2 Барьеры и аффинная дифференциальная геометрия

Определение выпуклости множеств и функций основано на возможности построить интервал $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \,|\, \lambda \in [0,1]\}$, соединяющий точки x, y. Понятия интервала и выпуклых комбинаций точек инвариантны не только относительно линейных автоморфизмов лежащего в основе вещественного векторного пространства, но и относительно параллельных переносов в этом пространстве, которые не сохраняют положение нулевого вектора. Поэтому для изучения общей задачи выпуклой оптимизации нам достаточно работать со структурой n-мерного вещественного *аффинного* пространства $\mathbb{A}^n$. По сути это n-мерное вещественное векторное пространство, в котором "забыто"положение нуля.

Определение 2.1. *Пусть V – вещественное векторное пространство.* Аффинным пространством*, ассоциированным с векторным пространством V, называют множество A вкупе с отображением $+ : A \times V \to A$ таким, что*

- *$x + 0 = x$ для всех $x \in A$,*
- *$(x + u) + v = x + (u + v)$ для всех $x \in A$, $u, v \in V$,*
- *$v \mapsto x + v$ является биекцией между V и A для всех $x \in A$.*

Группа симметрий $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ генерируется невырожденными линейными преобразованиями и параллельными переносами, т.е. состоит из всех невырожденных аффинных преобразований.

Предметом аффинной дифференциальной геометрии являются свойства погруженных в аффинное пространство многообразий, инвариантные относительно действия группы симметрий $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$. Нас будет интересовать только самый разработанный случай, а именно, гиперповерхностей размерности n, вложенных в аффинное пространство размерности $n + 1$. В качестве этих гиперповерхностей будут выступать поверхности уровня барьеров, встречающихся в методах внутренних точек.

В конической оптимизации вершина конуса, определенного конической задачей, является выделенной точкой лежащего в основе аффинного пространства. Структуры, определенные на гиперповерхности с учетом выделенной точки, изучаются *центро-аффинной* геометрией. Эта ветвь аффинной дифференциальной геометрии является наиболее подходящей геометрической теорией для изучения логарифмично однородных барьеров на выпуклых конусах, и на этой лекции мы будем рассматривать преимущественно ее.

Хорошим введением в аффинную дифференциальную геометрию может служить книга Номицу и Сасаки [5].

Прежде чем перейти к собственно аффинной дифференциальной геометрии мы представим понятия тензора и связности.

2.1 Тензоры

В этом разделе мы дадим краткое введение в тензорное исчисление. В физической литературе тензоры на гладком многообразии M часто вводятся как поля (гипер-)матриц чисел, которые преобразуются опреледенным образом при заменах координат. В математике тензоры определяются как мультилинейные функции на касательном и кокасательном расслоении над многообразием, что делает их более осмысленными с интуитивной точки зрения.

Самыми простыми тензорами являются скаляры, или вещественные функции на M. Они имеют порядок $(0, 0)$.

Тензор порядка $(1, 0)$ – это векторное поле, или сечение касательного расслоения над M. Каждой точке x на M оно сопоставляет элемент касательного пространства T_xM, или касательный вектор в этой точке. Если на многообразии M (или на некоторой карте в M) задана система координат, то компоненты векторного поля X задаются функциями X^i с верхними индексами, пробегающими значения $1, \ldots, n$, где n – размерность M.

Двойственное к касательному пространству T_xM называется *кокасательным* пространством T_x^*M. Элементами его являются линейные функционалы на касательном пространстве, или *ковекторы*. Совокупность ковекторов во всех точках многообразия образует *кокасательное расслоение* над M. Тензорами порядка $(0,1)$ являются сечения кокасательного расслоения, сопоставляющие каждой точке M ковектор в этой точке. Другими словами, тензоры порядка $(0,1)$ являются дифференциальными 1-формами. В каждой точке M они определяют линейный функционал на касательном пространстве в этой точке. В координатном представлении компоненты формы ω задаются функциями ω_i с нижними индексами.

При замене координатных функций $x = (x^1, \dots, x^n)$ на $y = (y^1, \dots, y^n)$ компоненты векторного и ковекторного поля преобразуются по формулам

$$X^i \mapsto X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \qquad \omega_i \mapsto \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

Дифференциальную форму ω можно *свернуть* с векторным полем X, вычислив в каждой точке M значение соответствующего линейного функционала на соответствующем касательном векторе. В результате получится скалярная функция f, задающаяся в координатном представлении суммой $\sum_{i=1}^n \omega_i X^i$. Для удобства записи знак суммы по повторяющимся нижним и верхним индексам обычно опускается, т.е. пишется просто $f = \omega_i X^i$.

