Геометрия самосогласованных барьеров III. Произведение прямого и двойственного пространств

Roland Hildebrand

LJK, Université Grenoble Alpes / CNRS

Летняя школа "Управление, Информация, Оптимизация"
Вороново, 20 июня 2019 г.

1. Подмногообразия

2. Аффинный случай
   - Пара-кэлеровы пространства
   - Пространство E_{2n}
   - Случай барьеров

3. Проективный случай
   - Структура $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$
   - Барьеры и лагранжевы подмногообазия

Философия подхода

построение формализма, в котором удобно рассматривать одновременно прямую и двойственную программу

объединяем итерацию x в прямом пространстве с итерацией s в двойственном пространстве в точку $(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$

барьер F представлен графом преобразования Лежандра $x \mapsto F'(x)$, т.е. подмногообразием произведения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$

к условиям на барьер (самосогласованность и т.д.) надо найти эквиваленты в терминах этого подмногообразия

Вполне геодезические подмногообразия

на (псевдо-)римановом многообразии $\mathcal{M}$ геодезические $\sigma(t)$ определяются уравнением

$$\ddot{\sigma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\sigma}^i\dot{\sigma}^j = 0$$

Определение

*Подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$ (псевдо-)риманова многообразия называется **вполне геодезическим** если для каждой точки $x \in M$ и каждого касательного вектора $u \in T_x M$ геодезическая с начальными данными $\sigma(0) = x$, $\dot{\sigma}(0) = u$ целиком лежит в M.*

Внешняя кривизна

на подмногообразии M также имеем геодезический поток

пусть $\gamma_M \subset M$, $\gamma_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ – геодезические из x со скоростью u

разница между ними второго порядка

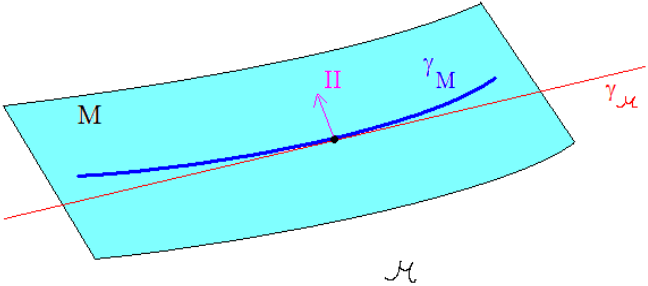
$$\gamma_M(t) - \gamma_{\mathcal{M}}(t) = \left(\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (\gamma_M(t) - \gamma_{\mathcal{M}}(t)) \right) \cdot \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

главный член зависит квадратически от u

это ускорение называется второй фундаментальной формой II подмногообразия M

$$II_x : T_xM \times T_xM \to (T_xM)^\perp$$

здесь $(T_xM)^\perp$ – нормальное подпространство



вторая фундаментальная форма измеряет отклонение M от вполне геодезического подмногообразия

ее также называют внешней кривизной

Минимальные подмногообразия

$II_x : T_xM \times T_xM \to (T_xM)^\perp$ – квадратичная форма на T_xM

Определение

*Математическое ожидание значения II_x на случайном единичном векторе называется **средней кривизной**. Подмногообразие с нулевой средней кривизной называется **минимальным**.*

уравнение минимального подмногообразия

$$II_{ij}^k h^{ij} = 0$$

h^{ij} – обратная от метрики на подмногообразии

стационарные точки функционала объема

Инволютивные распределения

распределением ранга k на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $n \geq k$ называется отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathcal{M}$ некое линейное подпространство $L_x \subset T_x\mathcal{M}$ размерности k

Определение

Распределение называется инволютивным если через каждую точку $\hat{x} \in \mathcal{M}$ можно провести подмногообразие M размерности k такое, что $T_xM = L_x$ для всех $x \in M$ из некоторой окрестности точки $\hat{x}$.

