INP Grenoble
ENSIMAG
2ème année

Traitement d'images
2002/2003

TP de traitement d'images

Transformée en cosinus par blocs introduction à JPEG

Ce TP a pour but de présenter les transformées en cosinus et sinus par blocs ainsi que le format de compression JPEG.

Bases discrètes par blocs
On se donne un découpage de $\mathbb{Z}$ en intervalles $[a_p, a_{p+1}]$, avec $a_p \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$\lim_{p\to-\infty} a_p = -\infty \qquad \lim_{p\to+\infty} a_p = +\infty$$

Soit $l_p = a_{p+1} - a_p$ et $g_p = \chi_{[a_p,a_{p+1}]}$. On peut alors à partir de bases sur chaque intervalle l_p construire une base orthonormée de $l_2(\mathbb{Z})$, en appliquant le théorème suivant:

Théorème 1 *Soit $(e_{k,l})_{0\le k<l}$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^l$, pour tout $l > 0$. Alors la famille*

$$\{g_{p,k}[n] = g_p[n]e_{k,l_p}[n-a_p]\}_{0\le k<l_p, p\in\mathbb{Z}}$$

est une base orthonormée par bloc de $l_2(\mathbb{Z})$

Exercice 1 *Base de Fourier par bloc*

Un premier exemple de base orthonormée de $\mathbb{C}^l$ permettant de générer une base par bloc est fourni par :

$$\{e_{k,l}[n] = \frac{1}{\sqrt{l}} exp(\frac{i2\pi kn}{l})\}_{0\le k<l}$$

1. Construire la base de $l_2(\mathbb{Z})$,$g_{p,k}$, correspondante
2. Considérer une discrètisation particulière a_p ($l_p = L = 2^N$) et décomposer un signal discret f de longueur L de votre choix dans cette base (sous Matlab, à l'aide d'une FFT, commande fft)
3. Changer ensuite la taille des blocs ($l_p = \frac{L}{2}$), considèrer le signal reconstruit uniquement à l'aide de la base sur le premier bloc.
4. Quel est à votre avis le principal inconvénient d'une telle base?

Exercice 2 *Base discrète de cosinus par bloc*

1. Soit f un signal discret défini sur $[0, L-1]$, considérer le symétrique $\tilde{f}$ de f par rapport à $-\frac{1}{2}$ et décomposer le signal $\tilde{f}$ dans la base de Fourier par blocs correspondante.
2. Montrer alors que $\tilde{f}$ se décompose sur la base :

$$\{\cos(\frac{k\pi}{L}(n+\frac{1}{2})\}_{0\le k<L}$$

3. Remarquer alors que :

$$\{\lambda_k\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{k\pi}{L}(n+\frac{1}{2})\}_{0\le k<2}$$

avec :

$$\lambda_k = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} \text{ si } k=0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^L$, en déduire une base par bloc de $l_2(\mathbb{Z})$
4. Ecrire un programme Matlab décomposant le signal $\tilde{f}$ dans la base de cosinus par bloc définie plus haut (on utilisera la commande dct, voir dans signal processing toolbox).
5. En admettant qu'une base de $l_2(\mathbb{Z}^2)$ est obtenu par produit tensoriel des bases en 1D, déterminer une base orthonormée d'une image contenant $L\times L$ pixels, qui peut être considérée comme appartenant à $\mathbb{C}^L \times \mathbb{C}^L$.

Exercice 3 *Introduction à JPEG*
L'algorithme JPEG standard décompose une image $N \times N$ pixels en sous blocs de taille $L \times L$ et applique une transformation en cosinus par bloc à chacune des sous images.
1. Enregistrer une image (commande imread de matlab), décomposer la en bloc de 8×8 pixels et faîtes une transformation en cosinus par bloc sur cette image.
2. Comment sont répartis les coefficients?
3. En vue de la compression, les coefficients sont parcourus en zig-zag en partant du haut à gauche vers le bas à droite, Pourquoi?