Тензор порядка (k,l) сопоставляет каждой точке $x \in M$ мультилинейную форму на произведении $(T_xM)^l \times (T_x^*M)^k$ касательных и кокасательных пространств в точке x. Тензор порядка $(1,0)$, в частности, линейный функционал на ковекторах, а тензор порядка $(0,1)$ – линейный функционал на касательных векторах. Компоненты тензора T порядка (k,l) задаются функциями $T_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_k}$ с l нижними и k верхними индексами. Значение тензора T на l векторных полях $X, \dots, Z$ и k формах $\omega, \dots, \upsilon$ задаются суммой

$$T_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_k} X^{i_1} \dots Z^{i_l} \omega_{j_1} \dots \upsilon_{j_k}.$$

Напоминаем, что знак суммы по повторяющимся индексам $i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_k$ опущен. Нижние индексы называются *ковариантными*, верхние – *контравариантными*.

При замене координат $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto y = (y^1, \dots, y^n)$ контравариантные индексы преобразуются умножением на матрицу Якоби $\frac{\partial y}{\partial x}$, ковариантные индексы преобразуются умножением на обратную матрицу $\frac{\partial x}{\partial y}$.

Сворачивая нижние индексы одного тензора с верхними индексами другого, можно строить новые тензоры. Например, сворачивая тензор T порядка $(2,0)$ с тензором S порядка $(1,2)$, получаем компоненты $R_d^{bc} = T^{ab} S_{ad}^c$ тензора R порядка $(2,1)$.

Метрика на (псевдо-)римановом многообразии задается симметрическим тензором g порядка $(0,2)$. Его значение $g_{ab} X^a Y^b$ на векторных полях X, Y задает скалярное произведение этих полей.

Компоненты метрики можно интерпретировать как элементы симметрической матрицы. Если в каждой точке (псевдо-)риманового многообразия взять обратную матрицу, то мы получим тензор порядка $(2,0)$.

Сверткой с метрикой или с ее обратной можно понижать или повышать индексы у других тензоров.

Часто встречающимся тензором порядка $(0,1)$ является градиент ∇f скалярной функции f на многообразии M. Его компоненты определяются частными производными $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Свертка градиента с векторным полем X дает производную f по направлению X.

Упражнение 2.1. *Показать, что производные скалярной функции f более высокого порядка* не *являются тензорами.*

Ниже мы увидим, что прибавлением поправок к частным производным можно определить *ковариантную* производную, которая будет уже настоящим тензором. Однако, способ ввести эти поправки не единственный.

2.2 Связность

В пространстве $\mathbb{A}^n$ не существует *канонической* евклидовой метрики. Фиксацией евклидовой метрики мы сужаем аффинную группу симметрий пространства $\mathbb{A}^n$ и получаем группу вращений и параллельных переносов, что неестественно и нежелательно при изучении аффинно-инвариантных методов. Однако, любой выбор евклидовой метрики в $\mathbb{A}^n$ приводит к одному и тому же множеству *геодезических*, а именно, прямых, пробегаемых с постоянной скоростью. Это связано с тем, что параллельный перенос касательных векторов, определяющий эволюцию геодезических, является *аффинным* инвариантом, т.е. остается неизменным при действии аффинной группы симметрий.

Параллельный перенос эквивалентен понятию *аффинной связности.* Аффинная связность ∇ на произвольном гладком многообразии M сопоставляет паре гладких векторных полей X, Y на M третье векторное поле, обозначающееся через $\nabla_X Y$. Оно интерпретируется как *ковариантная производная* поля Y по направлению поля X. Если $\nabla_X Y = 0$ вдоль некоторой кривой $\gamma(t)$ на M, то вектора $Y(\sigma(t))$ являются результатом параллельного переноса вектора $Y(\sigma(t_0))$ из точки $\sigma(t_0)$ в точки $\sigma(t)$ вдоль кривой σ.

Чтобы быть аффинной связностью, отображение $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ должно удовлетворять некоторым аксиомам. Оно билинейно, для любой гладкой скалярной функции f на M имеет место соотношение $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$, и оно является дифференцированием, т.е. для любой гладкой скалярной функции f также имеет место соотношение $\nabla_X(fY) = f'[X] \cdot Y + f\nabla_X Y$. Из этих аксиом следует, что разница двух связностей $\nabla, \tilde{\nabla}$ является тензором порядка (1,2), т.е. $\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ есть векторное поле, значение которого в точке $x \in M$ есть билинейная функция от значений полей X, Y в точке x.