пример: распределение ранга $n-1$, задающееся градиентным полем

Лагранжевы подмногообразия

пусть на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2n$ задана сиплектическая (невырожденная кососимметрическая) форма ω

Определение

*Подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$ размерности n называется **лагранжевым** если $\omega|_M = 0$.*

Лежандровы подмнообразия

пусть на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2n-1$ задано вполне неинтегрируемое распределение L (ядро 1-формы ξ такой, что $\xi \wedge (d\xi)^{n-1} \neq 0$)

Определение

*Подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$ размерности $n-1$ называется **лежандровым** если $T_xM \subset L_x$ для всех $x \in M$.*

подмногообразие максимальной размерности, касательное к L

Структуры на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$

пусть $\mathbb{R}_n$ – двойственное пространство к $\mathbb{R}^n$

на произведении $E_{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n = \{u = (x,p) \,|\, x \in \mathbb{R}^n,\ p \in \mathbb{R}_n\}$ имеем несколько канонических структур

- $||u||^2 = \langle x, p \rangle$ определяет псевдо-риманову метрику g с нейтральной сигнатурой
- $\mathrm{dist}((x,p);(y,q)) = \langle x - y, p - q \rangle$
- $\omega = dx \wedge dp$ – симплектическая форма , $\omega(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(\langle x_1, p_2 \rangle - \langle x_2, p_1 \rangle)$
- $J : (x,p) \mapsto (x, -p)$ – инволюция с вполне интегрируемыми собственными распределениями

Пара-Кэлерово пространство

эти структуры совместимы:

- $\hat\nabla\omega = 0$ ($\hat\nabla$ – связность Леви-Чивита на g)
- $Jg = \omega$

E_{2n} – плоское однородное пара-Кэлерово пространство

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Лагранжевы подмногообразия

пусть $M \subset \mathcal{M}$ – лагранжево подмногообразие пара-Кэлерова пространства

для произвольных касательных векторных полей X, Y на M имеем

$$g[JX, Y] = \omega[X, Y] = 0$$

поле JX ортогонально к касательному пространству к M, т.е. нормально

Лемма

Инволюция J отображает касательное пространство к лагранжевому подмногообразию в нормальное и наоборот.

Кривизна лагранжевых подмногообразий

Теорема (Chen '10)

Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – лагранжево подмногообразие пара-Кэлерова пространства. Трилинейная форма σ на M, сопоставляющая касательным векторным полям X, Y, Z на M значение

$$\sigma[X, Y, Z] = g[II[X, Y], JZ] = -\omega[II[X, Y], Z]$$

является симметрической по всем аргументам.

позволяет измерять кривизну M структурой, определенной только на M

Лагранжевы подмногообразия E_{2n}

представим n-мерное подмногообразие M в виде

$$M = \{(x, p(x)) \,|\, x \in U \subset \mathbb{R}^n\}$$

и введем на M координаты x

M лагранжево если

$$\omega(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(\langle u_1, \frac{\partial p}{\partial x} u_2\rangle - \langle u_2, \frac{\partial p}{\partial x} u_1\rangle) = \frac{1}{2}\langle u_1, (\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}^T) u_2\rangle = 0$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, т.е. $\frac{\partial p}{\partial x}$ симметрично

это условие интегрируемости p, $p(x) = F'(x)$ для некоторой функции $F : U \to \mathbb{R}$

лагранжевы подмногообразия есть графы градиентов

Метрика

метрика на лагранжевом многообразии M задается

$$||u||^2 = \langle u, \frac{\partial p}{\partial x} u \rangle = \langle u, F'' u \rangle$$

т.е. M изометрично U, оснащенным метрикой $h = F''$

Определение

Лагранжево подмногообразие M будем называть *невырожденным* *если метрика на нем невырожденная.*

невырожденные лагранжевы подмногообразия биективно проектируются на $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n$

выпуклость F эквивалентна определенности метрики

Вполне геодезические подмногообразия

символы Христоффеля метрики на E_{2n} равны нулю

геодезические есть прямые

вполне геодезические подмногообразия есть аффинные подпространства

Лемма

Вполне геодезические невырожденные лагранжевы подмногообразия в E_{2n} есть графы градиентов квадратичных функций с невырожденным гессианом.

