Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$,

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Longleftrightarrow (x \mapsto f(\phi(x)) J_\phi(x)) \in \mathcal{L}^1(U)$$

et on a la même égalité.

Chapitre 2

Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

2.1 Introduction

2.1.1 Historique

L'analyse en fréquences apparaît en 1822 dans un traité de Joseph Fourier, la "Théorie analytique de la chaleur". L'équation de la chaleur est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \\ u(\vec{x}, 0) &= \varphi(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ici, u est une fonction de l'espace et du temps : $u(\vec{x}, t)$. Dans le cas où l'espace est un disque, u est définie par : $t \geq 0$, $\vec{x} \in D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}, \|\vec{x}\| \leq 1\}$. u est cherchée sous la forme d'une série de Fourier : $u(r, \theta, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(r, t) e^{in\theta}$.
L'intégrale de Fourier apparaît en 1906 dans la théorie de l'intégration de Lebesgue. Elle permet une analyse en fréquence de certains phénomènes (acoustiques, vibratoires, géophysiques, optiques). Nous détaillons dans ce qui suit quelques propriétés intéressantes de la transformée de Fourier que nous montrerons par la suite.

2.1.2 Intérêt de l'intégrale de Fourier pour la resolution d'équations linéraires

L'intégrale de Fourier, notée F pour l'instant, diagonalise les opérateurs de dérivation, c'est-à-dire :
$\mathcal{F} : u \mapsto \mathcal{F}(u)$
$\mathcal{F} : (\frac{d^k}{dx^k} u) \mapsto (2i\pi\nu)^k \mathcal{F}(u)$

avec $\mathcal{F}$ opérateur et u fonction. L'intégrale de Fourier sert alors à la résolution d'équations différentielles et d'EDP linéaires (Equations aux Dérivées Partielles).

2.1.3 Motivation pour le traitement du signal

Si l'on considère un signal (une fonction) périodique, la série de Fourier donne la décomposition en harmoniques de celui-ci, plus facile à interprêter que le signal lui-même :
$u(x) = \sum c_n(u) e^{in\omega x}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $e^{i\omega x}$ est une harmonique (correspond à la fréquence "pure" $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$).
L'intérêt de l'intégrale de Fourier pour le traitement de signal est lié à l'étude des filtre linéaire.

Un système reçoit en entrée un signal f et émet en sortie un signal g. f et $g = L(f)$ fonctions du temps t.

2 types de problèmes que l'on peut traiter :

1. f et g connus : problème d'identification du système L.
2. f connu et système connu : problème du calcul de g.

en faisant une série d'hypothèses sur L :
– L est linéaire :
$g = L(f)$, $L(f_1 + \lambda f_2) = L(f_1) + \lambda L(f_2)$.
– L est stationnaire (invariant dans le temps).
– L est invariant par translation : $g(t-T) = L(f(t-T))$.
On peut montrer alors que L est alors nécessairement un opérateur de convolution, c'est-à-dire :

$\exists\, h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tq $g(t) = (f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(t-x)dx$

Pour résoudre les problèmes 1 et 2, sous certaines hypothèses sur h et f nous aurons : $F(g) = F(h * f) = F(h)F(f)$, ce qui permet le calcul de la transformée de Fourier de g connaissant h et f (reste alors à pouvoir inverser F pour trouver g) ou connaissant g et f on peut trouver $F(h)$ (qu'il reste encore une fois à inverser pour trouver h).

2.2 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

2.2.1 Théorèmes de densité

Définition 1 *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. On appelle support de f et on note Supp(f) le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel f est nulle.*

$$\mathrm{Supp}\,(f) = \overline{\{x \in \Omega \ ; \ f(x) = 0\}}$$

Définition 2 *On désigne par $C_0(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur Ω à support compact (ensemble fermé borné en dimension finie), c'est-à-dire :*

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \ ; \ \exists\, K compact, K \subset \Omega \ tq\ \forall\, x \in \Omega \backslash K,\ f(x) = 0\}$$

Théorème 1 Théorème de densité

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. $C_0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in \{1,2\}$ ie :

$$\forall\, p \in \{1,2\},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, f \in L^p(\Omega),\ \exists\, g \in C_0(\Omega) \text{ tq } \|f-g\|_p \leq \varepsilon$$

Remarque : Le théorème reste vrai pour les fonctions $C_0^k(\Omega)$, $k \leq \infty$.

2.2.2 Définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 3 (Transformée de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on lui associe $\hat{f}$ telle que :*

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

$\omega = 2\pi\nu$: pulsation ($rad.s^{-1}$), ν : fréquence (Hz) L'application : $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est appelée transformée de Fourier.

2.2.3 Propriété (Théorème de Riemann-Lebesgue)

Théorème 2 de Riemann-Lebesgue

1. $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire, continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
2. si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\nu \to \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

Démonstration

1. – $\mathcal{F}$ linéaire (linéarité de $\int$).

   – Montrons la continuité de $\mathcal{F}$ en 0, autrement dit :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\forall \nu,\ \left|\hat{f}(\nu)\right| \ = \ \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x}\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

   donc $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

2. soit $g \in C_0^1(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions C^1 à support compact, alors

$$\begin{array}{rcl} \hat{g}(\nu) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ & = & \displaystyle\left[g(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} g'(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu} dx \\ |\hat{g}(\nu)| & \leq & \displaystyle\frac{1}{2\pi|\nu|}\int_{\mathbb{R}} \left|g'(x)\right| dx \\ & \xrightarrow[\nu \to \pm\infty]{} & 0 \text{ car } \left\|g'\right\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty. \end{array}$$

   or $C_0^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

d'où : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$
Alors, comme

$$|\hat{f}(\nu)| \leq \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} + |\hat{g}(\nu)|,$$

on obtient $\lim\limits_{\nu \to \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

2.2.4 Exemple

Fonction "porte" : $\Pi = \mathbb{1}_{]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[}$
$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$: sinus cardinal.
En pratique : la représentation graphique de $\hat{f}$ est la représentation en fréquence du signal f, appelé spectre (module et phase).