Так как множество тензоров данного типа на M является векторным пространством, множество всех связностей на M образует аффинное пространство. В частности, аффинные комбинации связностей снова являются связностями.

В координатном представлении аффинная связность задается *символами Христоффеля* $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$, симметрическими по двум нижним индексам, однако сама она *не является тензором.* При замене координат $x \mapsto y$ символы Христоффеля преобразуются по правилу

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \mapsto \frac{\partial x^p}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial y^\beta}\Gamma^r_{pq}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^r} + \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}.$$

Для данных векторных полей X, Y поле $\nabla_X Y$ задается формулой

$$(\nabla_X Y)^a = X^b Y^a_{,b} + \Gamma^a_{bc} X^b Y^c.$$

Второй член является поправкой к производной поля Y по направлению поля X.

Оператор ∇_X *ковариантного дифференцирования* по направлению X применим также к другим типам тензорных полей. На скалярных функциях он определяется через производную по направлению,

$$\nabla_X f = f_{,i} X^i.$$

Дифференцирование других типов тензорных полей определяются правилом Лейбница. Например, производную $\nabla_X \omega$ дифференциальной формы ω (тензора порядка (0,1)) можно получить из соотношения

$$\nabla_X(\langle \omega, Y\rangle) = \langle \nabla_X \omega, Y\rangle + \langle \omega, \nabla_X Y\rangle.$$

Здесь $\langle \omega, Y\rangle$ обозначает свертку $\omega(Y) = \omega_i Y^i$, являющуюся скаляром.

Упражнение 2.2. *Проверить, что* $\nabla_X \omega$ *задается формулой*

$$(\nabla_X \omega)_i = \left(\omega_{i,k} - \Gamma^j_{ik}\omega_j\right) X^k.$$

Для тензора общего вида имеем

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)^{b\dots d}_{a\dots c} &= (T^{b\dots d}_{a\dots c,k} - \Gamma^l_{ak} T^{b\dots d}_{l\dots c} - \dots - \Gamma^l_{ck} T^{b\dots d}_{a\dots l} + \Gamma^b_{lk} T^{l\dots d}_{a\dots l} + \dots + \Gamma^d_{lk} T^{b\dots l}_{a\dots l}) X^k \\ &= T^{b\dots d}_{a\dots c;k} X^k.\end{aligned}$$

Определенные таким образом величины $T^{b\dots d}_{a\dots c;k}$ являются компонентами тензора, обозначаемого через ∇T и называемого *ковариантной производной* тензора T. Если T имеет порядок (k, l), то ∇T имеет порядок $(k, l+1)$. В частности, для скалярной функции f производная ∇f – просто градиент f, не зависящий от связности ∇. Если тензор ∇T тождественно равен нулю, то тензор T называется *параллельным* по отношению к связности ∇.

Если на многообразии M задана метрика g_{ab}, то на нем можно определить *связность Леви-Чивита*, задаваемую символами Христоффеля

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

и обозначаемую через $\hat\nabla$. Сама метрика параллельна по отношению к $\hat\nabla$, $\hat\nabla g = 0$. Поэтому ковариантное дифференцирование по связности Леви-Чивита коммутирует с понижением и поднятием индексов.

На аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ или векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ все евклидовы метрики имеют общую каноническую связность. Эта связность является *плоской*.

Определение 2.2. *Аффинная связность ∇ называется* плоской *если соответствующие ковариантные производные коммутируют.*

Связность ∇ плоская тогда и только тогда, когда в окрестности любой точки существует система координат, в которой $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$.

В частности, в аффинных координатах на $\mathbb{A}^n$ (или линейных координатах на $\mathbb{R}^n$) символы Христоффеля канонической связности равны нулю. В дальнейшем мы будем обозначать эту связность символом D. Ковариантные производные по отношению к D просто совпадают с частными производными в линейных координатах.

2.3 Аффинная метрика и кубическая форма

Теперь мы в состоянии приступить к описанию основных объектов аффинной дифференциальной геометрии. Рассмотрим погружение $f : M \to \mathbb{A}^{n+1}$ n-мерного многообразия M в аффинное пространство размерности $n+1$. Образ M (локально) является гиперповерхностью в $\mathbb{A}^{n+1}$.

