Геометрия самосогласованных барьеров
II. Барьеры и аффинная дифференциальная геометрия

Roland Hildebrand

LJK, Université Grenoble Alpes / CNRS

Летняя школа "Управление, Информация, Оптимизация"
Вороново, 20 июня 2019 г.

Мотивация

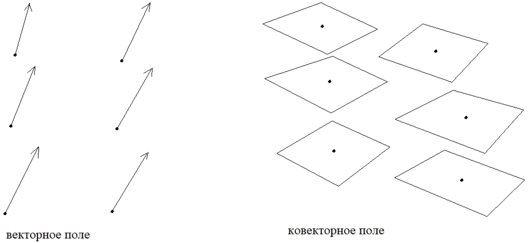
аффинная дифференциальная геометрия изучает свойства гиперповерхностей в $\mathbb{A}^n$, инвариантных по отношению к аффинным преобразованиям

аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$ с "забытым" положением нуля
разница между точками = вектор

центро-аффинная геометрия изучает свойства гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$, инвариантных по отношению к линейным преобразованиям

Векторы и ковекторы

пусть M – гладкое многообразие размерности n, $x \in M$ – точка



$T_x M$ – касательное пространство, состоит из векторов
$T_x^* M$ – кокасательное пространство, состоит из ковекторов
(ко)векторное поле определяет (ко)вектор в каждой точке x

Координатное представление

пусть на $U \subset M$ заданы координатные функции $x = (x^1, \dots, x^n)$

векторное поле задается компонентами X^i с верхними индексами

ковекторное поле задается компонентами ω_i с нижними индексами

при замене координат $x \mapsto y$ компоненты преобразуются по правилу

$$X^i \mapsto X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \qquad \omega_i \mapsto \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

Тензоры

тензор T порядка (k,l) в точке x определен как
мультилинейная функция на произведении $(T_x^*M)^k \times (T_xM)^l$

набору $(\omega,\dots,\xi,X,\dots,Z)$ из l ковекторов и k векторов он
сопоставляет число

$$T(\omega,\dots,\xi,X,\dots,Z) = T^{a\dots c}_{b\dots d}\omega_a\dots\xi_c X^b\dots Z^d$$

предполагается суммация по повторяющимся верхним и
нижним индексам

верхние индексы контравариантные
нижние индексы ковариантные

тензорное поле определяет тензор в каждой точке x

Тензоры

объект	индексы	порядок
функции	f	(0,0)
векторы	X^i	(1,0)
градиенты	$\nabla_i f$	(0,1)
метрика	g_{ij}	(0,2)
обратная метрики	g^{ij}	(2,0)
симплектическая форма	ω_{ij}	(0,2)
(ковариантные) производные	$f_{;ijk}$	(0,m)
эндоморфизмы касат. пространства	A^i_j	(1,1)
символ Кронекера	δ^j_i	(1,1)

Свертка

сворачивая нижние индексы одного тензора с верхними индексами другого, можно строить новые тензоры

пример: сворачивая тензор T порядка $(2,0)$ с тензором S порядка $(1,2)$, получаем компоненты $R_d^{bc} = T^{ab} S^c_{ad}$ тензора R порядка $(2,1)$

сверткой с метрикой или ее обратной можно превращать верхние индексы в нижние и наоборот

$X^i = g^{ij} \nabla f_j$ – градиентное поле

Аффинные связности

аффинная связность является структурой на дифференцируемом многообразии

аффинная связность определяет

- параллельный перенос векторов и тензоров вдоль кривых
- уравнение геодезических
- ковариантную производную
- кривизну

в координатном представлении задается символами Христоффеля

$$\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$$

Преобразования координат

при замене координат $x \mapsto y$ символы Христоффеля преобразуются по правилу

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \mapsto \frac{\partial x^p}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial y^\beta}\Gamma^r_{pq}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^r} + \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}$$

Разницы и аффинные комбинации

разница двух связностей $\nabla, \tilde{\nabla}$ является тензором порядка (1,2)

$$\Gamma_{ab}^{c} - \tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = T_{ab}^{c}$$

