3 Произведение прямого и двойственного пространств

3.1 Мотивация

Вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ и двойственное к нему, которое мы будем обозначать через $\mathbb{R}_n$, не обладают ни канонической метрикой, ни канонической симплектической структурой. Положение дел, однако, резко меняется, если рассмотреть прямое произведение $E_{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$. Это пространство имеет и метрическую, и сиплектическую структуру, которые определенным образом взаимодействуют. В дифференциальной геометрии такой объект известен под названием *пара-кэлерово многообразие*.

Ранее при анализе метода Ньютона мы видели, что проблему минимизации выпуклой функции f можно переформулировать как поиск точки пересечения в произведении прямого и двойственного пространств некоторого нелинейного многообразия M, а именно, графа градиента ∇f, с линейным подпространством. На каждом шаге метода при этом строилась аппроксимация нелинейного многообразия касательным пространством в текущей точке.

На этой лекции мы подробнее рассмотрим этот геометрический подход в применении к логарифмично однородным самосогласованным барьерам на регулярных выпуклых конусах. При этом мы задействуем вышеупомянутые канонические структуры, существующие в объемлющем пространстве E_{2n}. Мы представим барьер в виде графа M его градиента. При этом условие интегрируемости градиентного поля окажется эквивалентным лагранжевости подмногообразия M. Одним из основных преимуществ этого подхода является равноправное представление прямых и двойственных объектов. Формализм применяем не только к логарифмично однородным барьерам на конусах, но в равной степени и к выпуклым функциям на произвольных выпуклых множествах.

Чтобы в полной мере использовать коническую структуру, необходимо модифицировать объемлющее пространство E_{2n}. Вместо произведения векторных пространств мы рассмотрим произведение проективных пространств. Оказывается, что это произведение, с некоторой оговоркой, также носит каноническую пара-кэлерову структуру. Однако, есть еще дополнительная структура, которая позволит представить сам конус вне зависимости от рассматриваемого на нем барьера. Ценой этого преимущества является потеря структуры векторного пространства. Эта структура позволяла нам идентифицировать касательное пространство к нелинейному подмногообразию M в данной точке с некоторым линейным подпространством в E_{2n}. В проективном случае приходится заменять это линейное подпространство на *вполне геодезическое подмногообразие*.

В последующих разделах мы сначала рассмотрим представление барьера в произведении векторных пространств, а потом в произведении проективных пространств. Эти два случая мы будем называть аффинным и проективным, соответственно. Для каждого из этих случаев мы сначала опишем структуры, существующие на данном пространстве и свойства их лагранжевых подмногообразий. Далее мы применим полученные результаты к барьерам. Сперва мы введем некоторые понятия, общие для обоих случаев.

3.2 Подмногообразия

Пусть дано некоторое (псевдо-)римановое многообразие $\mathcal{M}$, т.е. многообразие, оснащенное *метрикой*, невырожденным симметричным тензорным полем g порядка (0,2), не обязательно знако-определенным. В каждой точке x многообразия оно задает квадратичную форму на касательном пространстве $T_x\mathcal{M}$, определяющую длины касательных векторов и углы между ними.

На подмногообразии $M \subset \mathcal{M}$ определен след метрики g, который мы будем обозначать через h. Это тоже симметричное тензорное поле порядка (0,2). Подмногообразие M называется *невырожденным*, если h невырожденно. В этом случае на M индуцируется структура (псевдо-)риманова многообразия, а h называется *индуцированной метрикой*. При этом h может оказаться римановой, даже если g не является знако-определенной.

На (псевдо-)римановом многообразии $\mathcal{M}$ геодезические $\sigma(t)$ определяются уравнением

$$\ddot{\sigma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\sigma}^i\dot{\sigma}^j = 0,$$

где Γ^k_{ij} – символы Христоффеля связности Леви-Чивита метрики g.

Определение 1. *Подмногообразие M (псевдо-)риманова многообразия $\mathcal{M}$ называется* вполне геодезическим *если для каждой точки $x \in M$ и каждого касательного вектора $u \in T_xM$ геодезическая с начальными данными $\sigma(0) = x$, $\dot{\sigma}(0) = u$ целиком лежит в M.*

Любая геодезическая является 1-мерным вполне геодезическим подмногообразием, но существование (собственных) вполне геодезических подмногообразий большей размерности накладывает, вообще говоря, определенные условия на $\mathcal{M}$.

