4 Авто-шкалированные барьеры и точки шкалировки

Самыми успешными на практике являются алгоритмы решения конических задач над симметрическими конусами, т.е. линейных, квадратично-коничных, и полу-определенных программ. Причиной тому является богатая структура симметрических конусов, которая допускает существование барьеров с особыми свойствами, так называемых *авто-шкалированных* барьеров. В этой главе мы найдем эквивалентное этому свойству геометрическое условие, а именно, параллелизм центро-аффинной кубической формы поверхности уровня барьера по отношению к связности метрики. Так как кубическая форма пропорциональна третьей производной барьера, можно трактовать авто-шкалированные барьеры как своего рода кубические функции. Таким образом, авто-шкалированные барьеры есть наиболее простой класс барьеров после гиперболического барьера на конусе Лоренца.

4.1 Симметрические конуса и жордановы алгебры

В этом разделе мы рассмотрим класс симметрических конусов и связанных с ними жордановых алгебр.

Определение 1. *Самодвойственный однородный конус называется* симметрическим.

Здесь однородность означает, что группа линейных автоморфизмов конуса действует транзитивно на внутренности, т.е. для каждой пары внутренних точек конуса найдется автоморфизм конуса, переводящий одну точку пары в другую.

Самодвойственность означает, что исходный конус линейно изоморфен своему двойственному.

Симметрические конуса полностью классифицированы. Имеем следующий результат.

Теорема 4.1 (Винберг, 1960; Koecher, 1962)**.** *Любой симметрический конус является прямым произведением конечного числа из следующих неприводимых симметрических конусов:*

- *конус Лоренца* $L_n = \left\{(x_0,\dots,x_{n-1})\,|\,x_0 \geq \sqrt{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2}\right\}$, $n \neq 2$,
- *матричный конус* $S_+(n)$, $H_+(n)$, $Q_+(n)$ *вещественных, комплексных или кватернионных эрмитовых положительно определенных матриц,* $n \geq 3$,
- *конус Альберта* $O_+(3)$ *октонионных эрмитовых положительно определенных матриц размера* 3×3.

Обратим внимание на то, что конус Лоренца L_2 изоморфен прямому произведению $L_1 \times L_1$ и поэтому приводим, а матричные конуса порядка 1 и 2 изоморфны конусам Лоренца.

Симметрические конуса имеют и алгебраическую структуру, задающуюся так называемой жордановой алгеброй.

Определение 2. *Коммутативная алгебра* J, *удовлетворяющая условию*

$$(x \bullet x) \bullet (x \bullet y) = x \bullet ((x \bullet x) \bullet y)$$

для всех $x, y \in J$ *называется* жордановой алгеброй.

Жордановая алгебра называется евклидовой *если из* $\sum_{k=1}^n x_k \bullet x_k = 0$ *следует* $x_k = 0$ *для всех* $k = 1,\dots,n$.

Жордановы алгебры не являются ассоциативными, и поэтому нужно следить за тем, как расставлять скобки в произведении трех или более элементов. Однако, если перемножать только степени одного и того же элемента, то генерируемая подалгебра ассоциативна. Поэтому однозначно определены степенные ряды от элементов, например сходящийся всюду ряд экспоненты

$$\exp x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Симметрические конуса следующим образом связаны с жордановыми алгебрами.

Теорема 4.2. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – симметрический конус. Тогда на $\mathbb{R}^n$ существует структура евклидовой жордановой алгебры J такой, что*

$$K = \{x \bullet x \mid x \in J\}.$$

Для любой евклидовой жордановой алгебры J заданный выше конус квадратов *является симметрическим конусом.*

Для внутренности конуса также есть представление

$$K^o = \exp J = \{\exp x \mid x \in J\}$$

через экспоненту. Отображение алгебры на внутренность конуса биективно, что позволяет определить обратную функцию

$$\log : K^o \to J.$$

Приведем явные выражения для алгебр, соответствующих неприводимым симметрическим конусам.

Конусу Лоренца L_n соответствует жорданова алгебра с произведением

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 + \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\ x_0 \tilde{y} + y_0 \tilde{x} \end{pmatrix}.$$

Она обладает единичным элементом $(1, 0, \ldots, 0)^T$

Матричным конусам над $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ соответствуют алгебры с произведением

$$A \bullet B = \frac{AB + BA}{2}.$$

Здесь в качестве единичного элемента выступает единичная матрица.

Алгебры, соответствующие приводимым конусам, являются прямыми произведениями алгебр, соответствующих неприводимым факторам.