поэтому множество всех связностей образует аффинное пространство

в частности, аффинные комбинации связностей снова являются связностями

Ковариантная производная

пусть X, Y — векторные поля на многообразии M, f – функция

связность ∇ определяет оператор *ковариантного дифференцирования* ∇_X по направлению X

по определению

$$\nabla_X f = f_{,i} X^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i$$

$$(\nabla_X Y)^i = \left(Y^i_{,k} + \Gamma^i_{jk} Y^j\right) X^k$$

дифференцирование других типов тензорных полей определяется правилом Лейбница, например

$$\nabla_X(\langle \omega, Y \rangle) = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

$$(\nabla_X \omega)_i = \left(\omega_{i,k} - \Gamma^j_{ik} \omega_j\right) X^k$$

Ковариантная производная

для тензора T порядка (k,l)

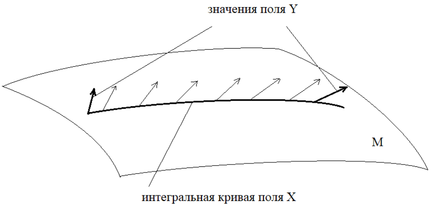
$$\begin{aligned}(\nabla_X T)^{b\dots d}_{a\dots c} &= (T^{b\dots d}_{a\dots c,k} - \Gamma^l_{ak} T^{b\dots d}_{l\dots c} - \dots - \Gamma^l_{ck} T^{b\dots d}_{a\dots l} + \\ &\quad + \Gamma^b_{lk} T^{l\dots d}_{a\dots l} + \dots + \Gamma^d_{lk} T^{b\dots l}_{a\dots l})X^k \\ &= T^{b\dots d}_{a\dots c;k} X^k.\end{aligned}$$

величины $T^{b\dots d}_{a\dots c;k}$ – компоненты *ковариантной производной* ∇T тензора T

∇T имеет порядок $(k, l+1)$

если тензор $\nabla T = 0$, то T называется *параллельным*

Параллельный транспорт



поле Y переносится параллельно вдоль кривой $\sigma(t)$ если

$$\nabla_X Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dY^a}{dt} + \Gamma^a_{bc} X^b Y^c = 0$$

для $Y = X$ получаем уравнение геодезических

$$\frac{dX^a}{dt} + \Gamma^a_{bc} X^b X^c = \frac{d^2\sigma^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{d\sigma^b}{dt} \frac{d\sigma^c}{dt} = 0$$

Связность Леви-Чивита

пусть на многообразии M задана метрика g_{ab}

тогда на M существует связность Леви-Чивита $\hat\nabla$ с символами Христоффеля

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

метрика параллельна по отношению к $\hat\nabla$, $\hat\nabla g = 0$

ковариантное дифференцирование коммутирует с понижением и поднятием индексов

Плоские связности

Определение

Аффинная связность ∇ называется *плоской* *если соответствующие ковариантные производные коммутируют.*

∇ плоская $\Leftrightarrow$ локально существует система координат, в которой $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$

на $\mathbb{A}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ существует каноническая плоская связность D

ее символы Христоффеля равны нулю в любой аффинной системе координат

Трансверсальные векторные поля

пусть M – многообразие размерности n, а $f : M \to \mathbb{A}^{n+1}$ – погружение M в аффинное пространство

Определение

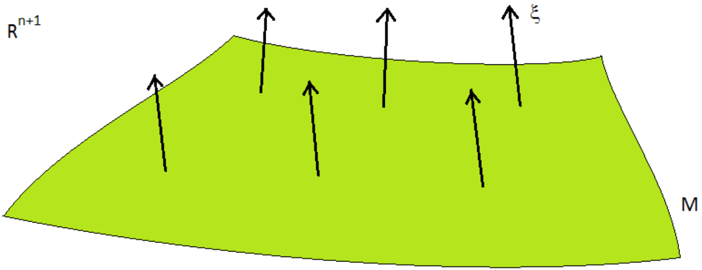
Векторное поле $\xi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется трансверсальным к f, если в каждой точке $x \in M$ вектор $\xi(x)$ трансверсален к $df[T_xM]$.