Отклонение данного невырожденного подмногообразия M от вполне геодезического можно измерить следующим образом. На подмногообразии M имеется индуцированная метрика h и соответствующее уравнение геодезических. Пусть $x \in M$ – произвольная точка, $u \in T_xM$ – произвольный касательный вектор. Обозначим геодезические на M и $\mathcal{M}$, проходящие через x со скоростью u, через γ_M и $\gamma_{\mathcal{M}}$ соответственно. Параметризуем эти кривые переменной $t \in \mathbb{R}$, так чтобы $\gamma_M(0) = \gamma_{\mathcal{M}}(0) = x$, $\dot{\gamma}_M(0) = \dot{\gamma}_{\mathcal{M}}(0) = u$. Тогда разница между этими кривыми в окрестности точки $t = 0$ будет второго порядка по t,

$$\gamma_M(t) - \gamma_{\mathcal{M}}(t) = \left(\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (\gamma_M(t) - \gamma_{\mathcal{M}}(t)) \right) \cdot \frac{t^2}{2} + O(t^3).$$

При этом главный член $\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (\gamma_M(t) - \gamma_{\mathcal{M}}(t))$ зависит квадратически от u и ортогонален к M в точке x.

Это ускорение называется *второй фундаментальной формой* подмногообразия M и обозначается через II. В каждой точке $x \in M$ вторая фундаментальная форма задает квадратичную форму II_x на касательном пространстве T_xM со значениями в нормальном пространстве $N_xM = (T_xM)^\perp$,

$$II_x : T_xM \times T_xM \to (T_xM)^\perp.$$

Вторая фундаментальная форма измеряет отклонение M от вполне геодезического подмногообразия. Ее также называют *внешней кривизной*.

В координатном представлении вторая фундаментальная форма имеет два нижних и один верхний индекс. При этом нижний индекс пробегает координаты на подмногообразии M, а верхний – координаты на объемлющем многообразии $\mathcal{M}$. Значение формы на касательном к M векторе u задается сверткой $II^k_{ij} u^i u^j$ и является вектором в $\mathcal{M}$.

Если свернуть вторую фундаментальную форму с обратной метрикой на M, то получается нормальное векторное поле $m^k = II^k_{ij} h^{ij}$. Это поле называется *средней кривизной*. Подмногообразие с нулевой средней кривизной называется *минимальным*.

Минимальные подмногообразия отличаются тем, что они являются стационарными точками функционала объема по отношению к вариациям с компактным носителем. В частности, поверхности минимальной площади с заданной границей являются минимальными подмногообразиями.

Определение 2. Распределением *ранга k на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $n \geq k$ называется отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathcal{M}$ некое линейное подпространство $L_x \subset T_x\mathcal{M}$ размерности k.*

Распределение называется инволютивным *если через каждую точку $\hat{x} \in \mathcal{M}$ можно провести подмногообразие M размерности k такое, что $T_xM = L_x$ для всех $x \in M$ из некоторой окрестности точки $\hat{x}$.*

Распределение ранга $n - 1$ можно задать ковекторным полем ω, не равным нулю нигде. При этом подпространства L_x определяются ядром формы ω, а сама форма определена с точностью до скалярного множителя, не равного нулю нигде. Если ω является градиентным полем, $\omega = \nabla f$, то соответствующее распределение инволютивно и касательные к нему гиперповерхности задаются поверхностями уровня функции f.

Пусть теперь на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2n$ задана сиплектическая (невырожденная кососимметрическая) форма ω.

Определение 3. *Подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$ размерности n называется* лагранжевым *если $\omega|_M = 0$.*

Аналогом лагранжевых подмногообразий в объемлющих многообразиях нечетной размерности являются лежандровы многообразия, а аналогом симплектической формы – контактная структура.

Определение 4. *Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие размерности $2n-1$.* Вполне неинтегрируемым распределением *на $\mathcal{M}$ называется распределение L ранга $2n-2$, представляемое как ядро 1-формы ξ такой, что $\xi \wedge (d\xi)^{n-1} \neq 0$. Такое распределение также называют* контактной структурой.

Подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$ размерности $n-1$ называется лежандровым *если T_xM является подмножеством распределения L для всех $x \in M$.*

Лежандровы подмногообразия являются подмногообразиями максимальной размерности, касательными к контактной структуре L.