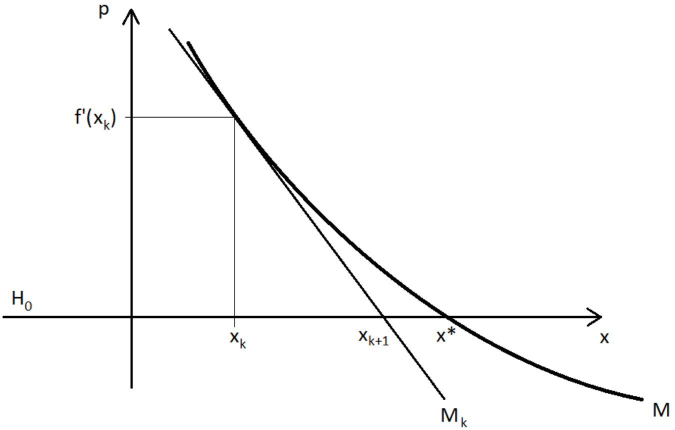
Самосогласованность

Лемма

Пусть лагранжево подмногообразие $M \subset E_{2n}$ – граф градиента функции $F : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ класса C^3. Тогда симметричная трилинейная форма $\sigma[X, Y, Z] = g[II[X, Y], JZ]$ на M задается формулой $2\sigma = F'''$.

условие самомогласованности барьера F оказывается эквивалентным ограничению кривизны подмногообразия M

оно позволяет контролировать ошибку при аппроксимации M вполне геодезическим подмногообразием



в методе Ньютона подмногообразие M приближается вполне геодезическим подмногообразием

Поведение на границе

рассмотрим случай самосогласованного барьера F на конусе K

при $x \to \partial K$ имеем $F'(x) \to \infty$, и подмногообразие M не имеет конечных граничных точек

граница конуса закодирована в рецессивных направлениях многообразия M

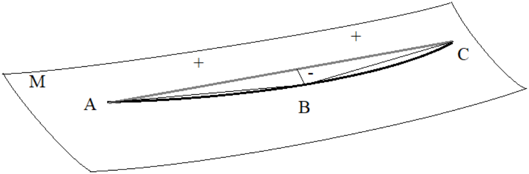
Расстояния

между двумя точками $x, y \in M$ имеем геодезические расстояния $d_M(x,y)$, $d_{E_{2n}}(x,y)$

$d_M(x,y)$ посчитать трудно

$$\begin{aligned} d^2_{E_{2n}}(x,y) &= \langle F'(x) - F'(y), x - y\rangle \\ &= \int_0^1 \langle F''(x + t(y-x))(y-x), y-x\rangle \, dt \\ &\geq \left(\int_0^1 \sqrt{\langle F''(x + t(y-x))(y-x), y-x\rangle} \, dt\right)^2 \geq d^2_M(x,y) \end{aligned}$$

знак неравенства в обратную сторону!



- ортогональные к M направления имеют отрицательный квадрат
- $||AC|| \geq ||AB|| + ||BC||$ в E_{2n}

Центральный путь

прямое аффинное подпространство

$$P_A = \{x \mid Ax = b\} \subset \mathbb{R}^n$$

$\dim P_A = k$, $n - k$ кол-во строк A

двойственное аффинное подпространство

$$D_A = \{s \mid \exists\, z : \ s = -(A^T z - c)\} \subset \mathbb{R}_n$$

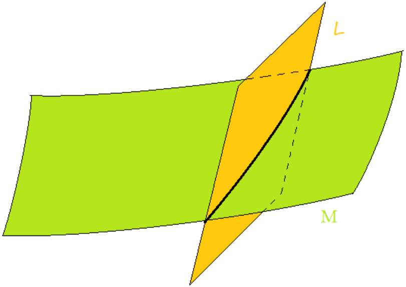
$\dim D_A = n - k$

$\dim P_A + \dim D_A = n$, $V(D_A) = V(P_A)^\perp$

введем аффинное подпространство $\mathcal{A} = P_A \times D_A$, $\dim \mathcal{A} = n$

Центральный путь

введем линейное подпространство $\mathcal{L} = \mathbb{R} \cdot \mathcal{A}$, $\dim \mathcal{L} = n + 1$