2.2.5 Propriétés

Proposition 1 du retard

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ \tau \in \mathbb{R}$
Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x - \tau)$. $g \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\forall \nu \in \mathbb{R},\ F(g)(\nu) = \hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\nu\tau}\hat{f}(\nu)$

Remarque 1 *$e^{-2i\pi\nu\tau}$ est un facteur de retard ou déphasage. On a ainsi :*
$\forall \nu \in \mathbb{R},\ |\hat{g}(\nu)| = \left|\hat{f}(\nu)\right|$
et $Arg(\hat{g}(\nu)) = Arg(\hat{f}(\nu)) - 2\pi\nu\tau$

Démonstration Un changement de variable dans l'intégrale de Fourier donne immédiatement le résultat.

Proposition 2

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ a > 0$.
Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(ax)$: $g \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(g(\nu)) = \frac{1}{a} f(\frac{\nu}{a})$$

Remarque 2 *Si f est à support compact : augmenter la taille du support de f (en dilatant f) revient à contracter la fonction $\hat{f}$ et inversement.*

Théorème 3

1. si $x \to x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$ alors $\hat{f}$ est n fois dérivable et on a :
$$\hat{f}^{(k)}(\nu) = \widehat{g_k}(\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$
où $g_k(x) = (-2i\pi x)^k f(x)$
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap C^n(\mathbb{R})$ et si $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a :
$$\widehat{f^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k \hat{f}(\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$
3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si supp(f) est borné, alors $\hat{f} \in C^\infty$.

Démonstration

1. Pour tout $k \leq n$, $\frac{\partial^k f(x)e^{-2i\pi\nu x}}{\partial^k \nu}$ est continue pour tout ν et presque tout x. Par ailleurs, $|\frac{\partial^k f(x)e^{-2i\pi\nu x}}{\partial^k \nu}| = |(-2i\pi x)^k f(x)|$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}$ est de classe C^k dans le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

2. Calculons $\widehat{f'}$. En faisant une intégration par parties il vient que :
$$\widehat{f'}(\nu) = [f(x)e^{-2i\pi\nu x}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(x)(2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu x} dx$$
Remarquons alors que si f est intégrable et C^1 et telle que f' soit intégrable alors
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$
comme f' est intégrable, l'intégrale a une limite lorsque x tend vers $\pm\infty$, donc $f(x)$ admet une limite quand x tend vers l'infini. D'autre part, cette limite est nécessairement nulle car f est intégrable. On a donc $\widehat{f'}(\nu) = (2i\pi\nu)\hat{f}(\nu)$. On conclut en faisant un raisonnement par récurrence.

<u>Exemples de Transformée de Fourier à calculer</u>

- Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f = \chi_{[a,b]}$.
- On note $u(t)$ la fonction égale à 1 si $t > 0$ et 0 sinon (fonction de Heavyside). On note par ailleurs, $sign(t)$ la fonction égale à 1 si $t > 0$ et -1 sinon. On pose par ailleurs un complexe α de partie réelle strictement positive. Calculez alors les transformées de Fourier suivantes :
$$\begin{array}{ll} i) f(t) = e^{-\alpha t}u(t) & ii) f(t) = e^{\alpha t}u(-t) \\ iii) f(t) = e^{-\alpha|t|} & iv) f(t) = \frac{t^k}{k!}e^{-\alpha t}u(t) \\ v) f(t) = \frac{t^k}{k!}e^{\alpha t}u(-t) & vi) f(t) = sign(t)e^{-\alpha|t|} \end{array}$$
- Calcul de $\mathcal{F}(f)$ avec $f : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ (cf. TD) :

Proposition 3

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}g$$

Démonstration Remarquez que le théorème de Fubini s'applique à la fonction $(x, \nu) \to f(x)g(\nu)e^{-2i\pi\nu x}$.

2.3 Inversion de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 4 *Pour toute fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ on note :*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2i\pi\nu x}dx$$

On a alors le théorème d'inversion suivant :

Théorème 4

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est continue au point $x \in \mathbb{R}$ fixé et que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a,
$$\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x) = f(x)$$
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors
$$\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x) = f(x) \text{ pour presque tout } x$$

Démonstration 1) Nous démontrons d'abord le point 1
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}|x|}$, on a $\widehat{g_n}(\nu) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2\nu^2}$. Comme g_n est dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)g_n(\nu)e^{2i\pi x\nu}d\nu = \int_{\mathbb{R}} f(\nu)\widehat{g_n}(\nu - x)d\nu$$

Le membre de gauche tend vers $\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x)$ d'après le théorème de convergence dominée. Montrons que le membre de droite tend vers $f(x)$. comme $\int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}(\nu)d\nu = 1$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} f(\nu)\widehat{g_n}(\nu - x)d\nu - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(\nu + x) - f(x))\widehat{g_n}(\nu)d\nu$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\epsilon, x)$ tel que $|y - x| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$ (f continue en x). On peut alors écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x+\nu) - f(x))\widehat{g_n}(\nu)d\nu = \int_{|\nu|\leq\eta} (f(x+\nu) - f(x))\widehat{g_n}(\nu) + \int_{|\nu|\geq\eta} (f(x+\nu) - f(x))\widehat{g_n}(\nu)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{|\nu|\leq\eta} |f(x+\nu) - f(x)|\widehat{g_n}(\nu)d\nu \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}(\nu)d\nu = \epsilon.$$

De plus,

$$|\int_{|\nu|\geq\eta} f(x)\widehat{g_n}(\nu)|d\nu \leq |f(x)|(1 - \frac{2}{\pi}arctan(\eta n))$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En outre, comme $\widehat{g_n}$ est paire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$$|\int_{|\nu|\geq\eta} f(x+\nu)\widehat{g_n}(\nu)| \leq \widehat{g_n}(\eta)\|f\|_1,$$

cette expression tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le théorème est donc démontré.
2) Nous démontrons ensuite le point 2. On multiplie l'intégrante par $\hat{h}_\epsilon(\nu) = e^{-\pi\epsilon^2\nu^2}$:

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-\pi\epsilon^2\nu^2} e^{2i\pi\nu(x-u)}du)d\nu$$

on a $(u,\nu) \to \phi(u,\nu) = f(u)e^{-\pi\epsilon^2\nu^2}e^{2i\pi\nu(x-u)} \quad \in L^1(\mathbb{R}^2)$. On va pouvoir appliquer Fubini pour donner deux expressions de I_ϵ :
i) On intègre par rapport à u :

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{-\pi\epsilon^2\nu^2}e^{2i\pi\nu x}d\nu$$