Определение 2.3. *Векторное поле $\xi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется* трансверсальным *к f, если в каждой точке $x \in M$ вектор $\xi(x)$ трансверсален к $df[T_xM]$.*

В этом случае в каждой точке x имеем разложение $\mathbb{R}^{n+1}$ в прямую сумму $df[T_xM] \oplus L_{\xi(x)}$, где $L_{\xi(x)} = \{t\xi(x) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ – линейная оболочка вектора $\xi(x)$.

Определение 2.4. *Погружение $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется* центро-аффинным, *если поле $\xi = f$ является трансверсальным к f. В этом случае ξ называется* центро-аффинным трансверсальным полем*.*

В связи с барьерами нас будет интересовать только случай центро-аффинных вложений, т.е. отображение f инъективно и его образ можно идентифицировать с самим многообразием M. В дальнейшем мы будем рассматривать гиперповерхности в $\mathbb{R}^{n+1}$, оснащенные центро-аффинным трансверсальным полем $\xi(x) = -x$.

Пусть X, Y – касательные векторные поля на гиперповерхности $M \subset \mathbb{A}^{n+1}$, а ξ — трансверсальное поле. Разложим производную D_XY, которая является векторным полем на M со значениями в $\mathbb{R}^{n+1}$, в соответствии с вышеупомянутым разложением $\mathbb{R}^{n+1} = T_xM \oplus L_{\xi(x)}$. Мы получим трансверсальную компоненту, пропорциональную полю ξ, и касательную компоненту, равную ∇_XY для некоторой аффинной связности ∇ на M,

$$D_XY = \nabla_XY + h(X,Y)\xi, \qquad X, Y, \nabla_XY \in TM.$$

Определение 2.5. *Связность ∇ называется* аффинной связностью, *коэффициент h называется* аффинной фундаментальной формой, *а ковариантная производная $C = \nabla h$ называется* кубической формой *на M.*

Нетрудно проверить, что h является симметричным тензором порядка (0,2) на M. Таким образом C является тензором порядка (0,3).

Определение 2.6. *Если аффинная фундаментальная форма невырождена, то она называется* аффинной метрикой, *а поверхность M называется невырожденной.*

Более того, если гиперповерхность выпукла, то аффинная метрика знако-определенная. При этом метрика положительна, если поверхность искривлена в сторону $-\xi$, и отрицательна, если она искривлена в сторону ξ (см. Рис. 2.3).

В случае центро-аффинного вложения, когда M является гиперповерхностью в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\xi(x) = -x$, можно утверждать следующее.

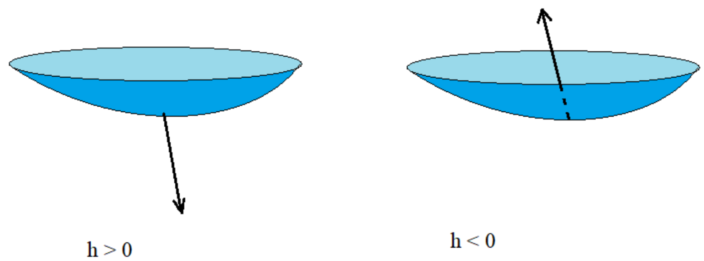

Рис. 1: Определение знака аффинной метрики

Теорема 2.1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — невырожденная гиперповерхность, оснащенная центро-аффинным трансверсальным полем. Тогда ее кубическая форма C является симметричной по всем трем индексам. Любая геодезическая связности ∇ целиком содержится в двумерном линейном подпространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, генерированным вектором ξ и касательным вектором к геодезической. Объекты ∇, h, C инвариантны по отношению к растяжениям $M \mapsto \alpha M$, $\alpha > 0$.*

Таким образом мы получили так называемую структуру Кодацци.

Определение 2.7. *Пусть ∇ – аффинная связность, а g – метрика. Если ∇g симметрична по всем индексам, то пара (∇, g) называется* структурой Кодацци. *Связность $\bar{\nabla} = 2\hat{\nabla} - \nabla$ называется* двойственной связностью, *а пара $(\bar{\nabla}, g)$ —* двойственной структурой Кодацци.

Специальным случаем является гессианова структура.

Определение 2.8. *Структура Кодацци (∇, g) с плоской связностью ∇ называется* гессиановой структурой *(Hessian structure).*

Структуры Кодацци и гессиановы структуры описаны в книге [6].