центральный путь представится в виде пересечения $M \cap \mathcal{L}$

Итоги

+

- двойственность учтена естественным образом
- гессианова метрика F'' становится индуцированной метрикой в простом объемлющем пространстве
- самосогласованность эквивалентна ограничению на кривизну
- имеется простая верхняя граница на расстояния

−

- не учитывается коническая структура
- сложным образом представлена граница конуса
- вполне геодезическая аппроксимация / квадратические функции несовместимы с конусами

Философия подхода

вместо прямых и двойственных точек x, s будем рассматривать лучи

$$[x] = \{\mu x \,|\, \mu > 0\}, \quad [s] = \{\mu s \,|\, \mu > 0\}$$

имеем $F'(\mu x) = \mu^{-1} F'(x)$ для всех $\mu > 0$

преобразование Лежандра определено также и на лучах

удобно идентифицировать лучи с точками в проективных пространствах $\mathbb{R}P^{n-1}$, $\mathbb{R}P_{n-1}$ и рассматривать граф преобразования Лежандра в $\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P_{n-1}$

Структура $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

нет скалярного произведения, но есть отношение ортогональности

$$\mathcal{M} = \{(x,p) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n \,|\, x \not\perp p\}$$

является плотным подмножеством $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

на $\mathcal{M}$ существует естественная структура пара-Кэлерова пространства

$$\partial\mathcal{M} = \{(x,p) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n \,|\, x \perp p\}$$

является подмногообразием $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$ коразмерности 1

на $\partial\mathcal{M}$ существует естественная контактная структура

Структура $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

нет скалярного произведения, но есть отношение ортогональности

$$\mathcal{M} = \{(x,p) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n \,|\, x \not\perp p\}$$

является плотным подмножеством $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

на $\mathcal{M}$ существует естественная структура пара-Кэлерова пространства

$$\partial\mathcal{M} = \{(x,p) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n \,|\, x \perp p\}$$

является подмногообразием $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$ коразмерности 1

на $\partial\mathcal{M}$ существует естественная структура контактная структура

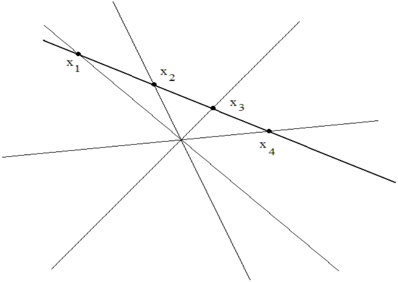
Геодезические

эллиптические: замкнутые кривые длины π

параболические: свето-подобные нулевой длины, стремятся на двух концах к одной и той же точке в $\partial\mathcal{M}$

гиперболические: кривые бесконечной длины, соединяют две точки из $\partial\mathcal{M}$

Двойное отношение

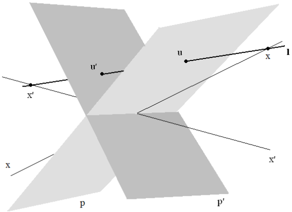


x_1, x_2, x_3, x_4 – точки на проективной прямой $\mathbb{R}P^1$

$$(x_1, x_2; x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

Обобщение на размерность n

[Ariyawansa, Davidon, McKennon 1999]: вместо 4 прямых в одной плоскости берем 2 прямые проективные точки и 2 двойственные



$(u, x'; u', x)$ — четверная скобка (quadra-bracket) точек x, p, x', p'

Двухточечная функция на $\mathcal{M}$

пусть $z = (x, p), z' = (x', p') \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

$$(z; z') = (z'; z) := (u, x'; u', x)$$

определяет симметрическую функцию $(\cdot; \cdot) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

почти всюду

$$\lim_{z \to \partial\mathcal{M}} (z; z') = \pm\infty$$

Геодезическое расстояние

Теорема

Пусть $z, z' \in \mathcal{M}$ – различные точки и $d(z, z')$ – их расстояние в метрике на $\mathcal{M}$.

