INP Grenoble
ENSIMAG
2ème année

Traitement d'images
2002/2003

TD-TP de traitement d'images

Méthodes de détection de bords dans les images

Exercice 1 On considère l'image :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

représentant un modèle de bord oblique. On cherche un filtre de détection du bord de cette image.

1. Donner deux exemples de filtres capables de détecter ce bord : le premier en vous inspirant des opérateurs différentiels d'ordre 1 ; le deuxième en vous inspirant des opérateurs différentiels d'ordre 2.

2. Pour chacun des deux exemples choisis, calculer la matrice filtrée. Commenter, dans chacun des cas, comment se fait la détection du bord en pratique. Commentaires?

Exercice 2 *Sous-échantillonnage*
On considère un signal discret infini $(f[n])_{n\in\mathbb{Z}}$.
La Transformée de Fourier Discrète de ce signal est définie par la série :

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\, e^{-i\omega n} \tag{2}$$

On décime le signal f : soit $M \in \mathbb{N}^*$, et $g[n] = f[nM]$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{f}(\frac{\omega - 2k\pi}{M})$$

(*Indication : partir du membre de droite de l'égalité)*
A quel théorème ce résultat vous fait-il pensez?

Exercice 3 *Algorithmes de détection de bords*
<u>Présentation</u>
Soit une image dont le niveau de gris est donnée par la fonction f de $\mathbb{R}^2$ supposée continue. Les bords des objets dans l'image correspondent à de fortes variations du niveau de gris. Les plus fortes variations se produisent lorsque l'on se déplace dans la direction orthogonale aux lignes de niveaux de gris, i.e. les bords correspondent au maxima de $|\nabla f|$ dans la direction de ∇f. Ces maxima peuvent aussi être vu comme les points d'annulation de la dérivée seconde dans la direction du gradient. A partir de là, il est possible de définir deux méthodes de détection des bords en utilisant soit le gradient de f (méthodes du premier ordre) soit les dérivées secondes de f (méthodes du second ordre).

1 Les méthodes du premier ordre

Le calcul des gradients de niveaux de gris directement sur l'image est un problème mal posé et il est nécessaire de lisser l'image avant d'effectuer la dérivation. On peut réaliser l'étape de lissage puis celle de dérivation en effectuant la convolution de l'image par un filtre.
On rappelle que la convolution discrète de $f[i,j]$ avec un filtre numérique h est donnée par :

$$f * h[n,m] = \sum_i \sum_j h[n-i, m-j] f[i,j]$$

1. On se propose de réaliser la dérivation numérique en utilisant les filtres suivants :

$$h_i = \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -c & -1 \end{bmatrix} \qquad h_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ c & 0 & -c \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Montrer que l'opérateur h_i correspond à un lissage de l'image selon les lignes puis une différentiation selon les colonnes (et inversement pour h_j).

2. Déduire un algorithme de détection de bords à partir de $f * h_i$ et $f * h_j$. Expliquer en quoi l'estimation du gradient de f est un problème compte tenu du fait que les images correspondent à des fonctions échantillonnées.

3. On se propose ici de développer une méthode de calcul de la direction du gradient de niveau de gris adaptée aux cas des images. On considère le filtre :

$$h_0 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

   Calculer les filtres h_k $k \in [1, 7]$ obtenu par rotation de $\frac{k\pi}{4}$ de h_0.

4. Construire une image composée d'un carré noir sur fond blanc, puis une seconde obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ du carré. Déduire les directions privilégiées associées aux filtres ainsi qu'un algorithme de détection de bords.

2 Applications

Ecrire les programmes Matlab correspondants à chacune des deux méthodes et appliquez les à des images de votre choix. Utiliser pour cela la commande readimage de Wavelab.

3 Méthodes de détection du deuxième ordre

Pour limiter l'effet du bruit, Marr et Hildreth ont proposé de rechercher les points d'annulation de la dérivée seconde du niveau de gris dans la direction du gradient de niveau de gris, sur une image régularisée.
Il s'agit donc de détecter les points d'annulation de :

$$B(x, y) = \frac{\partial^2 (A * g(x, y))}{\partial n^2}$$

Où n est le vecteur unitaire orienté dans le sens du gradient de niveau de gris.

1. Pour simplifier, on peut chercher à identifier les zéros de

$$\tilde{B}(x, y) = \triangle(A * g(x, y))$$

   Montrer alors (en utilisant la transformée de Fourier) que :

$$\tilde{B}(x, y) = A * \triangle g(x, y)$$

   le problème se ramène donc au calcul du laplacien d'une gaussienne.

2. Montrer que la dérivée seconde de la gaussienne s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{G_0}(2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2})$$

3. Vérifier que
$$\triangle g(x,y) = g_1(x)g_2(y) + g_2(x)g_1(y)$$
avec $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2G_0}}(1 - \frac{x^2}{2\sigma^2})\exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$ et $g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2G_0}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$
En considérant $\sigma = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{G_0} = 4232$ les filtres suivants sont proposés pour la convolution discrète :
$$g_1 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -17 & -17 & 18 & 46 & 18 & -17 & -17 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$
$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 17 & 36 & 46 & 36 & 17 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. En déduire un algorithme de calcul des zéros du laplacien.