Вконец рассмотрим ситуацию, в которой одновременно присутствует и метрика, и симплектическая форма, связанные друг с другом определенным образом. Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие размерности $2n$, на котором определены координаты $(x,p) = (x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n)$, и пусть на $\mathcal{M}$ задана функция $q(x,p)$ такая, что смешанная производная $\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial p}$ невырождена всюду. Зададим на $\mathcal{M}$ псевдо-риманову метрику с нейтральной сигнатурой и симплектическую форму

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial p} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial p \partial x} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial p} \\ -\frac{\partial^2 q}{\partial p \partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим также линейную инволюцию (отображение, равное своему обратному) касательных пространств $J : (x,p) \mapsto (x,-p)$. Тогда J, g, ω связаны соотношениями

$$g(X,Y) = \omega(JX,Y), \qquad \omega(X,Y) = g(JX,Y)$$

для всех векторных полей на $\mathcal{M}$. Такая структура называется пара-кэлеровой, а функция q называется ее пара-кэлеровым потенциалом.

Рассмотрим лагранжево подмногообразие M пара-кэлерова многообразия $\mathcal{M}$. Для произвольных касательных векторных полей X, Y на M имеем

$$g[JX,Y] = \omega[X,Y] = 0$$

Поэтому поле JX ортогонально к касательному пространству к M, принадлежит нормальному расслоению NM. Мы получаем следующий результат.

Лемма 1. *Инволюция J отображает касательное пространство к лагранжевому подмногообразию в нормальное и наоборот.*

Это обстоятельство позволяет нам изучать вторую фундаментальную форму многообразия M в отрыве от объемлющего многообразия $\mathcal{M}$. Для этого необходимо подействовать на значение этой формы, являющееся нормальным к M вектором, инволюцией J, тем самым переводя его в касательный к M вектор. Тем самым мы получим тензор порядка (1,2) на M, который далее можно перевести в тензор порядка (0,3) понижением верхнего индекса с помощью индуцированной метрики h на M.

Теорема 3.1 (Chen '10)**.** *Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – лагранжево подмногообразие пара-Кэлерова многообразия. Трилинейная форма σ на M, сопоставляющая касательным векторным полям X, Y, Z на M значение*

$$\sigma[X,Y,Z] = g[II[X,Y],JZ] = -\omega[II[X,Y],Z]$$

является симметрической по всем аргументам.

В итоге данная конструкция позволяет измерять внешнюю кривизну лагранжева подмногообразия M пара-Кэлерова многообразия некой кубической формой σ, определенной только на M.

Определение 5. *Лагранжево подмногообразие M будем называть* невырожденным *если метрика на нем невырожденная.*

Невырожденные лагранжевы подмногообразия локально биективно проектируются и на пространство координат x, и на пространство координат p.

Упражнение 1. *Доказать это утверждение. В качестве промежуточного этапа докажите, что у невырожденного подмногообразия M сумма касательного и нормального пространств в каждой точке $x \in M$ есть все пространство $T_x\mathcal{M}$.*

Это означает, что невырожденное лагранжево подмногообразие можно задать как функцией $p = p(x)$, так и функцией $x = x(p)$.

Далее мы рассмотрим два конкретных примера пара-кэлеровых пространств, которые встречаются при описании барьеров на выпуклых конусах.

3.3 Структуры на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$

Произведение $E_{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$ можно оснастить пара-кэлеровой структурой, определив пара-кэлеровый потенциал $q(x,p) = \langle x, p\rangle$. Здесь x, p – двойственные друг к другу линейные координаты на пространствах $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n$. Пусть π_x, π_p – проекции на прямое и двойственное пространство, соответственно.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ – линейная система координат на протранстве $\mathbb{R}^n$, а $p^1, \dots, p^n$ – сопряженная система координат на двойственном пространстве $\mathbb{R}_n$. Введем на E_{2n} координаты $x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n$. В этих координатах метрика g, симплектическая форма ω и инволюция J принимают вид

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Собственные подпространства к собственным значениям ± 1 инволюции J имеют размерность n и задаются ядрами дифференциалов $d\pi_p, d\pi_x$, соответственно. Таким образом, расстояние между точками $(x,p), (y,q) \in E_{2n}$ равно $\langle x - y, p - q\rangle$.