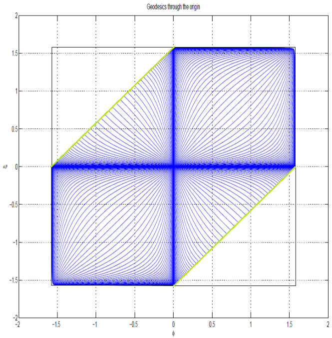
- *Если соединяющая z, z' геодезическая эллиптического типа, то $0 < (z; z') \leq 1$ и $d(z, z') = \arcsin \sqrt{(z; z')}$.*
- *Если соединяющая z, z' свето-подобная, то $(z; z') = 0$.*
- *Если соединяющая z, z' геодезическая гиперболического типа, то $(z; z') < 0$ и $d(z, z') = \operatorname{arcsinh} \sqrt{-(z; z')}$.*

$(z; z')$ – единственный проективный инвариант пары точек на $\mathcal{M}$.

$(z; z')$ более информативно, чем $d(z, z')$

Случай $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P_1$

геодезические через одну точку



непокрытые точки не соединяются с центром геодезической

Симплектическая структура

симплектическая форма получается из метрики изменением знака в одном из внедиагональных блоков

в аффинной карте $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ имеем

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial p} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial x} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial p} \\ -\frac{\partial^2 q}{\partial p \partial x} & 0 \end{pmatrix}$$

где $q(x, p) = \log(1 + \langle p, x \rangle)$ – пара-кэлеровый потенциал

Контактная структура на $\partial\mathcal{M}$

проекции π, π^* произведения $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$ на факторы определяют n-мерные распределения $J_\pm$ на $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

ограничения $\tilde{J}_\pm$ на $\partial\mathcal{M}$ размерности $n-1$

Lemma

Многообразие $\partial\mathcal{M}$, оснащенное распределением $\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-$, является контактным многообразием.

Фундаментальная группа

n	$\mathcal{M}$	$\partial\mathcal{M}$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z}_2$	Q_8
≥ 3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$

Лагранжевы подмногообразия

подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$, задающееся функцией $[p]([x])$, каждой точке x сопоставляет подпространство $L_x \subset T_x\mathbb{R}^{n+1}$ коразмерности 1, т.е. (центро-аффинное) распределение, которое инвариантно относительно растяжений

Лемма

Лагранжевы подмногообразия соответствуют инволютивным распределениям, т.е. задают гомотетическое семейство центро-аффинных гиперповерхностей.

каждая из этих гиперповерхностей канонически локально гомеоморфна подмногообразию

Вполне геодезические подмногообразия

Лемма

Вполне геодезические лагранжевы подмногообразия соответствуют поверхностям уровня квадратичных форм. Знакоопределенные вполне геодезические лагранжевы подмногообразия соответствуют выпуклым поверхностям уровня квадратичных форм, т.е. эллипсоидам и гиперболоидам.

Метрика и кривизна

Теорема

Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – невырожденное лагранжево подмногообразие, проектирующееся биективно на область $U \subset \mathbb{R}P^n$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – конус над U, а $H \subset K$ – центроаффинная гиперповерхность, соответствующая подмногообразию M. Тогда M, оснащенное индуцированной метрикой, и H, оснащенная центро-аффинная метрикой, канонически изометричны.
Симметричная трилинейная форма $\sigma[X, Y, Z] = g[II[X, Y], JZ]$ на M и кубическая форма C на H связаны формулой $2\sigma = C$.

Минимальные подмногообразия

Лемма

Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – невырожденное лагранжево подмногообразие, проектирующееся биективно на область $U \subset \mathbb{R}P^n$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – конус над U, а $H \subset K$ – центроаффинная гиперповерхность, соответствующая подмногообразию M. Тогда M является минимальным в том и только том случае, когда H является собственной аффинной сферой.