Каждая жорданова алгебра имеет *детерминант*. Это некоторый полином $d : J \to \mathbb{R}$, который положителен на внутренности соответствующего симметрического конуса, и равен нулю на его границе. Для неприводимых конусов детерминант имеет следующий вид. Для конуса Лоренца L_n он равен $d(x) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2$, а для матричных конусов это обычный детерминант $d(A) = \det A$. Для прямых произведений неприводимых конусов детерминант определяется произведением детерминантов на факторах, $d(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^m d_i(x_i)$.

4.2 Авто-шкалированные барьеры

Определение авто-шкалированного барьера довольно техническое.

Определение 3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, K^* двойственный к нему, F – самосогласованный барьер на K с параметром ν, F_* – двойственный к нему барьер на K^*. Тогда F называется* авто-шкалированным *если для всех $x, w \in K^o$ справедливо*

$$s = F''(w)x \in \operatorname{int} K^*, \qquad F_*(s) = F(x) - 2F(w) - \nu.$$

Конус K, допускающий авто-шкалированный барьер, называется авто-шкалированным.

Точка w называется *точкой шкалировки* для прямо-двойственной пары (x, s).

Нестеров и Тодд доказали, что для любой пары $(x, s) \in (K \times K^*)^o$ существует единственная точка $w \in K^o$ такая, что $F''(w)x = s$, независимо от того, авто-шкалированный барьер или нет.

Классификация авто-шкалированных барьеров была осуществлена в работах [1, 2, 4, 3, 6]. Установлено, что авто-шкалированные барьеры существуют только на симметрических конусах, т.е. класс авто-шкалированных конусов совпадает с классом симметрических конусов. На неприводимых симметрических конусах авто-шкалированные барьеры задаются логарифмами детерминантов соответствующих жордановых алгебр, $F(x) = -\log\det x$. На произведениях неприводимых конусов авто-шкалированные барьеры задаются взвешенными суммами авто-шкалированных барьеров на неприводимых факторах.

Напомним, что частные производные функции обозначаются индексами после запятой, например

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = F_{,\alpha}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = F_{,\alpha\beta}.$$

Обратная от гессиана $F_{,\alpha\beta}$ обозначается через верхние индексы после запятой, $F^{,\alpha\beta}$.

Применяем также правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам, например

$$F^{,\alpha\beta}F_{,\beta\gamma} := \sum_{\beta=1}^{n} F^{,\alpha\beta}F_{,\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

У авто-шкалированных барьеров имеется следующая связь с жордановыми алгебрами.

Теорема 4.3 (Güler, Schmieta, Koecher). *Пусть F – авто-шкалированный барьер. Тогда величины $K^a_{bc} = F^{,ad}F_{,bcd}$ являются коэффициентами евклидовой жордановой алгебры,*

$$(u \bullet v)^a = K^a_{bc} u^b v^c.$$

Однако, из коэффициентов $K^a_{bc} = F^{,ad}F_{,bcd}$ восстановить производные F'', F''' однозначно невозможно. Т.е. разные авто-шкалированные барьеры могут приводить к одной и той же алгебре, и знания одной алгебры недостаточно, чтобы восстановить барьер.

Для этого дополнительно к коэффициентам алгебры нужно задать метрику, т.е. симметричную билинейную форму τ, играющую роль гессиана F''. Алгебра и метрика должны быть связаны определенными условиями. А именно, произведение $\tau_{ad}K^d_{bc} = F_{,ad}F^{,de}F_{,bce} = F_{,abc}$ должно быть симметрично по всем индексам. Умножая на три произвольных элемента a^a, b^b, c^c, получаем что $\tau(a, b \bullet c)$ симметрично по всем трем элементам. Это приводит к следующему определению.

Определение 4. *Метризованной жордановой алгеброй называется пара (τ, J), где J – жорданова алгебра, τ – билинейная симметрическая форма на J, удовлетворяющие условию*

$$\tau(a \bullet b, c) = \tau(a, b \bullet c)$$

для всех $a, b, c \in J$.

Зная метрику τ и структурный тензор K алгебры, можно восстановить вторую и третью производные авто-шкалированного барьера F. Однако, есть более прямой способ, использующий определенный на внутренности конуса логарифм.

Теорема 4.4. *Пусть K – симметрический конус и J соответствующая евклидова жорданова алгебра. Тогда любой авто-шкалированный барьер на K может быть записан в виде*

$$F(x) = \tau(e, \log x),$$

где τ положительно определенная форма, метризующая J.