Каждой гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, оснащенной трансверсальным векторным полем ξ, можно сопоставить погружение $M \to \mathbb{R}_{n+1}$ в двойственное пространство. Каждой точке $x \in M$ поставим в соответствие точку $p \in \mathbb{R}_{n+1}$ такую, что p ортогонально T_xM, и $\langle p, \xi(x)\rangle = 1$. Определенное таким образом отображение $M \to \mathbb{R}_{n+1}$ называется *конормальным.*

Конормальное отображение является двойственностью на классе центро-аффинных вложений. Это означает, что если $\xi(x) = -x$ и M является центро-аффинной поверхностью, то применив конормальное отображение дважды, мы получим исходное центро-аффинное вложение. Более того, индуцированная конормальным отображением аффинная фундаментальная форма на M совпадает с индуцированной исходным вложением формой, а индуцированная конормальным отображением связность совпадает с двойственной связностью $\bar{\nabla}$.

Центро-аффинные объекты позволяют изучать вложения n-мерных многообразий M в $\mathbb{R}^{n+1}$, не обращаясь к самому отображению вложения. Справедлив следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть M – многообразие размерности n, на котором определена аффинная связность ∇ и симметрические тензоры h, C порядков (0,2) и (0,3), соответственно. Если эти объекты генерированы центро-аффинным вложением $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, то последнее восстанавливается либо из ∇, либо из пары (h, C) с точностью до линейного автоморфизма пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.*

2.4 Барьеры и центро-аффинные вложения

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, а F – логарифмично однородный самосогласованный барьер на K. Тогда поверхности уровня барьера переходят друг в друга под действием группы гомотетий, или растяжений пространства $\mathbb{R}^n$ на постоянный множитель. В частности, каждый внутренний луч конуса пересекает каждую поверхность уровня F ровно в одной точке. Поэтому поверхности уровня F можно рассматривать как центро-аффинные вложения в $\mathbb{R}^n$. При этом все поверхности уровня изоморфны друг другу как центро-аффинные вложения.

Более того, F восстанавливается из уровня M и константы ν с точностью до аддитивной константы. Поэтому объекты ∇, h, ν должны содержать всю необходимую методам внутренней точки информацию, а между барьером F и центро-аффинными объектами его поверхностей уровня должна существовать тесная связь. В этом разделе мы увидим, что на самом деле различные условия и объекты теории самосогласованных барьеров имеют аналог в центро-аффинной дифференциальной геометрии.

Основой этих связей является следующая теорема [7, 4].

Теорема 2.3 (Tsuji 1982; Loftin 2002). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – регулярный выпуклый конус, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – локально строго выпуклая логарифмично однородная функция степени -1.*

Тогда риманово многообразие, образованное внутренностью конуса K, оснащенной метрикой F'', распадается на прямое произведение одномерного радиального фактора и n-мерного трансверсального фактора. Подмногообразия, соответствующие радиальному фактору – внутренние лучи конуса K, а подмногообразия, соответствующие трансверсальному фактору – поверхности уровня функции F. Метрика на поверхностях уровня совпадает с центро-аффинной метрикой.

На самом деле, теорема остается верной также в отсутствии условия выпуклости [3]. Из теоремы немедленно получаем следствие.

Следствие 2.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – самосогласованный барьер с параметром ν. Пусть M – поверхность уровня F, рассматриваемая как центро-аффинное вложение в $\mathbb{R}^n$. Тогда аффинная метрика h на M задается ограничением $\nu^{-1}F''$ на M. Риманово многообразие, образованное внутренностью конуса K, оснащенной метрикой F'', распадается на прямое произведение одномерного радиального фактора и n-мерного трансверсального фактора.*

Однако, этим связи между барьером F и центро-аффинными объектами не ограничиваются. Имеем следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть M – поверхность уровня F, рассматриваемая как центро-аффинное вложение в $\mathbb{R}^n$. Тогда значение центро-аффинной метрики h и кубической формы C на касательном к M векторе u задаются формулами*

$$h[u,u] = \nu^{-1}F''[u,u],$$
$$C[u,u,u] = \nu^{-1}F'''[u,u,u].$$

Образ конормального отображения является поверхностью уровня двойственного барьера F_*.

Отсюда сразу можно вывести необходимое условие самосогласованности барьера F в терминах метрики h и кубической формы C, а именно неравенство $|C[u,u,u]| \leq 2\sqrt{\nu}(h[u,u])^{3/2}$. Однако, это условие не достаточно, поскольку тензоры h, C действуют только на векторах, касательных к M, а условие самосогласованности требует выполнение неравенства на всех касательных векторах. Верен следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, $n \geq 2$, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – локально строго выпуклая логарифмично однородная функция степени $-\nu$. Пусть M – поверхность уровня функции F, а h, C – аффинная метрика и кубическая форма на M, соответственно.*

Функция F самосогласованная тогда и только тогда, когда

$$|C[u,u,u]| \leq 2\gamma\,(h[u,u])^{3/2}$$

для всех векторов u, касательных к M, где $\gamma = \frac{\nu-2}{\sqrt{\nu-1}}$.