Так как коэффициенты метрики g постоянны, ее символы Христоффеля ее кривизна равны нулю. Более того, ее геодезические являются прямыми, а вполне геодезические многообразия – аффинными подпространствами. Все структуры на E_{2n} инвариантны как относительно сдвигов, так и по отношению к линейным преобразованиям $A \in GL(n, \mathbb{R})$ фактора $\mathbb{R}^n$, при условии что фактор $\mathbb{R}_n$ претерпевает сопряженное преобразование A^{-T}. Пространство E_{2n}, таким образом, является плоским однородным пара-Кэлеровым пространством.

Перейдем к рассмотрению лагранжевых подмногообразий пространства E_{2n}. Представим n-мерное подмногообразие $M \subset E_{2n}$ в виде

$$M = \{(x, s(x)) \,|\, x \in U \subset \mathbb{R}^n\},$$

где U – некоторая область, а s – ковекторное поле на U, и перенесем на M координаты x на этой области. Касательному к M вектору u в этих координатах соответствует вектор $(u, \frac{\partial s}{\partial x}u)$ в исходных координитах (x,p) на E_{2n}. Условие лагранжевости M запишется в виде

$$\omega(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(\langle u_1, \frac{\partial s}{\partial x}u_2\rangle - \langle u_2, \frac{\partial s}{\partial x}u_1\rangle) = \frac{1}{2}\langle u_1, (\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x}^T)u_2\rangle = 0$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$. Иными словами, M лагранжево тогда и только тогда, когда производная $\frac{\partial s}{\partial x}$ симметрична. Это не что иное как условие интегрируемости s, т.е. $s(x) = F'(x)$ для некоторой функции $F : U \to \mathbb{R}$.

Таким образом, лагранжевые подмногообразия $M \subset E_{2n}$ есть графы градиентов скалярных функций. Именно так возникают лагранжевые подмногообразия, соответствующие барьерам.

3.4 Барьеры и лагранжевые подмногообразия в E_{2n}

В этом разделе мы выразим метрику и кривизну лагранжева подмногообразия M через представляющую M функцию F.

Вычислим индуцированную метрику h на таком лагранжевом подмногообразии, задающемся функцией F. На касательном векторе u получаем

$$||u||^2 = \langle u, \frac{\partial s}{\partial x} u\rangle = \langle u, F'' u\rangle$$

т.е. M изометрично U, оснащенным гессиановой метрикой F''.

Как следствие получаем, что выпуклость или вогнутость F эквивалентна определенности метрики h.

Вполне геодезические невырожденные лагранжевы подмногообразия в E_{2n} есть графы градиентов квадратических функций с невырожденным гессианом.

Посчитаем еще кубическую форму σ, представляющую внешнюю кривизну M.

Лемма 2. *Пусть лагранжево подмногообразие $M \subset E_{2n}$ – граф градиента функции $F : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ класса C^3. Тогда симметричная трилинейная форма $\sigma[X,Y,Z] = g[II[X,Y], JZ]$ на M задается формулой $2\sigma = F'''$.*

Докажем это утверждение. Символы Христоффеля метрики F'' на M имеют вид

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} F^{,kl} F_{,ijl}.$$

Пусть $u \in T_x M$ – касательный к M вектор, а $\gamma_M(t)$ – геодезическая на M с начальными условиями $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = u$. Соответствующая геодезическая на $\mathcal{M}$ является прямой и задана уравнением $\gamma_{\mathcal{M}}(t) = x + tu$. Из этого следует, что при $t = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\gamma^k_M(t) - \gamma^k_{\mathcal{M}}(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\gamma^k_M(t) = -\Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i_M\dot\gamma^j_M = -\frac{1}{2}F^{,kl}F_{,ijl}u^i u^j.$$

Получившееся выражение является первой компонентой v_x вектора $v = II[u,u] \in E_{2n}$. Вторая компонента v_p находится из условия, что v – нормальный вектор, и равна $-F'' \cdot v_x$. Действительно, условие эквивалентно тому, что Jv касателен к M, т.е. $(Jv)_p = F'' \cdot (Jv)_x$. Но $Jv = (v_x, v_p)$ по оределению J. Таким образом, получаем явное выражение $v^l_p = \frac{1}{2}F_{,ijl}u^i u^j$. Таким образом,

$$\sigma[u,u,u] = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}F^{,kl}F_{,ijl}u^i u^j \cdot (-F_{,km}u^m) + \frac{1}{2}F_{,ijl}u^i u^j \cdot u^l) = \frac{1}{2}F_{,ijl}u^i u^j u^l.$$

Таким образом, условие самомогласованности функции F эквивалентно ограничению на кривизну соответствующего подмногообразия M. Его роль в поведении метода Ньютона сводится к тому, что оно позволяет контролировать ошибку при аппроксимации M вполне геодезическим подмногообразием.