в каждой точке x имеем разложение $\mathbb{R}^{n+1} = df[T_xM] \oplus \mathbb{R}\xi(x)$

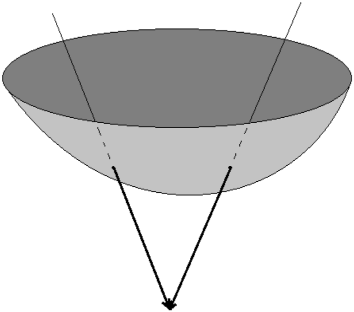
Определение

Погружение $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется центро-аффинным, если поле $\xi = -f$ является трансверсальным к f. В этом случае ξ называется центро-аффинным полем.

трансверсальное векторное поле



Центро-аффинное поле



мы заинтересованы в центро-аффинных *вложениях*

идентифицируем M с $f[M]$

Разложение связности D

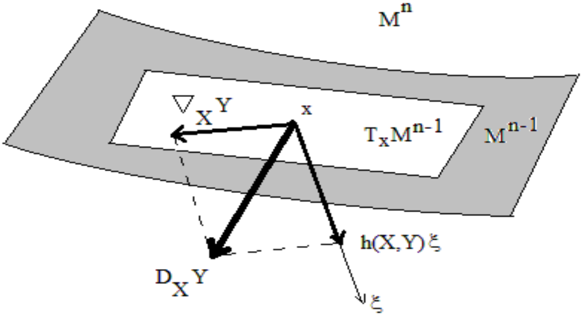
пусть $M \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — гиперповерхность, D — каноническая связность на $\mathbb{A}^{n+1}$, ξ — трансверсальное векторное поле на M

разложим

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi, \qquad X, Y, \nabla_X Y \in TM$$

- *аффинная связность* ∇: проекция D на TM параллельно ξ
- *аффинная фундаментальная форма* h: коэффициент при ξ в трансверсальной компоненте D
- *кубическая форма* $C = \nabla h$: тензор порядка (0,3)

Разложение связности D



Явные формулы

пусть $y^0, \dots, y^n$ – аффинные координаты на $\mathbb{R}^{n+1}$, а $x^1, \dots, x^n$ – произвольные координаты на M

расширим $x^1, \dots, x^n$ на окрестность M и дополним координатой x^0 такой, что

- M – поверхность уровня x^0
- $\xi = \frac{\partial}{\partial x^0}$ на M

тогда символы Христоффеля и аффинная фундаментальная форма в координатах $x^1, \dots, x^n$ задаются по формулам

$$\Gamma^r_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i \partial x^j}, \quad h_{ij} = \frac{\partial x^0}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i \partial x^j}$$

Невырожденные вложения

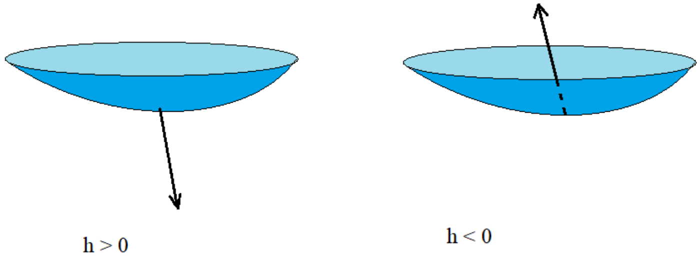
аффинная фундаментальная форма h – симметричный тензор порядка (0,2)

Определение

*Если аффинная фундаментальная форма невырождена, то она называется **аффинной метрикой**, а поверхность M называется **невырожденной**.*

если гиперповерхность выпукла, то аффинная метрика знако-определенная

Определение знака метрики



Центро-аффинные вложения

Теорема

Пусть $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — невырожденная гиперповерхность, оснащенная центро-аффинным трансверсальным полем. Тогда ее кубическая форма C является симметричной по всем трем индексам. Любая геодезическая связности ∇ целиком содержится в двумерном линейном подпространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, генерированным вектором ξ и касательным вектором к геодезической. Объекты ∇, h, C инвариантны по отношению к растяжениям $M \mapsto \alpha M$, $\alpha > 0$.