Барьеры и лагранжевы подмногообазия

пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – регулярный выпуклый конус, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – логарифмично однородный барьер на K

пусть $M \subset \mathcal{M}$ – соответствующее лагранжево подмногообразие (гиперболического типа)

- самосогласованность $\Leftrightarrow$ ограничение на кривизну
- канонический барьер $\Leftrightarrow$ минимальное подмногообразие
- аппроксимирующий конус Лоренца $\Leftrightarrow$ касательное вполне геодезическое подмногообразие

Граница конуса

пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – регулярный выпуклый конус, $M \subset \mathcal{M}$ – соответствующее лагранжево подмногообразие

определим множество

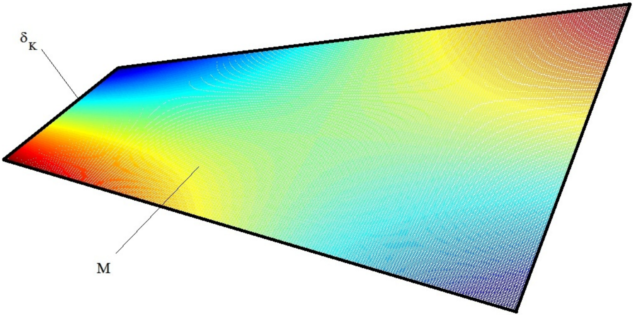
$$\delta_K = \{([x], [s]) \,|\, x \in \partial K, \ s \in \partial K^*, \ \langle x, s \rangle = 0\}$$

тогда

- δ_K является границей M
- $\delta_K \simeq S^n$
- δ_K лежандрово по отношению к контактной структуре на $\partial\mathcal{M}$

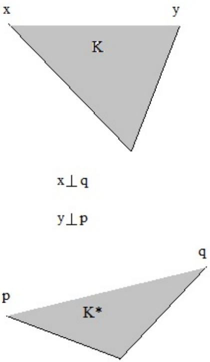
Барьер как вписанное подмногообразие

$\delta_K \simeq S^n$ зависит только от K

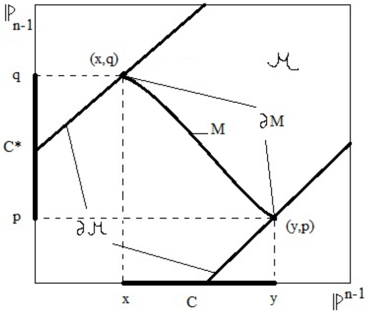


$M \simeq D^n$ вписано в δ_K

Двумерные конуса



$C = \Pi[K] \quad C^* = \Pi[K^*]$



Центральный путь

$P_A = \{x \mid Ax = b\}$, $D_A = \{s \mid \exists\, z: \; s = -(A^T z - c)\}$ – аффинные подпространства размерности $k, n+1-k$

$P_P = \pi[P_A] = \pi[P_L \setminus \{0\}]$, $D_P = \pi[D_A] = \pi[D_L \setminus \{0\}]$ – проективные подпространства размерности $k, n+1-k$

$\mathcal{L} = P_P \times D_P$ – размерность $n+1$

M – размерность n

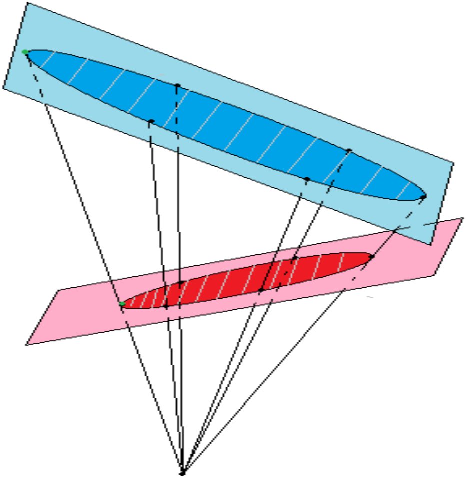
$\mathcal{M}$ – размерность $2n$

центральный путь есть пересечение лагранжева подмногообразия с подпространством, заданным линейными ограничениями

Итоги

\+
- двойственность учтена естественным образом
- гессианова метрика F'' становится индуцированной метрикой в простом объемлющем пространстве
- самосогласованность эквивалентна ограничению на кривизну
- имеется простая верхняя граница на расстояния
- учитывается коническая структура
- представление границы конуса
- вполне геодезическая аппроксимация совместима с конической структурой

— теряется аффинная структура задачи



ни допустимое множество, ни функция цены не являются аффинно эквивалентными

но решение одной задачи трансформируется в решение другой

Спасибо за внимание