С другой стороны, для любого такого τ функция $F(x)$ пропорциональна авто-шкалированному барьеру на K.

В этом разделе мы исследовали связь между авто-шкалированными барьерами и метризованными евклидовыми жордановыми алгебрами. Однако, это еще не дает интуитивной интерпретации этих объектов.

4.3 Условия параллелизма

В этом разделе мы представим другой подход к авто-шкалированным барьерам, который даст некоторое геометрическое понимание. А именно, мы охарактеризуем эти барьеры через свойство параллелизма.

Исследуем следующий вопрос: для каких функций F выражения $K^a_{bc} = F^{,ad}F_{,bcd}$ являются коэффициентами жордановой алгебры?

Ответ оказывается неожиданно простым. Это происходит тогда и только тогда, когда $\hat\nabla F''' = 0$, где $\hat\nabla$ – связность Леви-Чивита метрики F'', т.е. когда третья производная F параллельна по отношению к метрике, задаваемой второй производной.

Покадем необходимость этого условия. Уравнение $\hat\nabla F''' = 0$ записывается в виде

$$F_{,\alpha\beta\gamma\delta} - \Gamma^\rho_{\alpha\delta}F_{,\rho\beta\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\delta}F_{,\alpha\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\gamma\delta}F_{,\alpha\beta\rho} = 0,$$

где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}F^{,ad}F_{,bcd}$ – символы Христоффеля связности $\hat\nabla$. Это эквивалентно квазилинейному уравнению в частных производных 4-го порядка

$$F_{,\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}F^{,\rho\sigma}\left(F_{,\alpha\beta\rho}F_{,\gamma\delta\sigma} + F_{,\alpha\gamma\rho}F_{,\beta\delta\sigma} + F_{,\alpha\delta\rho}F_{,\beta\gamma\sigma}\right).$$

Это уравнение задает старшую производную искомой функции как явное выражение от производных более низкого порядка. Задав значения низших производных в какой-либо точке в качестве начальных данных, можно в принципе восстановить все решение уравнения, и это решение будет единственным. Однако, не для всех начальных данных решение обязано существовать. Это определяется *условием интегрируемости.*

Условие интегрируемости записывается следующим образом. Продифференцируем уравнение по x^η и заменим возникающие производные 4-го порядка на функции от 3-х, используя само уравнение. Тогда получим уравнение пятого порядка

$$\begin{aligned} F_{,\alpha\beta\gamma\delta\eta} = \frac{1}{4}F^{,\rho\sigma}F^{,\mu\nu}&\left(F_{,\beta\eta\nu}F_{,\alpha\rho\mu}F_{,\gamma\delta\sigma} + F_{,\alpha\eta\mu}F_{,\rho\beta\nu}F_{,\gamma\delta\sigma} + F_{,\gamma\eta\nu}F_{,\alpha\rho\mu}F_{,\beta\delta\sigma} + F_{,\alpha\eta\mu}F_{,\rho\gamma\nu}F_{,\beta\delta\sigma}\right.\\ +\quad & F_{,\beta\eta\nu}F_{,\gamma\rho\mu}F_{,\alpha\delta\sigma} + F_{,\gamma\eta\mu}F_{,\rho\beta\nu}F_{,\alpha\delta\sigma} + F_{,\beta\eta\nu}F_{,\delta\rho\mu}F_{,\alpha\gamma\sigma} + F_{,\delta\eta\mu}F_{,\rho\beta\nu}F_{,\alpha\gamma\sigma} + F_{,\delta\eta\nu}F_{,\alpha\rho\mu}F_{,\beta\gamma\sigma}\\ +\quad & \left.F_{,\alpha\eta\mu}F_{,\rho\delta\nu}F_{,\beta\gamma\sigma} + F_{,\delta\eta\nu}F_{,\gamma\rho\mu}F_{,\alpha\beta\sigma} + F_{,\gamma\eta\mu}F_{,\rho\delta\nu}F_{,\alpha\beta\sigma}\right).\end{aligned}$$