Пусть теперь F – самосогласованный барьер на некотором регулярном выпуклом конусе K. Рассмотрим, как поведение F на границе ∂K влияет на поведение соответствующего лагранжева подмногообразия $M \subset E_{2n}$ на бесконечности. Так как гессианова метрика F'' на внутренности K^o конуса полная, M является полным римановым подмногообразием E_{2n}. Поэтому M не имеет конечных точек накопления, не принадлежащих M, т.е. M замкнуто в E_{2n}.

Ясно так же, что пересечение M с шаром конечного радиуса в E_{2n} проектируется на множество $D \subset K$ в $\mathbb{R}^n$, отделенное от границы конуса ∂K. Поэтому вся информация о границе конуса содержится в рецессивных направлениях многообразия M.

На произвольном римановом многообразии геодезическое расстояние между двумя заданными точками посчитать нелегко. Римановые многообразия, задаваемые гессианами барьеров на выпуклых множествах, не составляют исключения. Однако, представление этих многообразий в виде подмногообразий более простого объемлющего пространства открывает возможность оценить это расстояние.

Между двумя произвольными точками $x, y \in M$ имеем геодезические расстояния $d_M(x,y)$, $d_{E_{2n}}(x,y)$ в метриках h, g, соответственно. Первое из них посчитать трудно, в то время как второе задается выраже-

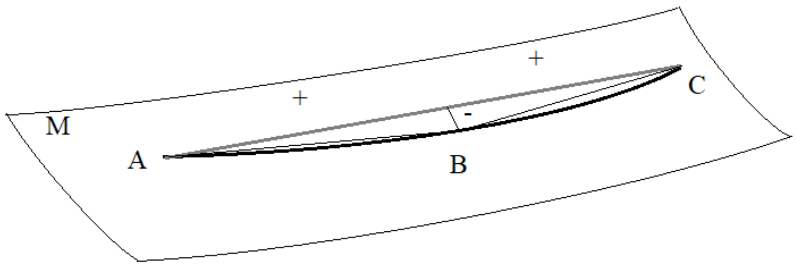

Рис. 1: В пространстве E_{2n} имеем $||AC|| \geq ||AB|| + ||BC||$.

нием

$$\begin{aligned} d^2_{E_{2n}}(x,y) &= \langle F'(x) - F'(y), x - y\rangle \\ &= \int_0^1 \langle F''(x + t(y-x))(y-x), y-x\rangle \, dt \\ &\geq (\int_0^1 \sqrt{\langle F''(x + t(y-x))(y-x), y-x\rangle} \, dt)^2 \geq d^2_M(x,y). \end{aligned}$$

Обратим внимание на тот факт, что расстояние $d_M(x,y)$ на подмногообразии оценивается *сверху* расстоянием $d_{E_{2n}}(x,y)$ в объемлющем пространстве. Это следствие того, что объемлющее пространство является *псевдо*-римановым. Более конкретно, причина в том, что ортогональные к геодезической между x, y направления в E_{2n} имеют длину с отрицательным квадратом, и поэтому эта геодезическая является кривой *максимальной* длины (см. Рис. 3.4).

Рассмотрим, наконец, образ центрального пути на M. Пусть прямая и двойственная коническая программы заданы в симметрической форме, т.е.

$$\min_{x \in K} \langle c, x\rangle \quad : \qquad x \in b + L,$$

$$\max_{s \in K^*} -\langle b, s\rangle \quad : \qquad s \in c + L^{\perp},$$

где $\langle c, b\rangle = 0$. Линейные ограничения прямой программы определяют аффинное подпространство $P_A \subset \mathbb{R}^n$, а линейные ограничения двойственной программы определяют аффинное подпространство $D_A \subset \mathbb{R}_n$, где $\dim\, P_A + \dim\, D_A = \dim\, L + \dim\, L^{\perp} = n$.