Or $|\hat{f}(\nu)e^{-\pi\epsilon^2\nu^2}e^{2i\pi\nu x}| \leq |\hat{f}(\nu)|$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{\epsilon\to 0} e^{-\pi\epsilon^2\nu^2} = 1$. Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x}dx$.

ii) on intègre par rapport à v :

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\epsilon^2\nu^2}e^{2i\nu(x-u)}d\nu\right)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{1}{\epsilon}e^{-\pi(\frac{x-u}{\epsilon})^2}du, \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés des transformées de Fourier des Gaussiennes et la formule de dilatation. Par ailleurs on sait que la fonction $h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}e^{-\pi(\frac{x}{\epsilon})^2}$ est d'intégrale égale à 1. On peut donc en déduire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |I_\epsilon(x) - f(x)| &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |(f(x-u) - f(x))h_\epsilon(u)|du \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-\epsilon u) - f(x)|h_\epsilon(u)du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f(x-\epsilon u) - f(x)\|_1 h(u)du \end{aligned}$$

Dans $L^1(\mathbb{R})$, nous avons la propriété suivante :

Proposition 4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$. On pose $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Alors $\tau_h h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0$.

Démonstration La démonstration utilise la densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$. En effet, soit g_n une suite de fonctions continues à support compact tendant vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N \; \|f - g_n\|_1 \leq \epsilon$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta) - g_n(x+\eta)| + \int_{\mathbb{R}} |g_n(x+\eta) - g_n(x)| + \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - f(x)|$$

Considérons N tel que $|f - g_N| \leq \frac{\epsilon}{3}$ puis η tel que $\|g_N(x+\eta) - g_N(x)\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3}$ (Théorème de convergence dominée), d'où le résultat.

Comme $\|f(x - \epsilon u) - f(x)\|_1 |h(u)| \leq 2\|f\|_1 |h(u)|$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit en appliquant le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|I_\epsilon - f\|_1 = 0$$

Donc I_ϵ tend vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ donc il existe une sous suite $I_{\phi(\epsilon)}$ convergeant vers f presque partout, d'où le résultat.

2.4 Produit de convolution et principe du filtrage

On va d'abord présenter des propriétés de la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$, puis on s'intéressera aux propriétés de la transformée de Fourier relativement aux problèmes de filtrage linéaire.

2.4.1 Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème 5 et définition

$f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$.
Alors $(f \star g)$ est défini presque partout , intégrable et $\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Démonstration Appliquons le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \, dx \right) dy \tag{2.1}$$

Et par changement de variable $u = x - y$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} (2.1) &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| \, du \right) dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty \end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}} |g(u)| \, du = \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Donc $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| \, dy$ est intégrable donc finie presque partout. Donc $(f \star g)$ est définie presque partout, intégrable et :

$$\int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| \, dx \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Proposition 5

Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$.
– $f \star g = g \star f$
– $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$
– $(f + g) \star h = f \star h + g \star h$

Remarque 3 *Pas d'élément neutre pour $\star$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (cf TD).*

2.4.2 Exemple de filtrage : les moyennes glissantes

Soit f une fonction de $x \in \mathbb{R}$. En chaque point x, on remplace $f(x)$ par sa moyenne $\bar{f}(x)$ sur un intervalle de longueur τ :

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\tau} \int_{x-\frac{\tau}{2}}^{x+\frac{\tau}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-\frac{\tau}{2};x+\frac{\tau}{2}]}(t) f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} h(x-t)f(t)dt$$

où $h : u \mapsto \frac{1}{\tau} \mathbb{1}_{[-\frac{\tau}{2};\frac{\tau}{2}]}$ est appelée fenêtre carrée et $\bar{f}(x) = (h \star f)(x)$.

En pratique :
– Choix d'une fenêtre plus régulière.
– Choix de τ : problème d'échelle sur les phénomènes dans f que l'on souhaite conserver où lisser.

2.4.3 Convolution et transformée de Fourier

On étudie maintenant comment la transformée de Fourier peut nous aider à résoudre les problèmes d'identication de systèmes linéaires.

Théorème 6 : Convolution et transformée de Fourier

i) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f \star h)(\nu) = \hat{f}(\nu)\hat{h}(\nu)$.
ii) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in L^1(\mathbb{R})$ tels que $\hat{f}$ et $\hat{h}$ soient aussi dans $L^1(\mathbb{R})$ Alors pour presque tout ν, on a : $\hat{f} \star \hat{h} = \mathcal{F}(fh)$

Exemple 1 $\mathcal{F}(\bar{f})(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{f}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\hat{f}(\nu)$.

$\hat{h}$ est appelée fonction de transfert. On peut alors adapter $\frac{1}{\tau}$ à la bande de fréquences "utile" du signal f.

Démonstration i) Appliquons le théorème de Tonelli : $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|\, dy \right) \left| e^{-2i\pi\nu x} \right| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty$
car $\left| e^{-2i\pi\nu x} \right| = 1$. Nous pouvons alors appliquer le théorème de Fubini :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-2i\pi\nu x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-2i\pi\nu(x-y+y)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi\nu y} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2i\pi\nu(x-y)} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi\nu y} \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-2i\pi\nu u} du \right) dy = \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu)
\end{aligned}
$$

ii) Comme $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ nous avons d'après ce qui précède, en remarquant que $\overline{\mathcal{F}}$ a les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}(\hat{f} \star \hat{g}) &= \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})\overline{\mathcal{F}}(\hat{g}) \\
&= fg \text{ p.p.}
\end{aligned}
$$

comme $f = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})$, f est bornée donc on peut considérer la transformée de Fourier de fg pour finalement obtenir : $\hat{f} \star \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$.