Таким образом, множитель $\sqrt{\nu}$ в приведенном выше необходимом условии заменяется на γ (см. Рис. 2.4,2.4).

Теперь мы в состоянии охарактеризовать те центро-аффинные вложения, которые являются поверхностями уровня самосогласованных барьеров.

Теорема 2.6. *Локально сильно выпуклая центро-аффинная гиперповерхность $M \subset \mathbb{R}^n$ является поверхностью уровня самосогласованного барьера тогда и только тогда, когда*

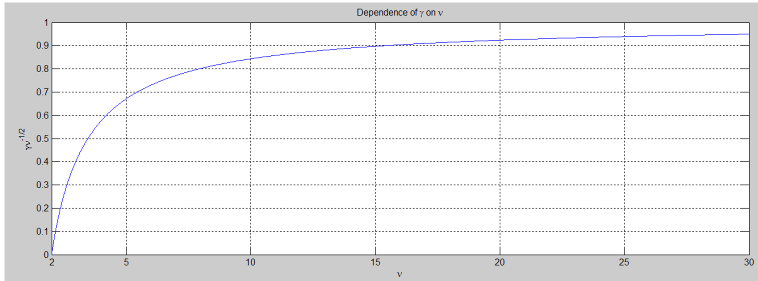

Рис. 2: Зависимость γ от ν

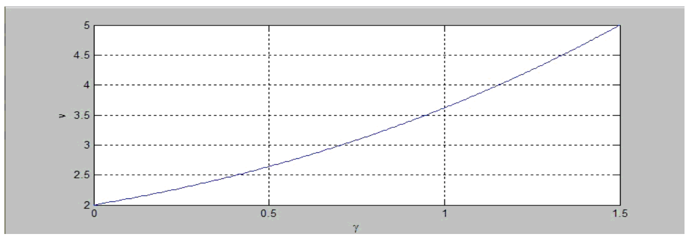

Рис. 3: Зависимость γ от ν

- *M асимптотично границе своей конической оболочки,*
- *ее кубическая форма C равномерно ограничена ее аффинной метрикой h.*

Параметр барьера равен $\nu = \frac{4+\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{2}\sqrt{4+\gamma^2}$, где 2γ – верхняя граница C.

Таким образом, самосогласованность F эквивалентна ограниченности кубической формы C. Чем меньше C, тем меньше будет параметр барьера.

Ясно, что минимальное значение γ достигается при $C \equiv 0$. Этот случай соответствует значению $\nu = 2$.

Следствие 2.2. *На конусах $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, не существует барьеров с параметром $\nu < 2$.*

Следующая теорема характеризует соответствующие поверхности.

Теорема 2.7 (Pick, Berwald). *Пусть M – вложенная гиперповерхность с нулевой кубической формой. Тогда M является квадрикой.*

Следствие 2.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, $n \geq 2$, а $F : K^o \to \mathbb{R}$ – барьер на F с параметром ν. Тогда следующие условия эквивалентны.*
1) $\nu = 2$.
2) K изоморфен конусу Лоренца L_n, а $F(x) = -\log Q(x)$, где Q – квадратичная форма с сигнатурой $(+-\cdots-)$, определяющая K.

Нетрудно проверить, что поверхности уровня F в этом случае изометричны гиперболическому пространству с постоянной кривизной.

Таким образом, конус Лоренца является самым простым конусом в конической оптимизации. Напомним, что в методе Ньютона на каждом шаге минимизируется квадратическая аппроксимация целевой функции. Однако, квадратический полином не может выступать в роли барьера на конусе. Эту роль должен играть гиперболический барьер. В следующем разделе мы последуем этой философии и построим соответствующую аппроксимацию, которая одновременно даст аппроксимацию самого конуса некоторым конусом Лоренца.

2.5 Аппроксимирующие конуса Лоренца

В предыдущей главе мы увидели, что для самосогласованного барьера на выпуклом множестве X эллипсоид Дикина вокруг каждой внутренней точки $x \in X$ целиком принадлежит X. В этом разделе мы увидим, что для логарифмично однородного самосогласованного барьера на выпуклом конусе K можно доказать более сильное утверждение. А именно, для каждой внутренней точки $x \in K$ мы построим конус Лоренца, содержащий эллипсоид Дикина вокруг x и целиком содержащийся в K.