Гессиановые структуры и структуры Кодацци

Определение

Пусть ∇ – аффинная связность, а g – метрика. Если ∇g симметрична по всем индексам, то пара (∇, g) называется структурой Кодацци. Связность $\bar{\nabla} = 2\hat{\nabla} - \nabla$ называется двойственной связностью, а пара $(\bar{\nabla}, g)$ — двойственной структурой Кодацци.

здесь $\hat{\nabla}$ – связность Леви-Чивита метрики g

Определение

Структура Кодацци (∇, g) с плоской связностью ∇ называется гессиановой структурой (Hessian structure).

Конормальное отображение

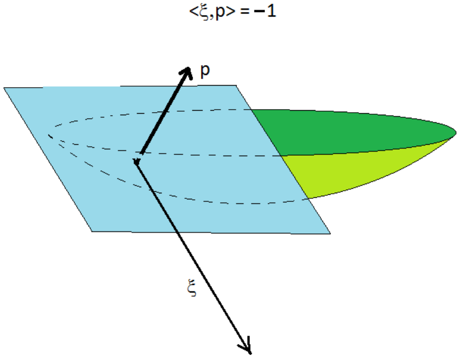
пусть $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – гиперповерхность, оснащенная трансверсальным векторным полем ξ

каждой точке $x \in M$ поставим в соответствие точку $p \in \mathbb{R}_{n+1}$ такую, что

- p ортогонально $T_x M$
- $\langle p, \xi(x) \rangle = 1$

определенное таким образом отображение $M \to \mathbb{R}_{n+1}$ называется конормальным

Конормальное отображение



Центро-аффинный случай

конормальное отображение является двойственностью на классе центро-аффинных погружений

в этом случае

- индуцированная конормальным отображением аффинная фундаментальная форма на M совпадает с индуцированной исходным вложением формой
- индуцированная конормальным отображением связность совпадает с двойственной связностью $\bar{\nabla}$

Информативность центро-аффинных объектов

Теорема

Пусть M – многообразие размерности n, на котором определена аффинная связность ∇ и симметрические тензоры h, C порядков (0,2) и (0,3), соответственно.
Если эти объекты генерированы центро-аффинным вложением $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, то последнее восстанавливается либо из ∇, либо из пары (h, C) с точностью до линейного автоморфизма пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Уровни барьера как вложения

пусть K – регулярный выпуклый конус, F – логарифмично однородный самосогласованный барьер с параметром ν

- уровни F являются центро-аффинными вложениями
- центро-аффинные структуры на них изоморфны
- F восстанавливается из уровня M и ν с точностью до аддитивной константы

объекты h, C, ν содержат всю необходимую методам внутренней точки информацию

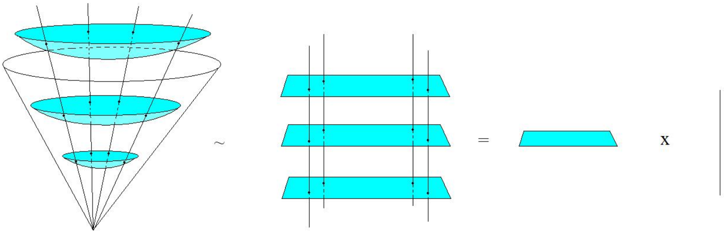
метрика h является римановой

Факторизация метрики

Теорема (Tsuji 1982; Loftin 2002)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – регулярный выпуклый конус, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – локально строго выпуклая логарифмично однородная функция степени -1.
Тогда риманово многообразие, образованное внутренностью конуса K, оснащенной метрикой F'', распадается на прямое произведение одномерного радиального фактора и n-мерного трансверсального фактора. Подмногообразия, соответствующие радиальному фактору – внутренние лучи конуса K, а подмногообразия, соответствующие трансверсальному фактору – поверхности уровня функции F.
Метрика на поверхностях уровня совпадает с центро-аффинной метрикой.

Факторизация метрики



Факторизация барьерной метрики

пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – самосогласованный барьер с параметром ν

Следствие

Пусть M – поверхность уровня F, рассматриваемая как центро-аффинное вложение в $\mathbb{R}^n$. Тогда аффинная метрика h на M задается ограничением $\nu^{-1}F''$ на M. Риманово многообразие, образованное внутренностью конуса K, оснащенной метрикой F'', распадается на прямое произведение одномерного радиального фактора и n-мерного трансверсального фактора.