Введем аффинное подпространство $\mathcal{A} = P_A \times D_A$ размерности n, и его коническую оболочку $\mathcal{L} = \mathbb{R} \cdot \mathcal{A}$, являющейся линейным подпространством размерности $n+1$. Тогда центральный путь представится в виде пересечения $M \cap \mathcal{L}$. Обратим внимание на то, что эта кривая соответствующими проекциями на факторы $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_n$ отображается на центральный путь как в прямой, так и в двойственной задаче.

3.5 Структуры в $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$

В этом разделе мы рассмотрим еще одно пара-кэлерово пространство, основанное на произведении $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$ проективных пространств. Таким образом нам удастся задействовать коническую структуру прямой и двойственной задачи.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – выпуклый регулярный конус, а F – логарифмично однородный барьер на нем. Пусть K^*, F_* – соответствующие двойственные объекты. Вместо прямых и двойственных точек $x \in K$, $s \in K^*$ будем рассматривать лучи

$$[x] = \{\mu x \,|\, \mu > 0\}, \quad [s] = \{\mu s \,|\, \mu > 0\}.$$

Для всех $\mu > 0$ имеем $F'(\mu x) = \mu^{-1} F'(x)$, поэтому преобразование Лежандра можно определить также и на лучах.

Нам удобно будет идентифицировать лучи с точками в проективных пространствах $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{R}P_n$ и рассматривать граф преобразования Лежандра как подмногообразие в произведении $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$. На этом произведении можно следующим образом определить аффинную карту. Введем в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{R}_{n+1}$ двойственные по отношению друг к другу линейные системы координат $x = (x_0, \dots, x_n)$ и $p = (p_0, \dots, p_n)$. Рассмотрим аффинные гиперплоскости $\{x \,|\, x_0 = 1\}$ и $\{p \,|\, p_0 = 1\}$. Эти гиперплоскости биективно отображаются на открытые плотные подмножества соответствующих проективных пространств. С другой стороны, они параметризуются оставшимися координатами $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Следовательно, эти координаты параметризуют открытое плотное подмножество произведения $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$. Пусть π_x, π_p – проекции на прямое и двойственное проективное пространство, соответственно.

На проективных пространствах нет скалярного произведения, но есть отношение *ортогональности.* Определим множество

$$\mathcal{M} = \{(x,p) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n \,|\, x \not\perp p\},$$

которое является плотным подмножеством $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$. Многообразие $\mathcal{M}$ можно оснастить пара-кэлеровой структурой, определив пара-кэлеровый потенциал $q(x,p) = \log\langle x,p\rangle = \log(1 + \sum_{i=1}^n x_i p_i)$ на аффинной карте. С этой структурой $\mathcal{M}$ становится однородным гиперболическим пара-кэлеровым пространством.

Комплементарное множество

$$\partial\mathcal{M} = \{(x,p) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n \,|\, x \perp p\}$$

является подмногообразием $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$ коразмерности 1. На $\partial\mathcal{M}$ существует естественная контактная структура.

Геодезические на $\mathcal{M}$ оказываются трех типов. Эллиптические геодезические есть замкнутые кривые длины π. Параболические геодезические есть свето-подобные нулевой длины, которые стремятся на двух концах к одной и той же точке в $\partial\mathcal{M}$. Гиперболические геодезические есть кривые бесконечной длины, которые соединяют две разные точки из $\partial\mathcal{M}$.

Метрику на $\mathcal{M}$ можно определить через двойное отношение, сопоставляющее четырем точкам x_1, x_2, x_3, x_4 на проективной прямой $\mathbb{R}P^1$ значение

$$(x_1, x_2; x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

В [Ariyawansa, Davidon, McKennon 1999] было предложено следующее обобщение двойного отношения на случай более высоких размерностей. Вместо четырех прямых в одной плоскости берем две прямые проективные точки x, x' и две двойственные проективные точки p, p'. Точки x, x' соответствуют прямым в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим их линейную оболочку через L. Двойственные точки p, p' можно идентифицировать с гиперплоскостями H, H', которые пересекают плоскость L в прямых, т.е. прямых проективных точках u, u', соответственно. Двойное отношение $(u, x'; u', x)$ называется *четверной скобкой* (quadra-bracket) точек x, p, x', p'.