Chapitre 3

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous avons vu au chapitre précédant que l'étude de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ présente des inconvénients notant en terme d'inversion. Dans ce qui suit, nous allons voir comment l'on peut définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ comme une application bijective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 L'espace $L^2(\mathbb{R})$

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on rappelle que $L^2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $< f|g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$ et que la norme sur $L^2(\mathbb{R})$ est définie par : $\|f\|_2 = \sqrt{< f|f >}$
Remarque : $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert dans lequel on a le théorème de Cauchy-Schwarz :

Théorème 1 (Cauchy-Schwarz)

Soit f et g appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, on a la propriété suivante :

$$|\int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{g}(t)| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f|^2(t)dt}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g|^2(t)dt}$$

3.2 Convolution dans $L^2(\mathbb{R})$

On appelle convolution dans $L^2(\mathbb{R})$ l'application définie pour toute fonction f et g de $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2

i) $F \in C^0(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$
ii) F est continue

Démonstration i) ce point est une application directe du théorème de Cauchy-Schwarz
ii) Pour le point 2)

$$\begin{aligned}|F(x+\eta)-F(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} (f(x+\eta-y)-f(x-y))\,g(y)|dy \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta-y)-f(x-y)|^2 dy}\ \|g\|_2\end{aligned}$$

Le terme dépendant de η tend vers 0 avec η (on utilise pour le démontrer la densité des applications continues à support compact dans $L^2(\mathbb{R})$, voir la démonstration analogue du chapitre 2). Donc f est continue en x.

Exemple : la corrélation dans $L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\bar{f}(t)dt = \check{f} \star \bar{f}(-x),$$

donc est continue.

3.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

3.3.1 L'espace $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$

Théorème 3 (Plancherel-Parseval)

Soit f et h appartenant à $L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^1(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{h(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)}d\nu$$

Si $f = h$, on a la propriété suivante : $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$

Démonstration On commence par démontrer que la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ en montrant que $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.
Considérons maintenant $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ dont la transformée de Fourier est $\hat{g}_\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathbf{e}^{-\frac{\pi^2 \mathbf{x}^2}{\alpha}}$. Par application du théorème de convergence monotone on a :

$$\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 \underset{\alpha\to 0}{\to} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \leq +\infty$$

car $g_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2$ est positive, appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et est croissante lorsque α décroit.
Par ailleurs, comme la fonction $(x,u,y) \to f(y)\overline{f(u)}e^{i2\pi x(u-y)}g_\alpha(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^3)$ (en appliquant

le théorème de Tonnelli).

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} \overline{f(u)}\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi x(y-u)} g_\alpha(x)dxdydu\\ = \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} \overline{f(u)}\hat{g}_\alpha(y-u)dydu &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y+u)\overline{f(u)}du\ \hat{g}_\alpha(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} G(y)\hat{g}_\alpha(y)dy = \int_{\mathbb{R}} G(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}y)e^{-\pi y^2}dy\\ &\underset{\alpha\to 0}{\to} G(0) = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

la limite s'obtenant en appliquant le théorème de convergence dominée.
Nous savons donc que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.
Nous allons maintenant démontrer la formule de Plancherel. Soit f et h dans $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$. $\hat{f}\overline{\hat{h}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ en tant que produit de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Par ailleurs, si l'on pose $\check{h}(t) = \bar{h}(-t)$ on a $\mathcal{F}(f*\check{h}) = \hat{f}\overline{\hat{h}}$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème d'inversion de la transformée de Fourier et comme $f*\check{h}$ est continue en tant que convolution de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, on a $f*\check{h}(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\overline{\hat{h}})(x)$, pour tout x. En considérant la valeur en $x=0$, on obtient l'égalité de Plancherel.

3.3.2 Définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Proposition 1

L'espace $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration Soit la suite $f_N(x) = \chi_{[-N,N]}(x)f(x)$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$, on vérifie que f_N tend vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Considérons une suite f_N de fonctions de $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous avons vu que $\hat{f}_N$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, d'autre part $\hat{f}_N$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ puisque

$$\|\hat{f}_N - \hat{f}_P\|_2^2 = \int_{N\geq x\geq P} |\hat{f}_N - \hat{f}_P|^2 \to 0 \text{ quand P tend vers l'infini.}$$

On définit $\hat{f}_\infty$ la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de $\hat{f}_N$.
Il faut montrer que cette limite est indépendante du choix de la suite f_N tendant vers f. Il est facile de voir que cela provient de l'égalité de Parseval. En effet, soit f_N et $\tilde{f}_N$ de $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ tendant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ alors :

$$\|f_N - \tilde{f}_N\|_2 = \|\hat{f}_N - \widehat{\tilde{f}_N}\|_2 \to 0,$$

donc les transformées de Fourier ont la même limite dans $L^2(\mathbb{R})$.
On a alors la définition suivante :

Définition 1 *La transformée de Fourier d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ est définie comme la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la transformée de Fourier de toute suite f_N de $L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ tendant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.*

On notera par la suite $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f quand f est dans $L^2(\mathbb{R})$.
Remarque : comme on a le choix de la suite, on prend $f_N = \chi_{[-N,N]}f$.

3.4 Propriété de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 4

La transformation de Fourier (resp $\overline{\mathcal{F}}$) se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Désignons toujours par $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$, ces prolongements, on a alors :

- $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(f) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f$ presque partout.
- $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}}(g)d\xi$
- $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$

Démonstration La démonstration découle de la densité de $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (les égalités étant vraies dans $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$, elles le sont aussi dans $L^2(\mathbb{R})$).

Chapitre 4

Théorie élémentaire des distributions

La théorie des distributions a été définie par L. Schwartz en 1947. Elle permet de donner un cadre théorique et rigoureux à des calculs formels effectués par Heaviside dès 1896 et par Dirac en 1926 : pour étudier des phénomènes de propagation, les physiciens ont manié des objets, comme la "*fonction* δ" de Dirac, avec les mêmes règles opératoires que celles qui régissent les fonctions. Or ces objets ne peuvent être des fonctions. La théorie des distributions, extension de la notion de fonction, a permis de fonder ces calculs et d'en préciser le maniement (une application est donnée dans le chapitre sur l'échantillonnage des fonctions en traitement du signal).

La théorie des distributions va permettre en outre de dériver des fonctions qui n'ont pas de dérivée au sens classique. C'est l'outil de base pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

4.1 L'espace des fonctions test

4.1.1 Notations

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
Un point de $\mathbb{R}^N$ est noté $x = (x_1, \ldots, x_N)$.
Pour tout N-uplet d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ on note $|\alpha|$ sa longueur :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

et $\alpha!$ sa factorielle :

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on note :

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_N^{\alpha_N}$$

Toute dérivée partielle sera notée :

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Ces conventions permettent décrire les formules de Taylor et de Leibniz sous la même forme que dans $\mathbb{R}$:

Formule de Taylor dans $\mathbb{R}^N$: Soit φ une fonction de classe C^{n+1} dans $\mathbb{R}^N$:

$$\varphi(x+h) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha \varphi(x) + o(\|h\|^n)$$

Formule de Leibniz dans $\mathbb{R}^N$

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}\right) \partial^\beta f\ \partial^{\alpha-\beta} g$$

avec $f, g \in C^\infty(\Omega)$; $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\left(\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}\right) = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$; $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_N!$.
L'inégalité $\beta \leq \alpha$ signifie : $\forall i = 1,\ldots N,\ \beta_i \leq \alpha_i$.