Кубическая форма

Теорема

Пусть M – поверхность уровня F, рассматриваемая как центро-аффинное вложение в $\mathbb{R}^n$. Тогда значение центро-аффинной метрики h и кубической формы C на касательном к M векторе u задаются формулами

$$h[u,u] = \nu^{-1}F''[u,u],$$
$$C[u,u,u] = \nu^{-1}F'''[u,u,u].$$

Образ конормального отображения является поверхностью уровня двойственного барьера F_*.

Условие самосогласованности

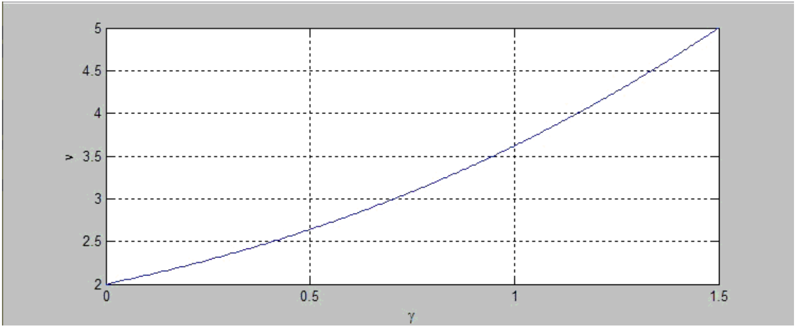
Теорема

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, $n \geq 2$, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – локально строго выпуклая логарифмично однородная функция степени $-\nu$. Пусть M – поверхность уровня функции F, а h, C – аффинная метрика и кубическая форма на M, соответственно.
Функция F самосогласованная тогда и только тогда, когда

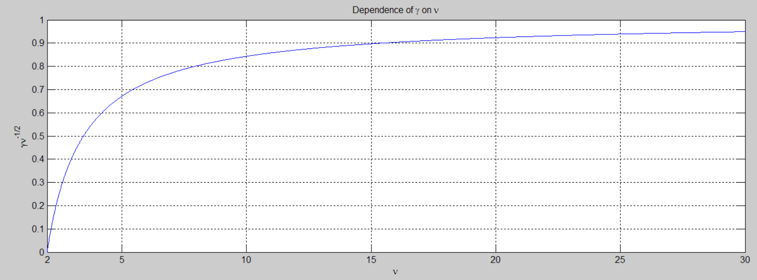
$$|C[u,u,u]| \leq 2\gamma\,(h[u,u])^{3/2}$$

для всех векторов u, касательных к M, где $\gamma = \frac{\nu-2}{\sqrt{\nu-1}}$.

Зависимость γ от ν



Зависимость γ от ν



Основная теорема

Теорема

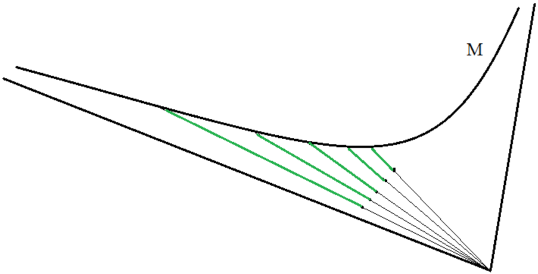
Локально сильно выпуклая центро-аффинная гиперповерхность $M \subset \mathbb{R}^n$ является поверхностью уровня самосогласованного барьера тогда и только тогда, когда

- *M асимптотично к границе своей конической оболочки*
- *ее кубическая форма C равномерно ограничена ее аффинной метрикой h*

Параметр барьера равен $\nu = \frac{4+\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{2}\sqrt{4+\gamma^2}$, где 2γ – верхняя граница C.

чем меньше C, тем меньше ν

Асиптотичность границе



значения F на последовательности точек растут пропорционально логарифму длины отрезков

Случай $C \equiv 0$

минимальное значение γ достигается при $C \equiv 0$ и $\nu = 2$

Следствие

На конусах $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, не существует барьеров с параметром $\nu < 2$.