С помощью этой скобки можно определить следующую симметрическую функцию $(\cdot;\cdot) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Для $z = (x,p), z' = (x',p') \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$ положим

$$(z; z') = (z'; z) := (u, x'; u', x).$$

$(z; z')$ – единственный проективный инвариант пары точек на $\mathcal{M}$, и почти всюду имеем

$$\lim_{z \to \partial\mathcal{M}} (z; z') = \pm\infty.$$

С помощью этой функции геодезическое расстояние на $\mathcal{M}$ описывается следующим образом.

Теорема 3.2. *Пусть $z, z' \in \mathcal{M}$ – различные точки и $d(z,z')$ – их расстояние в метрике на $\mathcal{M}$.*

- *Если соединяющая z, z' геодезическая эллиптического типа, то $0 < (z; z') \le 1$ и $d(z,z') = \arcsin\sqrt{(z; z')}$.*
- *Если соединяющая z, z' свето-подобная, то $(z; z') = 0$.*

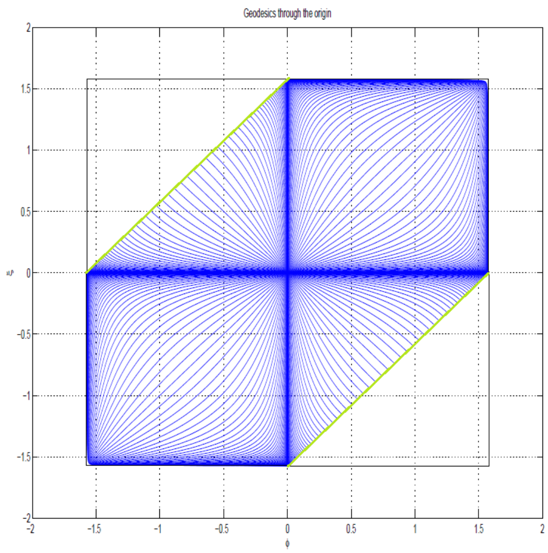

Рис. 2: Случай $n = 1$.

- *Если соединяющая z, z' геодезическая гиперболического типа, то $(z; z') < 0$ и $d(z, z') = arc\sinh\sqrt{-(z; z')}$.*

Заметим, что $(z; z')$ более информативно, чем $d(z, z')$, поскольку при $(z; z') > 1$ расстояние $d(z, z')$ вообще не определено. В этом случае нет геодезической, соединяющей данные точки.

Рассмотрим случай произведения $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P_1$. Геодезические через одну данную точку обозначены на Рис.3.5.

Пространства $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P_1$ гомеоморфны окружности, а их произведение – тору. Поэтому это произведение можно представить в виде квадрата с идентифицированными противоположными точками. Непокрытые точки на Рис.3.5 не соединяются с центром геодезической.

Опишем контактную структуру на $\partial\mathcal{M}$. Проекции π_x, π_p определяют n-мерные распределения $J_\pm$ на $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P_n$. Ограничения $\tilde{J}_\pm$ на $\partial\mathcal{M}$ являются распределениями размерности $n - 1$.

Лемма 3. *Многообразие $\partial\mathcal{M}$, оснащенное распределением $\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-$, является контактным многообразием.*

Приведем фундаментальные группы этих многообразий в зависимости от размерности.

n	$\mathcal{M}$	$\partial\mathcal{M}$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z}_2$	Q_8
≥ 3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$

Рассмотрим лагранжевы подмногообразия $\mathcal{M}$. Подмногообразие $M \subset \mathcal{M}$, задающееся функцией $[p]([x])$, каждой точке x сопоставляет подпространство $L_x \subset T_x\mathbb{R}^{n+1}$ коразмерности 1, т.е. (центро-аффинное) распределение, которое инвариантно относительно растяжений.

Лемма 4. *Лагранжевы подмногообразия соответствуют инволютивным распределениям, т.е. задают гомотетическое семейство центро-аффинных гиперповерхностей.*

Каждая из этих гиперповерхностей канонически локально гомеоморфна самому подмногообразию M

Лемма 5. *Вполне геодезические лагранжевы подмногообразия соответствуют поверхностям уровня квадратичных форм.*

Знакоопределенные вполне геодезические лагранжевы подмногообразия соответствуют выпуклым поверхностям уровня квадратичных форм, т.е. эллипсоидам и гиперболоидам.