Пятая производная должна быть симметрической по индексам δ,η. Антикоммутируя эти индексы, получаем условие на начальные данные, т.е. вторые и третьи производные,

$$\begin{aligned} F^{,\rho\sigma}F^{,\mu\nu}&\left(F_{,\beta\eta\nu}F_{,\delta\rho\mu}F_{,\alpha\gamma\sigma} + F_{,\alpha\eta\mu}F_{,\rho\delta\nu}F_{,\beta\gamma\sigma} + F_{,\gamma\eta\mu}F_{,\rho\delta\nu}F_{,\alpha\beta\sigma}\right.\\ &\left.-F_{,\beta\delta\nu}F_{,\eta\rho\mu}F_{,\alpha\gamma\sigma} - F_{,\alpha\delta\mu}F_{,\rho\eta\nu}F_{,\beta\gamma\sigma} - F_{,\gamma\delta\mu}F_{,\rho\eta\nu}F_{,\alpha\beta\sigma}\right) = 0.\end{aligned}$$

Умножая на обратную метрику $F^{,\eta\kappa}$ и заменяя произведения обратной второй и третьей производной на структурный тензор $K^a_{bc} = F^{,ad}F_{,bcd}$, получаем

$$K^\kappa_{\beta\nu}K^\nu_{\delta\rho}K^\rho_{\alpha\gamma} + K^\kappa_{\alpha\mu}K^\mu_{\rho\delta}K^\rho_{\beta\gamma} + K^\kappa_{\gamma\mu}K^\mu_{\rho\delta}K^\rho_{\alpha\beta} - K^\mu_{\beta\delta}K^\kappa_{\rho\mu}K^\rho_{\alpha\gamma} - K^\nu_{\alpha\delta}K^\kappa_{\rho\nu}K^\rho_{\beta\gamma} - K^\nu_{\gamma\delta}K^\kappa_{\rho\nu}K^\rho_{\alpha\beta} = 0$$

Получившееся выражение симметрично по индексам α,β,γ. Умножим эго на $u^\alpha u^\beta u^\gamma v^\delta$ для произвольных векторов u,v. Тогда получим

$$K^\kappa_{\beta\nu}K^\nu_{\delta\rho}K^\rho_{\alpha\gamma}u^\alpha u^\beta u^\gamma v^\delta = K^\mu_{\beta\delta}K^\kappa_{\rho\mu}K^\rho_{\alpha\gamma}u^\alpha u^\beta u^\gamma v^\delta.$$

Условие интегрируемости выполняется тогда и только тогда, когда выполняется это тождество для всех касательных векторов u,v.

В произвольной точке x определим следующее коммутативное умножение на касательном пространстве:

$$K(u,v)^\alpha = (u\bullet v)^\alpha = F^{,\alpha\delta}F_{,\delta\beta\gamma}u^\beta v^\gamma = K^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta v^\gamma.$$

Условие интегрируемости запишется в виде

$$K(K(K(u,u),v),u) = K(K(u,v),K(u,u)).$$

Умножение определяет *коммутативную алгебру*, удовлетворяющую *тождеству Жордана*

$$(u^2 \bullet v) \bullet u = (u \bullet v) \bullet u^2,$$

т.е. жорданову алгебру. Более того, по определению тензора K и вследствие симметричности третьей производной F''' гессиан $\tau = F''$ метризует эту алгебру.

Мы получаем, что начальные данные $F''(x), F'''(x)$ определяют решение уравнения $\hat{\nabla} F''' = 0$ тогда и только тогда, когда они определяют метризованную жорданову алгебру (τ, J) с метрикой $\tau_{ab} = F_{,ab}$ и структурным тензором $K^a_{bc} = F^{,ad} F_{,bcd}$.

Решение уравнения можно восстановить и непосредственно из алгебры.

Теорема 4.5. *Пусть (τ, J) – метризованная жорданова алгебра. Тогда существует окрестность $U \subset J$ нуля такая, что аналитическая функция*

$$F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \tau(x, x^{k-1})$$

является решением уравнения $\hat{\nabla} F''' = 0$ на U.

Отметим, что данная формула с точностью до линейного члена совпадает со встретившейся ранее формулой $F(x) = \tau(e, \log x)$ для евклидовых жордановых алгебр, но не требует наличия единичного элемента.

Условие $\hat{\nabla} F''' = 0$, что метризованные жордановы алгебры, построенные в разных точках x, все изоморфны, так как соответствующие структурные тензоры отображаются друг в друга параллельным переносом.

