5 История конического программирования

В этом разделе мы представим краткий обзор истории развития методов внутренней точки и конического программирования.

5.1 Методы для задач линейного программирования

Изначально методы внутренней точки развивались для решения задач линейного программирования. Параллельно с эволюцией симплекс-метода шло развитие класса методов для решения общих негладких выпуклых задач оптимизации, основанных на построении последовательности множеств монотонно убывающего объема, содержащих оптимальное решение задачи. В 1965 г. А.Ю. Левин предложил метод центральных сечений [35], а в 1972 г. Н.З. Шор разработал алгоритм, использующий эллипсоиды [69]. Метод эллипсоидов в современном виде был предложен Д.Б. Юдиным и А.С. Немировским в 1976 г. [86]. Этот метод имеет в теории полиномиальную сложность для решения задач линейного программирования [28]. Однако, на практике он не может конкурировать с симплекс-методом.

В 1967 г. И.И. Дикин предложил первый метод внутренней точки для линейного программирования [11]. Этот метод основан на построении последовательности эллипсоидов, содержащихся во множестве допустимых точек и сходящейся к оптимальному решению. В 1984 г. Кармаркар построил первый метод внутренней точки, имеющий полиномиальную сложность [26]. Его метод применял к множеству допустимых точек проективные преобразования перед тем, как строить вписанный эллипсоид. Поэтому линейную функцию цены пришлось заменить на дробно-линейную. Этот недостаток смотивировал развитие вариантов алгоритма, которые использовали аффинные преобразования и которые были схожи методу Дикина [81, 5]. Эти методы были способны конкурировать с симплекс-методом на практике, но только метод Кармаркара имел также хорошие теоретические свойства.

Работа Кармаркара послужила толчком для систематического изучения методов внутренней точки для линейного программирования. Метод Кармаркара относится к классу прямых методов, поскольку он строит последовательность допустимых точек для исходной задачи. Его можно переписать как барьерный метод, т.е. минимизирующий сумму исходной функции цены и барьера, стремящегося к бесконечности на границе допустимого множества [26, 75]. В качестве барьера на ортанте $\mathbb{R}^n_+$ использовалась функция $F(x) = -\sum_{j=1}^n \log x_i$. Барьерные методы были уже ранее известны из нелинейной оптимизации.

В серии работ [6, 7, 31] подробно изучалась связь между барьерными методами с одной стороны и методом Кармаркара и его аффинных вариантов с другой стороны, см. также [36]. В частности, изучалось векторное поле направлений шага. Поле, получающееся в методе Кармаркара, называется *полем проективной шкалировки* [31], а поле, используемое в аффинных вариантах *полем аффинной шкалировки* [7]. Оба поля совпадают на центральном пути. В работе [63] был предложен метод, строящий итерации в окрестности центрального пути и следующий этому пути в направлении к решению задачи. Этот метод обходился меньшим числом итераций для достижения данного уровня точности, чем метод Кармаркара, но сами итерации были более трудоемкими.

В работах [30, 41, 77] были предложены прямо-двойственные методы, генерерующие пары прямых и двойственных точек на каждом шаге. В статье [37] построен прямо-двойственный метод второго порядка, в [39] используется адаптивная длина шага. В работах [29, 38] предлагаются прямо-двойственные методы, итерации которых используют недопустимые точки и уменьшают невязку в линейных ограничениях одновременно со значением функции цены. Обзоры начального этапа развития методов внутренних точек можно найти в [32, 67, 16, 10, 83].

5.2 Обобщение на произвольные конуса

Все вышеописанные методы используют либо стандартный логарифмичный барьер, либо сумму логарифмов координат с положительными весами, и были разработаны для решения задач линейного программирования. В 1988 г. Ю.Е. Нестеров и А.С. Немировский расширили область применения методов внутренней точки на проблемы оптимизации над произвольными конусами и ввели понятие конической программы [54, 55]. Основным нововведением, позволившим сделать это обобщение, было понятие самосогласованного барьера [56]. В частности, методы с полиномиальной сложностью были разработаны для решения задач полу-определенного программирования [57], что в последствии привело и к существенным прорывам в различных приложениях. Нестеров и Немировский также построили теорию конической двойственности, обобщающую хорошо известную двойственность в линейном программировании [58].

Прямые методы для решения задач линейного программирования независимо были обобщены Ф. Ализаде на случай полу-определенных программ [2, 3]. Позже Ализаде обобщил также и прямо-двойственные методы [4]. Однако, это методы были основаны на шкалирующих преобразованиях, сохраняющих конус, и поэтому годились только для однородных конусов.

Нестеров и Немировский выделили два свойства логарифмических барьеров, которые объясняли эффективность методов внутренней точки на задачах линейного программирования, а именно логарифмичную однородность и самосогласованность. Это позволило им разработать аксиоматический подход к барьерам для общего случая конического программирования. В книге [59] предложена самодостаточная теория методов внутренней точки для конического программирования над произвольными конусами, основанная на логарифмично однородных самосогласованных барьерах. В этой книге такие барьеры называются *нормальными*, но это обозначение не прижилось.

Предложенные Нестеровым и Немировским методы внутренней точки делятся на два класса, следующие центральному пути (path-following) и понижающие потенциал (potential reduction). Большинство из них являются обобщениями методов аффинной шкалировки.