Начнем с построения аппроксимирующего конуса Лоренца. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус, $F : K^o \to \mathbb{R}$ – барьер на F с параметром ν, а $\hat{x} \in K^o$ – произвольная точка.

Лемма 2.1. *Существует единственный конус Лоренца L с соответствующим гиперболическим барьером $F_L : L^o \to \mathbb{R}$ такой, что*

$$\nu F_L'(\hat{x}) = 2F'(\hat{x}), \qquad \nu F_L''(\hat{x}) = 2F''(\hat{x})$$

Упражнение 2.3. *Доказать эту лемму и построить гиперболический барьер F_L в явном виде.*

Перейдем в систему координат на $\mathbb{R}^n$, в которой $\hat{x} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{n-1}) = (1, 0, \dots, 0)$ и

$$F_L(x) = -\log(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2).$$

Тогда $F'(\hat{x}) = (-\nu, 0, \dots, 0)$, $F''(\hat{x}) = \nu I_n$ по построению F_L. Рассмотрим, какие значения F может принимать на аффинном подпространстве, задаваемом условием $x_0 = 1$. Введем на этом подпространстве координаты $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, так что $x = (1, \tilde{x})$. Рассмотрим луч, ведущий от точки $\tilde{x} = 0$ по направлению вектора u с единичной нормой. Условие самосогласованности ограничивает третью производную $F'''[u, u, u]$ функциями от $F''[u, u]$ и $F'[u]$. Введем обозначение $f = \nu^{-1}F$.

Лемма 2.2. *Третья производная функции $f(\tilde{x})$ удовлетворяет неравенству*

$$|f'''[u, u, u] - 6f''[u, u]f'[u] + 4(f'[u])^3| \le 2\gamma(f''[u, u] - (f'[u])^2)^{3/2}.$$

Из этого получаем дифференциальное неравенство на функцию $\xi(t) = \dot{\varphi}(t)$, где $\varphi(t) = f(tu)$, а именно

$$|\ddot{\xi} - 6\dot{\xi}\xi + 4\xi^3| \le 2\gamma(\dot{\xi} - \xi^2)^{3/2}.$$

С учетом начальных условий $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 1$ при $t \ge 0$ получаем неравенства

$$\frac{\nu-1}{\nu}\frac{1}{\sqrt{\nu-1}-t} - \frac{\sqrt{\nu-1}}{\nu}\frac{1}{1+\sqrt{\nu-1}t} \le \xi(t) \le -\frac{\nu-1}{\nu}\frac{1}{\sqrt{\nu-1}+t} + \frac{\sqrt{\nu-1}}{\nu}\frac{1}{1-\sqrt{\nu-1}t}.$$

Полагая для удобства $f(0) = \varphi(0) = -\frac{\nu-1}{2\nu}\log(\nu-1)$, получаем далее оценки

$$-\frac{\nu-1}{\nu}\log(\sqrt{\nu-1}-||\tilde{x}||) - \frac{1}{\nu}\log(1+\sqrt{\nu-1}||\tilde{x}||) \le f(\tilde{x}) \le -\frac{\nu-1}{\nu}\log(\sqrt{\nu-1}+||\tilde{x}||) - \frac{1}{\nu}\log(1-\sqrt{\nu-1}||\tilde{x}||).$$

В частности, f в любом случае определено для всех $\tilde{x}$ с нормой меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{\nu-1}}$, и никогда не определено для всех $\tilde{x}$ с нормой, превышающей $\sqrt{\nu-1}$. Эти граничные значения определяют внутреннюю и внешнюю аппроксимацию исходного конуса K конусами Лоренца.

Аппроксимации точные, и поэтому внутренний аппроксимирующий конус Лоренца должен содержать эллипсоид Дикина с центром в $\hat{x}$.

2.6 Аффинные сферы и канонический барьер

В предыдущих разделах мы рассматривали центро-аффинные вложения, в которых в роли трансверсального векторного поля выступает само вложение. С точки аффинной дифференциальной геометрии это не самый естественный выбор, поскольку он зависит от положения начала координат. Существует другой выбор трансверсального поля, так называемая *аффинная нормаль*, определенная с точностью до умножения на глобальную постоянную, которая фиксируется выбором меры объема в объемлющем пространстве. Погружения, оснащенные аффинной нормалью в качестве трансверсального поля, называются *погружениями Блашке* (Blaschke immersions).