Рассмотрим теперь, какому условию соответствует параллелизм градиента F' по отношению к связности Леви-Чивита F''. Производная F' является $\hat{\nabla}$-параллельной, если

$$F_{,\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} F_{,\gamma} = F_{,\alpha\beta} - \frac{1}{2} F^{,\gamma\delta} F_{,\alpha\beta\delta} F_{,\gamma} = 0.$$

Это можно записать в виде

$$2F''(\cdot,\cdot) = F'''(\cdot,\cdot,(F'')^{-1}F').$$

Введем обозначение $e^{\gamma} = -F_{,\delta} F^{,\gamma\delta}$, тогда условие перепишется в виде

$$2F_{,\alpha\beta} = -F_{,\alpha\beta\delta} e^{\delta}. \tag{1}$$

Продифференцируем e^{γ} по направлению x^{α}:

$$e^{\gamma}_{,\alpha} = -F_{,\alpha\delta} F^{,\gamma\delta} + F^{,\gamma\rho} F_{,\rho\sigma\alpha} F^{,\sigma\delta} F_{,\delta} = -F_{,\alpha\delta} F^{,\gamma\delta} - F^{,\gamma\rho} F_{,\rho\sigma\alpha} e^{\sigma} = -\delta^{\gamma}_{\alpha} + 2F^{,\gamma\rho} F_{,\rho\alpha} = \delta^{\gamma}_{\alpha}.$$

Здесь мы использовали уравнение (1).

Таким образом, $e(x) = x + const$. Выберем начало координат так, что $e(x) = x$. Тогда получим далее

$$\begin{aligned} & F_{,\delta} + F_{,\gamma\delta} x^{\gamma} = (F_{,\gamma} x^{\gamma})_{,\delta} = 0 \\ \Rightarrow \quad & F_{,\gamma} x^{\gamma} = const = \nu \\ \Rightarrow \quad & F(\alpha x) = \nu \log \alpha + F(x), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Получается, что условие эквивалентно *логарифмичной однородности* функции F. Обратим внимание на то, что и степень однородности ν, и положение начала координат возникают как константы интегрирования.

Рассуждение обратимо если $\det F'' \neq 0$, т.е. логарифмично однородная функция с невырожденным гессианом удовлетворяет условию $\hat{\nabla} F' = 0$.

Вышеописанные результаты позволяют получить следующую теорему.

Теорема 4.6. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – центро-аффинная гиперповерхность с положительно определенной метрикой. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) M является частью поверхности уровня авто-шкалированного барьера

б) центро-аффинная кубическая форма параллельна по отношению к связности Леви-Чивита центро-аффинной метрики на M.

Этот результат дает *локальное* описание авто-шкалированных барьеров, т.е. условие авто-шкалированности можно проверить, зная поведение барьера всего лишь в окрестности некоторой точки.

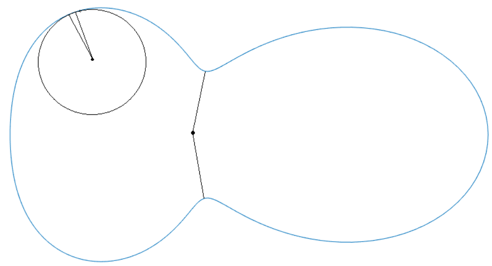

Рис. 1: Препятствия единственности ближайшей точки.

4.4 Ближайшие точки

Перейдем теперь к рассмотрению точек шкалировки. В прямо-двойственных методах каждая итерация генерирует пару (x, s). Эта пара не удовлетворяет условию $s \neq -F'(x)$ и поэтому точка (x, s) не лежит на лагранжевом многообразии $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$. Возникает вопрос, в какой точке строить аппроксимацию многообразия M вполне геодезическим подмногообразием, или, что эквивалентно, в какой точке строить квадратичную аппроксимацию барьера.

В работах Нестерова и Тодда на этот вопрос есть ответ. Аппроксимацию нужно строить в *точке шкалировки*, т.е. точке $w \in K^o$, которая удовлетворяет условию $F''(w)x = s$.

Покажем, что точка шкалировки имеет простую геометрическую интерпретацию. Она является ближайшей точкой на M к текущей итерации (x, s) в псевдо-римановой метрике произведения $R^n \times \mathbb{R}_n$. В прямо-двойственном произведении точка шкалировки имеет вид $(w, -F'(w))$. Нам нужно решить задачу

$$\max_{w \in K^o} \langle x - w, s + F'(w) \rangle.$$

Условие оптимальности первого порядка по w приводит к условию

$$-(s + F'(w)) + F''(w)(x - w) = 0.$$

Два слагаемых сокращаются в силу тождества $F''(w)w = -F'(w)$, и остается в точности условие точки шкалировки. Похожая проблема рассмотрена в [5].

Таким образом, условие точки шкалировки равносильно тому, что это стационарная точка по отношению к расстоянию от текущей пары (x, s). Однако, это еще не означает, что такая точка существует, и если она существует, что она единственна.