Метрика и кривизна лагранжева подмногообразия $M \subset \mathcal{M}$ выражаются следующим образом через центро-аффинные инварианты соответствующих гиперповерхностей.

Теорема 3.3. *Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – невырожденное лагранжево подмногообразие, проектирующееся биективно на область $U \subset \mathbb{R}P^n$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – конус над U, а $H \subset K$ – центроаффинная гиперповерхность, соответствующая подмногообразию M.*

Тогда M, оснащенное индуцированной метрикой, и H, оснащенная центро-аффинная метрикой, канонически изометричны.

Симметричная трилинейная форма $\sigma[X,Y,Z] = g[II[X,Y],JZ]$ на M и кубическая форма C на H связаны формулой $2\sigma = C$.

Эти соотношения легко позволяют охарактеризовать минимальные лагранжевые подмногообразия.

Лемма 6. *Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – невырожденное лагранжево подмногообразие, проектирующееся биективно на область $U \subset \mathbb{R}P^n$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – конус над U, а $H \subset K$ – центроаффинная гиперповерхность, соответствующая подмногообразию M.*

Тогда M является минимальным в том и только том случае, когда H является собственной аффинной сферой.

3.6 Барьеры и лагранжевы подмногообазия

Эти результаты позволяют нам связать свойства логарифмично однородных барьеров и лагранжевых подмногообазий $M \subset \mathcal{M}$, задающихся графом их градиентов, или эквивалентно, соответствующих их поверхностям уровня как центро-аффинным вложениям.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – регулярный выпуклый конус, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – логарифмично однородная функция на K. Пусть $M \subset \mathcal{M}$ – соответствующее лагранжево подмногообразие. Так как метрика на M положительно определена, эти многообразия являются гиперболического типа.

Тогда свойство самосогласованности F эквивалентно ограничению на кривизну M. Аппроксимирующий конус Лоренца в данной точке соответствует касательному вполне геодезическому подмногообразию в $\mathcal{M}$ в соответствующей точке. Функция F пропорциональна каноническому барьеру тогда и только тогда, когда M – минимальное подмногообразие.

Мы также можем построить представление границы конуса K, используя контактное многообразие $\partial\mathcal{M}$. Для этого определим множество

$$\delta_K = \{([x],[s]) \,|\, x \in \partial K,\ s \in \partial K^*,\ \langle x, s\rangle = 0\}.$$

Тогда δ_K является границей M. Более того, δ_K гомеоморфно сфере S^n, и δ_K лежандрово по отношению к контактной структуре на $\partial\mathcal{M}$.

Обратим внимание на то, что δ_K зависит только от K. Поэтому подмногообразие M должно удовлетворять граничному условию $\partial M = \delta_K$. Таким образом, лежандрово многообразие δ_K, соответствующее конусу, играет роль некоторой рамы, на которую натянуто лагранжево многообразие M, соответствующее барьеру.

Вконец рассмотрим, во что отображается центральный путь конической программы над конусом K. Аффинные подпространства, задаваемые линейными ограничениями прямой и двойственной программы, имеют вид $P_A = \{x \,|\, Ax = b\}$, $D_A = \{s \,|\, \exists\ z :\ \ s = -(A^T z - c)\}$. Их размерности равны $k, n+1-k$, соответственно. При проекции на проективные пространства эти размерности не меняются. Обозначим соответствующие образы через $P_P = \pi[P_A] = \pi[P_L \setminus \{0\}]$ и $D_P = \pi[D_A] = \pi[D_L \setminus \{0\}]$. Тогда произведение $\mathcal{L} = P_P \times D_P$ будет проективным подпространством размерности $n+1$. Лагранжево подмногообразие M имеет размерность n, а объемлющее пространство $\mathcal{M}$ – размерность $2n$. Поэтому их пересечение $\mathcal{L} \cap M$ будет иметь размерность $n+1+n-2n = 1$, т.е. будет кривой. В результате центральный путь на M есть пересечение лагранжева подмногообразия M с подпространством $\mathcal{L}$, заданным линейными ограничениями прямой и двойственной программ.

Заметим, что эта кривая одновременно представляет центральный путь и прямой, и двойственной задачи.