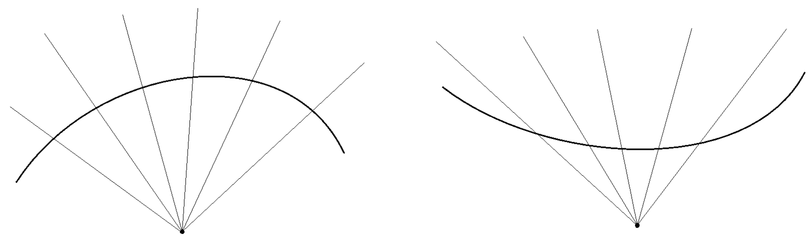

Рис. 4: Аффинная сфера эллиптического (сл.) и гиперболического (спр.) типа

(Собственной) *аффинной сферой* называется погружение Блашке, в котором прямые, проведенные через каждую точку по направлению аффинной нормали, проходят все через одну общую точку, так называемый *центр* аффинной сферы. Если поместить начало координат в центр аффинной сферы, то аффинные нормали окажутся пропорциональны центро-аффинному векторному полю. Можно показать, что при этом множитель является постоянным. Таким образом, аффинные сферы являются в некотором смысле пересечением центро-аффинных погружений и погружений Блашке.

Возникает вопрос, можно ли исходя из центро-аффинных объектов определить, не является ли центро-аффинное погружение аффинной сферой. Ответ дает следующая лемма.

Лемма 2.3. *Центро-аффинная гиперповерхность является аффинной сферой тогда и только тогда, когда $C_{\alpha\beta\gamma}h^{\beta\gamma} = 0$, т.е. след ее кубической формы равен нулю.*

Аффинные сферы могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми. Выпуклые собственные аффинные сферы делятся на сферы эллиптического и гиперболического типов. В первом случае погружение искривляется в сторону центра, во втором в противоположную сторону (см. Рис. 4).

Важной задачей в аффинной дифференциальной геометрии является классификация *полных* аффинных сфер, т.е. таких, в которых любая геодезическая продожается бесконечно. Полные эллиптические аффинные сферы ограничиваются эллипсоидами. Классификация полных аффинных сфер гиперболического типа тесно связана с регулярными выпуклыми конусами и поэтому представляет особый интерес для конической оптимизации. Она описывается следующей теоремой.

Теорема 2.8 (Теорема Калаби)**.** *[Fefferman 76, Cheng-Yau 86, Li 90, и др.] Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус. Тогда существует единственное расслоение внутренности K^o гомотетическим семейством полных аффинных сфер гиперболического типа, которые асимптотические к границе ∂K.*

Любая полная аффинная сфера гиперболического типа асимптотическая к границе ∂K некоторого регулярного выпуклого конуса K.

Логарифмично однородная функция F степени n, поверхности уровня которой задаются этим расслоением, можно с точностью до аддитивной постоянной охарактеризовать как выпуклое решение *уравнения Монжа-Ампера*

$$\log\det F'' = 2F$$

с граничным условием

$$\lim_{x\to\partial K} F(x) = +\infty.$$

Существование и единственность расслоения делают эту функцию F в каком-то смысле канонической для данного конуса K. В этой связи представляет интерес вопрос о том, не является ли F барьером для K, т.е. удовлетворяет ли она условию самосогласованности. Ответ на этот вопрос утвердительный [2, 1].

Теорема 2.9. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный выпуклый конус. Тогда выпуклое решение уравнения Монжа-Ампера $\log\det F'' = 2F$ с граничным условием $F|_{\partial K} = +\infty$ является логарифмично однородным самосогласованным барьером на K с параметром $\nu = n$. Этот барьер называется* канонически*м*.

Список литературы

[1] Daniel J. Fox. A Schwarz lemma for Kähler affine metrics and the canonical potential of a proper convex cone. *Ann. Mat. Pur. Appl.*, 194(1):1–42, 2015.

[2] Roland Hildebrand. Canonical barriers on convex cones. *Math. Oper. Res.*, 39(3):841–850, 2014.

[3] Roland Hildebrand. Centro-affine hypersurface immersions with parallel cubic form. *Contributions to Algebra and Geometry*, 56(2):593–640, 2015.

[4] John C. Loftin. Riemannian metrics on locally projectively flat manifolds. *Amer. J. Math.*, 124(3):595–609, 2002.

[5] Katsumi Nomizu and Takeshi Sasaki. *Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions*, volume 111 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] Hirohiko Shima. *The Geometry of Hessian structures.* World Scientific, Hackensack, New Jersey, 2007.

[7] Tadashi Tsuji. On homogeneous convex cones of non-positive curvature. *Tokyo J. Math.*, 5(2):405–417, 1982.