Существование и единственность ближайших точек на подмногообразиях и подмножествах евклидова пространства хорошо изучена. Препятствия единственности можно поделить на две категории, глобальные и локальные (см. Рис.4.4). В первом случае точки, далекие на подмногообразии, могут быть близки в объемлющем пространстве. Во втором ближайшая точка может размножиться по причине кривизны подмногообразия.

В связи с единственностью ближайшей точки было введено и исследовано следующее понятие.

Определение 5 (Federer 1959). *Пусть $A \subset E$ – подмножество Евклидова пространства.*

Близкой *(unique nearest point) к A точкой назовем точку $x \in E$ такую, что существует единственная точка $a \in A$, удовлетворяющая $||x - a|| = d(x, A)$.*

Reach *точки $a \in A$ – это максимум по $r \geq 0$ таких, что открытый шар $B_r^o(a)$ вокруг a состоит из близких точек.*

The Reach *подмножества A есть инфимум по $a \in A$ от reach(a).*

Величина reach имеет следующие свойства.

- Подмножество A имеет бесконечный reach тогда и только тогда, когда оно замкнуто и выпукло.

- Гладкие компактные связные подмногообразия имеют положительный reach.
- Reach(a) – непрерывная функция на A.
- Для гладких многообразий A обратная от reach ограничена снизу кривизной A.
- Понятие reach можно обобщить на подмножества римановых многообразий.

Определение reach на подмногообразиях в псевдо-римановом пространстве наталкивается сразу на несколько препятствий. Если метрика на подмногообразии не знако-определена, то расстояние от данной точки пространства до точек на многообразии может иметь только стационарные точки типа седла. Далее, шар с центром в данной точке в псевдо-римановой метрике не стремится к этой точке, если радиус шара стремится к нулю. Поэтому определить reach некоторой точки на подмногообразии можно только с помощью шаров в нормальном вполне геодезическом многообразии в данной точке, и метрика на этом многообразии также должна быть знако-определенной. Само по себе условие существования вполне геодезического нормального многообразия в каждой точке очень сильное. В нашем случае оно выполняется, потому что пара-кэлеровы пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$ и $\mathcal{M}$ однородны с постоянной кривизной.

Можно сделать следующее определение, в котором $\mathcal{M}$ можно также заменить на произведение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$, а положительно и отрицательно определенную метрику можно поменять местами.

Определение 6. *Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – положительно определенное подмногообразие максимальной размерности в псевдо-римановом пространстве $\mathcal{M}$.*

Близкой *к M точкой назовем точку $x \in \mathcal{M}$ такую, что существует единственная точка $z \in M$, максимизирующая $d(x, z')$ по $z' \in M$.*

Reach *точки $a \in M$ – это максимум по $r \geq 0$ таких, что открытый шар $B_r^o(a)$ вокруг a в нормальном подмногообразии к M в точке z состоит из близких точек.*

The Reach *подмногообразия M есть инфимум по $a \in M$ от reach(a).*

Применительно к лагранжевым подмногообразиям, соответствующим самосогласованным барьерам, можно показать следующий результат.

Теорема 4.7. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, а F – самосогласованный барьер на K с параметром ν.*

Соответствующее лагранжевое подмногообразие в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$ имеет reach $\nu^{-1/2}$.

Соответствующее лагранжевое подмногообразие в $\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P_{n-1}$ имеет reach $\arccos \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu}}$.

В частности, в окрестности соответствующей толщины вокруг подмногообразия M ближайшие точки существуют и единственны.

Список литературы

[1] Raphael A. Hauser. Self-scaled barrier functions: decomposition and classification. Technical Report Numerical Analysis Report DAMTP 1999/NA13, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge, 1999.

[2] Raphael A. Hauser. Self-scaled barriers for semidefinite programming. Technical Report Numerical Analysis Report DAMTP 2000/NA02, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge, 2000.

[3] Raphael A. Hauser and Osman Güler. Self-scaled barrier functions on symmetric cones and their classification. *Found. Comput. Math.*, 2(2):121–143, 2002.

[4] Raphael A. Hauser and Yongdo Lim. Self-scaled barriers for irreducible symmetric cones. *SIAM J. Optimiz.*, 12(3):715–723, 2002.

[5] Yuri E. Nesterov and Michael J. Todd. Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Math. Oper. Res.*, 22:1–42, 1997.

[6] Stefan Hans Schmieta. Complete classification of self-scaled barrier functions. Technical Report CORC TR-2000-01, Columbia University, New York, 2000.