4.1.2 Support d'une fonction

Définition 1 *Soit φ une fonction continue définie sur Ω. On appelle support de φ et on note* $\mathrm{Supp}\,(\varphi)$ *la fermeture (dans Ω) de l'ensemble des points o φ est non nulle.*

Une définition équivalente : le complémentaire (dans Ω) du support d'une fonction φ est le plus grand ouvert (dans Ω) sur lequel φ est nulle.

4.1.3 Définition des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2 *On note $\underline{\mathcal{D}(\Omega)}$ (ou encore $C_0^\infty(\Omega)$) l'ensemble des fonctions définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivables et à support compact.*

$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque 1 *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.* $\mathrm{Supp}\,(\varphi)$ *est compact et* $\mathrm{Supp}\,(\varphi) \subset \Omega$.
Posons : $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathrm{Supp}\,(\varphi) \\ \varphi(x) & si\ x \in \mathrm{Supp}\,(\varphi) \end{cases}$

alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Exemple 1 $\varphi(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{1-\|x\|^2} & si\ \|x\| < 1 \\ 0 & si\ \|x\| \geq 1 \end{cases}$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}\,(\varphi) = \mathcal{B}'(0,1)$

Théorème 1

Pour tout $\delta > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tel que : $\varphi(x) = 1$ pour $\|x\| \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $\|x\| \geq 1 + \delta$.

4.1.4 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 3 *Soient φ_n et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
On dit que φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :
– $\exists K$ compact, $K \subset \Omega$ tel que $\forall\, n$, $\operatorname{Supp}(\varphi_n) \subset K$
– $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \varphi_n \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément.

4.2 Définition des distributions

4.2.1 Définition

Définition 4 *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire :*

(i) $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $T(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2)$

(ii) Si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$ dans $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω ; c'est un espace vectoriel.
On note $\langle T, \varphi\rangle$ ou $T(\varphi)$.
Exemples

1. On note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω, intégrables sur tout compact de Ω.
   Par exemple, $\frac{1}{\sqrt{|x|}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
   Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on pose :
   $$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx$$
   $Tf \in \mathcal{D}'(\Omega)$:
   – T_f est bien définie puisque
   $|f(x)\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty\, \mathbb{1}_{\operatorname{Supp}(\varphi)}(x)|f(x)| \in\ L^1(\Omega)$
   – T_f est linéaire (linéarité de l'intégrale).
   – T_f est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$:
   Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.
   $|\langle Tf, \varphi_n\rangle| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx\right| \leq \int |f(x)|\, |\varphi_n(x)|\, dx \leq \|\varphi_n\|_\infty \int_K |f(x)|\, dx$
2. Soit $a \in \mathbb{R}^N$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ on pose :
   $$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$
   $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   – Linéarité :
   $\langle \delta_a, \varphi_1 + \lambda\varphi_2\rangle = (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(a) = \varphi_1(a) + \lambda\varphi_2(a) = \langle \delta_a, \varphi_1\rangle + \lambda\langle \delta_a, \varphi_2\rangle$
   – Continuité :
   Si $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$: $|\langle \delta_a, \varphi_n\rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \longrightarrow 0$
   Quand $a = 0$, on note $\delta = \delta_0$.

3. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, posons :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, dx$$

Si $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$: soit K compact tel que $\forall\, n$, $\mathrm{Supp}\,(\varphi_n) \subset K$.

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq \left\| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \right\|_\infty \int_K |f(x)|\, dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Proposition 1

L'application de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui à f associe T_f est linéaire et injective.

Démonstration

– $\forall\, f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $T_{f_1 + \lambda f_2} = T_{f_1} + \lambda T_{f_2}$
  En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
  $\langle T_{f_1+\lambda f_2}, \varphi \rangle = \displaystyle\int_\Omega (f_1 + \lambda f_2)\, \varphi = \int_\Omega f_1 \varphi + \lambda \int_\Omega f_2 \varphi = \langle T_{f_1}, \varphi \rangle + \lambda \langle T_{f_2}, \varphi \rangle$

– Si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_f, \varphi \rangle = \displaystyle\int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = 0$, alors $f = 0$

Remarque 2 *L'application définie dans la proposition 1 n'est pas surjective. Elle permet d'identifier $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qu'on appelle les distributions régulières.*

4.2.2 Convergence des distributions

Définition 5 *On dit que la suite de distributions $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$.*

On dit qu'une série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} T_n$ converge et a pour somme T si la suite $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} T_n$ converge vers T.

Exemples 2

1. *Soit $f_n(x) = \cos(nx)$, $f_n \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. $T_{f_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*
   $\lim\limits_{n \to +\infty} T_{f_n} = 0$ *(car $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int \cos(nx) \varphi(x) dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$).*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) = 0$ pour n grand (car φ à support compact).

4.2.3 Support d'une distribution

Définition 6 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle sur ω si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Exemple 3 *Soit $a \in \mathbb{R}^N$. δ_a est nulle sur $C_{\mathbb{R}^N}\{a\} = \mathbb{R}^N \setminus \{a\}$. Si $\omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et $a \notin \omega$, δ_a est nulle sur ω.*

Définition 7 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le support de T, noté $\mathrm{Supp}\,(T)$, est le complémentaire (dans Ω) du plus grand ouvert ω sur lequel T est nulle.*

On peut montrer que ω existe.