Теорема (Pick, Berwald)

Пусть M – вложенная гиперповерхность с нулевой кубической формой. Тогда M является квадрикой.

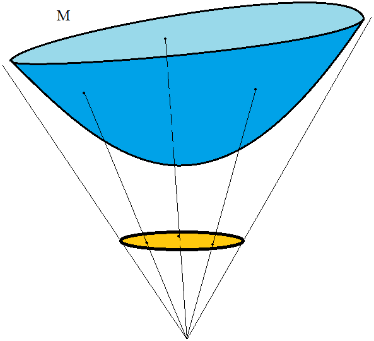
Случай $C \equiv 0$

Следствие

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, $n \geq 2$, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – барьер на F с параметром ν. Тогда следующие условия эквивалентны.
1) $\nu = 2$.
2) K изоморфен конусу Лоренца L_n, а $F(x) = -\log Q(x)$, где Q – квадратичная форма, определяющая K.

конус Лоренца – самый простой конус в конической оптимизации

Аффинные координаты



введем на M аффинные координаты сечения

Явные формулы для h, C

пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, $F : K^o \to \mathbb{R}$ – барьер на F с параметром ν, M – поверхность уровня F

введем $f = \nu^{-1}F$ со степенью однородности -1

тогда в аффинных координатах сечения K имеем

$$h(x)[u,u] = f''(x)[u,u] - (f'(x)[u])^2$$
$$C(x)[u,u,u] = f'''(x)[u,u,u] - 6f''(x)[u,u]f'(x)[u] + 4(f'(x)[u])^3$$

Резюме

рассматривая поверхность уровня самосогласованного барьера как центро-аффинное вложение, имеем следующие соответствия

самосогласованные барьеры	центро-аффинные вложения
двойственность Лежандра	конормальное отображение
гессиан F''	центро-аффинная метрика h
третья производная F'''	кубическая форма C
условие самосогласованности	ограничение на C
параметр барьера	∞-норма кубической формы

Аппроксимирующий конус Лоренца

пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус $F : K^o \to \mathbb{R}$ – барьер на F с параметром ν $x \in K^o$ – произвольная точка

Лемма

Существует единственный конус Лоренца L с соответствующим гиперболическим барьером F_L такой, что

$$\nu F_L'(x) = 2F'(x), \qquad \nu F_L''(x) = 2F''(x)$$

Нормированная система координат

перейдем в систему координат, в которой $\hat{x} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{n-1}) = (1, 0, \dots, 0)$,

$$F_L(x) = -\log(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)$$

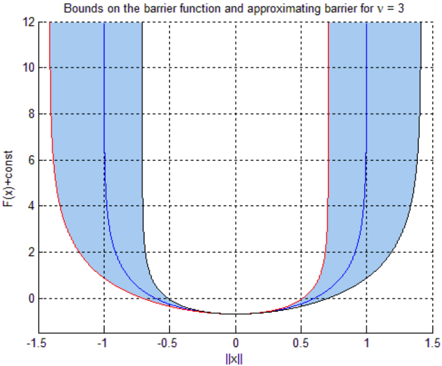
тогда $F'(\hat{x}) = (-\nu, 0, \dots, 0)$, $F''(\hat{x}) = \nu I_n$

третья производная $F'''[u, u, u]$ ограничена функциями от $F''[u, u]$ и $F'[u]$

это приводит к ограничениям на F также для $x \neq \hat{x}$

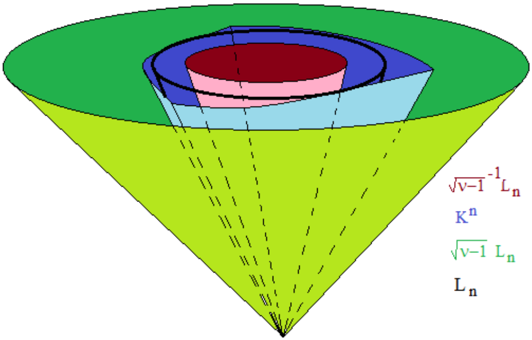
Оценки на значения барьера

на аффинном сечении $x = (1, \tilde{x}^T)^T$ имеем оценки
$F(x) \in [-(\nu - 1)\log(\sqrt{\nu - 1} \pm ||\tilde{x}||) - \log(1 \mp \sqrt{\nu - 1}||\tilde{x}||)]$