Exemple 4 $\mathrm{Supp}\,(\delta_a) = \{a\}$

Définition 8 *On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions à support compact (dans Ω).*

Si $f \in C(\Omega)$ et $\mathrm{Supp}\,(f)$ est compact, $T_f \in \mathcal{E}'(\Omega)$.
$\mathcal{E}'(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 2

Soit $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.
Si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\langle T_n, \varphi \rangle$ a une limite dans $\mathbb{C}$, alors T_n a une limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

– $\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ est linéaire.
  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  $\lim\limits_{n\to+\infty} (\langle T_n, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle) = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle T_n, \varphi_2 \rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi_1 \rangle + \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi_2 \rangle$

– La continuité de $\lim T_n$ est une conséquence du théorème de Banach Steinhaus (admis)

Exemple 5 $\forall\, n,\ T_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \delta_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ tq $\mathrm{Supp}\,(\varphi) \subset [-n_0, n_0]$.
$$\langle T_n, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{n_0} \varphi(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{p=0}^{n_0} \varphi(p)$$
donc, il existe $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $T = \sum\limits_{p\geq 0} \delta_p$.

4.3 Opérations sur les distributions

Le but : étendre aux distributions certaines opérations définies sur les fonctions.
Les conditions :

1. La nouvelle définition doit coïncider avec l'ancienne pour les fonctions.
2. Continuité au sens des distributions des opérations définies.

4.3.1 Dérivation des distributions

Soit $f \in C^1(\Omega)$ et soit $1 \leq j \leq N$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx$$

$$\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi\rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle$$

Pour les distributions on a :

Proposition 2 (et définition)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq j \leq N$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi\rangle \overset{def}{=} -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle$$

Démonstration La linéarité est évidente, Si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, d'où la continuité de $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ et donc $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ appartient à $\mathcal{D}'(\Omega)$

Proposition 3

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1. Pour $1 \leq j \leq \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

   Pour $1 \leq j, k \leq N$ on a : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}$
2. T est indéfiniment dérivable et on a :
   $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$

Démonstration (du 1))
– Soit φ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi + \lambda\psi\rangle &= -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi + \lambda\psi)\rangle \\
&= -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\rangle \\
&= -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle - \lambda\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\rangle \\
&= \langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi\rangle + \lambda\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \psi\rangle
\end{aligned}$$

– Soit $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. D'après la remarque **??** (page **??**), $\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On a : $\langle \dfrac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi_n \rangle = -\langle T, \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \rangle \longrightarrow 0$

– Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k}, \varphi \rangle &= -\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle \\
&= \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \rangle = \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \rangle \\
&= -\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Proposition 4

La dérivation est continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Si $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T_n \longrightarrow \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle$

Remarque 3 *Toute fonction continue et même localement intégrable a des dérivées de tous les ordres (en tant que distribution) : ces dérivées ne sont pas en général des fonctions*[1].

Exemple 6 *Si* $f \in C^1(\Omega)$: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(T_f) = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$
Dans ce cas la dérivée est encore une dérivation régulière.

Exemples 7

1. *On prend pour* T *la fonction d'Heaviside définie par :* $Y(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$

   $Y \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, *donc* Y *définit une distribution* $T_Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *(elle est dérivable).*
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
   $\langle Y', \varphi \rangle = -\langle Y, \varphi' \rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$
   Donc $Y' = \delta$.
2. *Posons* $f(x) = \ln|x|$ *pour* $x \neq 0$.
   $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ *donc* f *définit une distribution de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\varphi'(x)dx$
   Il existe $M > \varepsilon$ *tel que* $\mathrm{Supp}\,(\varphi) \subset [-M, M]$.

[1] i.e : des distributions de la forme T_f

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_{\varepsilon}^{M} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{-M}^{-\varepsilon} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= f(x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^{M} - \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(x)}{x}dx + f(x)\varphi(x)]_{-M}^{-\varepsilon} - \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \underbrace{-\varphi(\varepsilon)\ln(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon)}_{\longrightarrow 0} - \int_{\varepsilon\leq|x|} \frac{\varphi(x)}{x}dx
\end{aligned}$$

En effet : $(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon) = 2\varepsilon\varphi'(\theta)\ln(\varepsilon)$ *où* $\theta \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,

d'où : $|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon)| \leq 2\,\|\varphi\|_\infty\,|\varepsilon\ln(\varepsilon)| \longrightarrow 0$

On a donc : $\langle f', \varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle$ *c'est-à-dire* $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Définition 9 *Soient* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p < a_{p+1} = b$ *des points de* $\mathbb{R}$. *Soit* f *une application définie sur* $]a, b[\setminus\{a_1, \ldots, a_p\}$.

On dit que f *est de* <u>*classe* C^k *par morceaux*</u> *si* $\forall\, j \in \{1, \ldots, p\}$, f *a des dérivées jusqu'a l'ordre* k *sur* $]a_j, a_{j+1}[$ *et si ces dérivées se prolongent continûment sur* $]a, a_1]$, $[a_j, a_{j+1}]$ *pour* $1 \leq j \leq p-1$ *(si* $p \geq 2$*) et sur* $[a_p, b[$.

On note $f(a_i \pm 0)$ *les limites à droite et à gauche en* $a_i, i = 1, \ldots, p$.

Théorème 3 Formule des sauts

Soit f de classe C^1 par morceaux sur $]a, b[$. On a :

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{p}(f(a_i+0) - f(a_i-0))\delta_{a_i}$$

où f' désigne la dérivée de f au sens des distributions (c'est-à-dire $(T_f)'$) et $\{f'\}$ désigne la distribution définie par la dérivée de f en dehors des points a_i, $1 \leq i \leq p$.

Exemple 8 $Y' = \{0\} + \delta = \delta$

Démonstration

Pour $p = 1$: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$.

$$
\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_a^{a_1} f\varphi' - \int_{a_1}^b f\varphi' \\
&= -\lim_{n\to+\infty} \int_a^{a_1-1/n} f\varphi' - \lim_{n\to+\infty} \int_{a_1+1/n}^b f\varphi' \\
&= -\lim_{n\to+\infty} \left[f\left(a_1 - \frac{1}{n}\right) \varphi\left(a_1 - \frac{1}{n}\right) - \int_a^{a_1-1/n} f'\varphi \right] \\
&\quad - \lim_{n\to+\infty} \left[-f\left(a_1 + \frac{1}{n}\right) \varphi\left(a_1 + \frac{1}{n}\right) - \int_{a_1+1/n}^b f'\varphi \right] \\
&= \varphi(a_1)\left(f(a_1+0) - f(a_1-0)\right) + \underbrace{\int_a^{a_1} f'\varphi + \int_{a_1}^b f'\varphi}_{\int_a^b f'\varphi}
\end{aligned}
$$

4.3.2 Multiplication par les fonctions C^∞

- La multiplication de deux distributions quelconques n'est pas possible en général.
  Contre-exemple : $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $f, g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Donc $T_f, T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais $(fg)(x) = \frac{1}{|x|} \notin \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$.
- Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $f \in C^\infty(\Omega)$.
  Cas particulier :
  Si $T = T_g$, $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$: $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle fg, \varphi \rangle = \int_\Omega fg\varphi = \langle g, f\varphi \rangle$
  Cas général :
  On pose : $\langle fT, \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle T, f\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
  La formule a un sens, car $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 5

Avec les notations ci-dessus : $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

- Linéarité :
$$
\begin{aligned}
\langle fT, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle &= \langle T, f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \rangle &&= \langle T, f\varphi_1 + \lambda f\varphi_2 \rangle \\
&= \langle T, f\varphi_1 \rangle + \lambda \langle T, f\varphi_2 \rangle &&= \langle fT, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle fT, \varphi_2 \rangle
\end{aligned}
$$
- Continuité :
  D'après la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g$$

avec $f, g \in C^\infty(\Omega)$; $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$; $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_N!$.
Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi_n \longrightarrow 0$. On a : $f\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.
$\exists K$ compact, $K \subset \Omega$ tel que $\forall\, n$, $\mathrm{Supp}\,(\varphi_n) \subset K$. Alors $\mathrm{Supp}\,(f\varphi_n) \subset K$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(f\varphi_n)| &= \left| \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta}\varphi_n \right| \\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \sup_{x\in K} \left|\partial^\beta f(x)\right| \left\|\partial^{\alpha-\beta}\varphi_n\right\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Exemples 9

1. *Soit $a \in \Omega$, $f \in C^\infty(\Omega)$, on a $f\delta_a = f(a)\delta_a$:*
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle f\delta_a, \varphi\rangle \overset{def}{=} \langle \delta_a, f\varphi\rangle = f(a)\varphi(a) = f(a)\langle\delta_a,\varphi\rangle$
2. $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ *:*
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle &= \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)dx \\ &= \int \varphi(x)dx \\ &\quad \textit{(par le th. de convergence dominée)} \\ &= \langle 1, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Exercice Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que : $xT = 0$.

Proposition 6

1. Soient $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$.
   Si $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $fT_n \longrightarrow fT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
2. Soient $f_n, f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
   Si $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha f_n \longrightarrow \partial^\alpha f$ uniformément sur tout compact de Ω, alors $f_nT \longrightarrow fT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
   $\langle fT_n, \varphi\rangle = \langle T_n, f\varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, f\varphi\rangle = \langle fT, \varphi\rangle$
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
   $\langle f_nT - fT, \varphi\rangle = \langle T, (f_n - f)\varphi\rangle \longrightarrow 0$ car $(f_n - f)\varphi \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Remarque 4 *Si $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \partial^\alpha f_n \longrightarrow \partial^\alpha f$ uniformément sur tout compact (avec les notations de la proposition 5) alors $f_n T_n \longrightarrow fT$.*

Proposition 7

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$(fT)' = f'T + fT'$$

(Ceci est vrai, à tous les ordres, et en dimension ≥ 2 : formule de Leibniz)

Démonstration
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} \langle (fT)', \varphi \rangle &=& -\langle fT, \varphi' \rangle = -\langle T, f\varphi' \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \langle f'T + fT', \varphi \rangle &=& \langle f'T, \varphi \rangle + \langle fT', \varphi \rangle &=& \langle T, f'\varphi \rangle + \langle T', f\varphi \rangle \\ &=& \langle T, f'\varphi \rangle - \langle T, (f\varphi)' \rangle &=& \langle T, f'\varphi \rangle - \langle T, f'\varphi + f\varphi' \rangle \\ &=& -\langle T, f\varphi' \rangle && \end{array}$$

4.4 Convolution d'une fonction et d'une distribution : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) * \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Définition 10 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T * \varphi)(x) \overset{def}{=} \langle T, \varphi(x - .) \rangle \quad \text{où } \varphi(x - .) : y \mapsto \varphi(x - y)$$

La définition est consistante, car à x fixé, $y \mapsto \varphi(x - y)$ est C^∞, à support compact, c'est donc une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Théorème 4

oit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{cccl} \textit{Alors} \quad x & \mapsto & (T * \varphi)(x) & \textit{est une } \underline{\textit{fonction}}, \textit{ continue, } C^\infty \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} & \end{array}$$

Et on a : $\forall p \in \mathbb{N}, (T * \varphi)^{(p)}(x) = (\frac{d^p T}{dx^p} * \varphi)(x) = (T * \varphi^{(p)})(x)$

Démonstration

Continuité :

$$(T * \varphi)(x + h) - (T * \varphi)(x) = \langle T, \underbrace{\varphi(x + h - \cdot) - \varphi(x - \cdot)}_{\varphi_{x,h}(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})} \rangle$$

On a : $\varphi_{x,h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($\varphi_{x,h}$ *et* $\varphi_{x,h}^{(p)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$) uniformément sur tout compact.
T est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $\lim_{h \to 0}[(T * \varphi)(x + h) - (T * \varphi)(x)] = 0$.

Dérivabilité : On procède au même raisonnement pour :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[(T*\varphi)(x+h)-(T*\varphi)(x)] = \langle T, \frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}\rangle &\xrightarrow[h\to 0]{} \langle T, \varphi'(x-y)\rangle \\ &= (T*\varphi')(x)\end{aligned}$$

Donc $T*\varphi$ est dérivable et $(T*\varphi)'(x) = (T*\varphi')(x)$.
De plus,

$$\frac{dT}{dx}*\varphi = \langle \frac{dT}{dx}, \varphi(x-.)\rangle = -\langle T, [\varphi(x-.)]'\rangle = \langle T, \varphi'(x-.)\rangle = T*\varphi'$$

Exemples 10

–
$$(\delta*\varphi)(x) = \langle \delta, \varphi(x-.)\rangle = \varphi(x)$$

d'o : $\delta*\varphi = \varphi$. δ est l'élément neutre pour $*$.