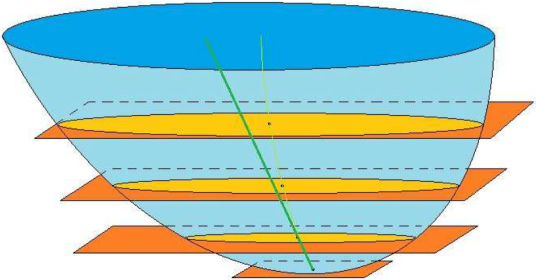
Внешняя и внутренняя аппроксимация

нижняя и верхняя оценка стремится к $+\infty$ на границе некоторых конусов Лоренца
внешняя и внутренняя аппроксимация K задается аппроксимирующим конусом Лоренца, растянутым или сжатым на константу $\sqrt{\nu - 1}$



Аффинная нормаль

рассмотрим невырожденную выпуклую гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$



аффинная нормаль касательная к кривой, состоящей из центров тяжести сечений

Аффинные сферы

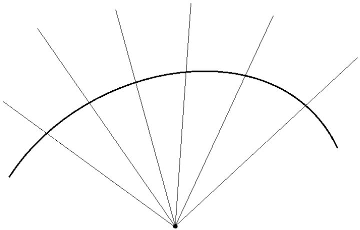
Определение

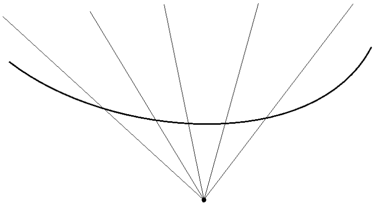
Гиперповерхность $M \subset \mathbb{A}^n$ называется (собственной) аффинной сферой если все ее аффинные нормали пересекаются в одной точке. Эта точка называется центром аффинной сферы.

выпуклая собственная аффинная сфера называется *эллиптической* если она искривляется в сторону центра, иначе *гиперболической*

центро-аффинная гиперповерхность является аффинной сферой тогда и только тогда, когда $C_{\alpha\beta\gamma}h^{\beta\gamma} = 0$, т.е. след кубической формы равен нулю

Эллиптические и гиперболические сферы

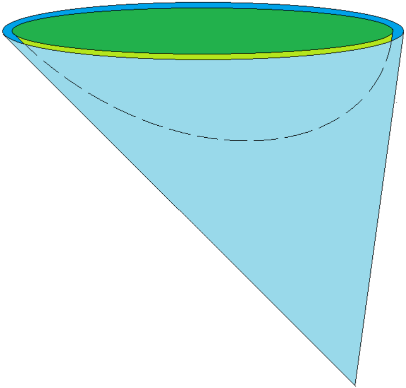




Теорема Калаби

Теорема (Fefferman 76, Cheng-Yau 86, Li 90, и др.)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус. Тогда существует единственное расслоение внутренности K^o гомотетическим семейством полных аффинных сфер гиперболического типа, которые асимптотические к границе ∂K.
Любая полная аффинная сфера гиперболического типа асимптотическая к границе ∂K некоторого регулярного выпуклого конуса K.



аффинные сферы расслоения асимптотические к ∂K

Уравнение Монжа-Ампера

логарифмично однородная функция F степени n, поверхности уровня которой задаются этим расслоением, можно охарактеризовать как решение *уравнения Монжа-Ампера*

с точностью до аддитивной постоянной F является выпуклым решением уравнения

$$\log\det F'' = 2F$$

с граничным условием

$$\lim_{x \to \partial K} F(x) = +\infty$$

Канонический барьер

Теорема

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус. Тогда выпуклое решение уравнения Монжа-Ампера $\log\det F'' = 2F$ с граничным условием $F|_{\partial K} = +\infty$ является логарифмично однородным самосогласованным барьером на K с параметром $\nu = n$. Этот барьер называется ***каноническим***.

Спасибо за внимание