–
$$(\delta_a*\varphi)(x) = \langle \delta_a, \varphi(x-.)\rangle = \varphi(x-a)$$

Remarque 5

– *$*$ est une opération régularisante.*
– *Si $T = \{f\}$ avec $f \in L^1_{loc}(R)$, alors $f*\varphi$ est C^∞ si φ est C^∞ (cette propriété sert dans la démonstration de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$).*

Chapitre 5

Transformée de Fourier des Distributions

La transformée de Fourier des distributions va être définie pour un sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, appelées distributions tempérées qui seront définies comme l'ensemble des formes linéaires continues sur l'espace de Schwartz que nous introduisons dans un premier temps.

5.1 L'espace de Schwartz

Définition 1 *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que :*
– $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$
– $\forall p, n \in \mathbb{N}, \exists C$ *tel que* $|\phi^{(p)}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^n}$ *(décroissance rapide)*

Autrement dit, les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont les fonctions C^∞ dont les dérivées de tout ordre sont à décroissance rapide.
Exemple : $\phi(x) = e^{-x^2}$

Théorème 1 *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a les propriétés suivantes :*

1. $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
2. $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \phi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
3. $\forall p \geq 1 \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$

Théorème 2 *De plus, $\mathcal{F}$ est une bijection (linéaire) de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même et d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.*

Preuve : Soit f appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, comme pour tout k, $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\xi^n \hat{f}^{(p)}(\xi) = \xi^n \mathcal{F}((-2i\pi x)^p f(x)) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \mathcal{F}(((-2i\pi x)^p f(x))^{(n)}).$$

En utilisant les propriétés de stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par produit par un polynôme et par dérivation, on obtient que la fonction dont on prend la transformée de Fourier est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier est bornée, ce qui prouve le résultat.

Par ailleurs, comme f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et que f est continu, on a $f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x)$. Comme $\overline{\mathcal{F}}f = (\mathcal{F}f)_\sigma$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ où $f_\sigma(x) = f(-x)$, on obtient $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}((\mathcal{F}(f))_\sigma) = (\mathcal{F}\mathcal{F}f)_\sigma = f$. ■
En remarquant que l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et en utilisant le lemme 1 du chapitre précédent sur la densité de telles fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Remarque : On peut munir l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'une norme que nous introduirons en temps utile.

5.2 Distributions Tempérées

Nous avons besoin de définir la transformée de Fourier dans un cadre plus général pour donner un sens à la transformée de Fourier de signaux échantillonnés qui sont les signaux rencontrés en pratique.

5.3 Les distributions tempérées

définition 2 *On appelle distributions tempérées l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*

Théorème 4 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Preuve : Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si T est linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ elle est aussi linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour définir la continuité de T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous avons besoin de la notion de convergence vers 0 dans cet espace qui est définie de la manière suivante :

$$\Phi_n \to 0 \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \Phi_n^{(p)}(x)| \to 0$$

Si on considère Φ_n dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on voit que si Φ_n tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors Φ_n tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc si est T est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle l'est aussi sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ■.
Pour montrer qu'une distribution est tempérée, on doit a priori utiliser pour la continuité des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui ne sont pas support compact. En pratique, nous utiliserons le rsultat suivant :

Théorème 5 *Une distribution T appartient $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si et seulement si T est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la convergence induite par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Preuve : L'implication est immédiate, la réciproque provient du fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ (pour la norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). T est linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème de Hahn-Banach (pour des espaces topologiques...), il existe un unique prolongement linéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ ■.
Nous énonçons maintenant quelques propriétés essentielles des distributions tempérées :

Proposition 1 *Soit T une distribution tempérée.*
i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k T$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $T^{(k)}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
iii) Les applications $T \to x^k T$ et $T \to T^{(k)}$ sont continues de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exemples classiques de distributions tempérées :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est à croissance lente si :
$$\exists \quad c > 0 \quad N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq c(1+x^2)^N.$$
Toute fonction à croissance lente est une distribution tempérée.
2. Les fonctions de L^p sont des distributions tempérées.
3. Si la suite (y_n) est à croissance lente alors la distribution
$$T = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} y_n \delta_{na}$$
est tempérée. En particulier, Δ_a est tempérée.

5.4 Transformée de Fourier de distributions

Définition 3 *On définit la transformée de Fourier des distributions de la manière suivante :*
$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) < \hat{T}, \phi > = < T, \hat{\phi} >$$

Remarque : Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ alors $T_{\hat{f}} = \widehat{T_f}$.
Nous énonçons tout d'abord le théorème fondamental :

Théorème 6 *La transformée de Fourier est un application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$ défini par :*
$$\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad < \overline{\mathcal{F}}T, \Phi > = < T, \overline{\mathcal{F}}\Phi >$$

Preuve : Il est immédiat que l'application $T \to \hat{T}$ est linéaire de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans lui même. Soit $T_n \to 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors :
$$\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad < \hat{T}_n, \Phi > = < T_n, \hat{\Phi} > \to 0$$
car $\hat{\Phi}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc l'application est continue.
On montre ensuite que l'inverse est $\overline{\mathcal{F}}$
$$\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad < \overline{\mathcal{F}}\hat{T}, \Phi > = < T, \overline{\mathcal{F}}(\hat{\Phi}) > = < T, \Phi >$$
La démonstration de la continuité de l'application $T \to \overline{\mathcal{F}}T$ est la même que celle de $T \to \hat{T}$.$\blacksquare$.
Nous avons alors les propriétés souhaitées suivantes :

Proposition 2 *Soit T une distribution tempérée :*
1. *pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\hat{T}^{(k)} = (\widehat{-2i\pi x})^k T$*
2. $\widehat{T^{(k)}} = (2i\pi\xi)^k \hat{T}$
3. *Pour tout a, $\tau_a \hat{T} = \widehat{e^{2i\pi a x} T}$*
4. $\tau_a T = e^{-2i\pi a\xi} \hat{T}$

Transformées de Fourier des distributions usuelles :
- $\hat{\delta} = 1$
- $\hat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$

– Soit f un signal dont les échantillons correspondent à un pas d'échantillonnage a et forment une suite à croissance lente. On définit l'échantillonnage de la fonction f à la fréquence d'échantillonnage a par la distribution $f\Delta_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\delta_{na}$. D'après les résultats énoncés plus haut, cette distribution est tempérée et par continuité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée est $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi na\lambda}$.

Bibliographie

[1] J-P. Ansel et Y. Ducel, *E*xercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration, Ellipses

[2] G. Gasquet , P. Witomski, *A*nalyse de Fourier et Applications, Masson