В методах следования центральному пути итерации не покидают некоторую окрестность центрального пути, одновременно продвигаясь вдоль него по направлению к решению. Диаметр окрестности при этом определяется параметром барьера ν. Чем больше этот параметр, тем меньше окрестность и тем короче шаги вдоль центрального пути, которые можно сделать, не опасаясь покинуть его окрестность. В этих так называемых методах *короткого шага* длина шага порядка единицы в соответствующей локальной норме, задаваемой гессианом барьера. В противоположность этому методы с *длинным шагом* могут удаляться дальше от центрального пути, но в теории их скорость сходимости не выше, чем у методов с коротким шагом. Модификацией этих методов являются методы типа прогноз-поправка (predictor-corrector), которые отдельно друг от друга делают шаг вдоль центрального пути (прогноз) и шаг по направлению к центральному пути, корректирующий сделанную на предыдущем шаге ошибку (поправка). В прямых методах расстояние до центрального пути измеряется в локальной норме, задаваемой гессианом барьера в текущей точке. В прямо-двойственных методах итерации проводятся одновременно в прямом и двойственном пространствах, и расстояние до центрального пути измеряется иными способами. Прототипы прямо-двойственных методов для линейного программирования представлены в работах [36, 30, 41]. В [79] разработаны обобщения на произвольные конуса.

Методы, понижающие потенциал, в большинстве своем прямо-двойственные. Объект, генерируемый методом на каждом шаге, состоит из точки в прямом пространстве, точки в двойственном пространстве, и положительного числа. На множестве таких троек определен некий потенциал, убывающий монотонно в ходе итераций. Методы могут генерировать точки, далекие от центрального пути. Потенциал неограничен снизу, и если он стремится к $-\infty$ на некоторой последовательности троек, то компоненты этой последовательности стремятся к решениям прямой и двойственной задачи, соответственно. Потенциал и вместе с ним разрыв двойственности гарантировано убывают на каждом шаге на некоторую конечную величину, обеспечивая линейную скорость сходимости. Однако, чем больше параметр барьера, тем меньше величина, на которую уменьшаются потенциал и разрыв двойственности. Прототипы таких методов для линейного программирования представлены в работах [73, 77]. Они используют так называемый потенциал Танабе, Тодда, Йе (Tanabe-Todd-Ye potential), который был обобщен в более поздних работах, например, [44]. Метод Кармаркара также можно интерпретировать как прямой метод понижения потенциала, что было замечено еще самим Кармаркаром [26].

В работе [44] Ю.Е. Нестеров установил, что последовательности точек, генерируемые многими методами понижения потенциала и методами следования центральному пути с длинным шагом имеют общие свойства.

5.3 Случай симметрических конусов

Для того, чтобы коническая программа над некоторым конусом $K \subset \mathbb{R}^n$ эффективно решалась, необходимо наличие эффективно вычислимого самосогласованного барьера на K с небольшим значением параметра. Для конусов, лежащих в основе линейных, квадратично-конических и полу-определенных программ, т.е. ортанта, конуса Лоренца и матричных конусов, известны легко вычислимые барьеры с малым значением параметра. Это объясняло успех методов внутренней точки на этих классах конических программ.

В 1994 г. Ю.Е. Нестеров и М. Тодд заметили, что стандартные логарифмичные барьеры на ортанте, конусе Лоренца и матричных конусах обладают особым свойством, а именно, они *авто-шкалированы* [49]. В частности это влечет за собой, что для всех $x \in \operatorname{int} K$ и $s \in \operatorname{int} K^*$ существует единственная точка $w \in \operatorname{int} K$ такая, что $F''(w)x = s$ [50, Теорема 3.1]. Точка w называется *точкой шкалировки* прямо-двойственной пары (x, s). В отличие от центрального пути она независима от данных конической программы и является исключительно свойством самого барьера. Нестеров и Тодд развили теорию методов внутренних точек специально для авто-шкалированных барьеров [50, 51]. В этой теории направление шага, так называемое направление Нестерова-Тодда, вычисляется с помощью гессиана барьера в точке шкалировки. Оно обладает прямо-двойственной симметрией. На практике эти методы ведут себя лучше, чем методы для произвольных конусов [76, 74]. Направление Нестерова-Тодда для линейного программирования было уже ранее найдено в работах [36, 30, 41].

Примерно в то же время Л.Е. Файбусович заметил [12], что конуса, используемые в линейных, квадратично-конических и полу-определенных программах, имеют другое общее свойство, а именно, они являются симметрическими. Симметрические конуса характеризуются условиями однородности и самодвойственности, т.е. их группа линейных автоморфизмов действует транзитивно на внутренности конуса, а двойственный конус линейно изоморфен исходному. Их также можно охарактеризовать как конусы квадратов в евклидовых жордановых алгебрах. Файбусович обобщил методы, разработанные для вышеназванных конусов, на произвольные симметрические конуса, используя в явном виде лежащую в основе конуса жорданову алгебру [13, 14], см. также [66].

В то время как авто-шкалировка является свойством барьера, симметричность является свойством конуса. Тем не менее, эти два свойства оказались тесно связаны друг с другом. Несколько авторов доказали независимо друг от друга, что конус допускает авто-шкалированный барьер тогда и только тогда, когда он симметрический, и представили полную классификацию авто-шкалированных барьеров [19, 18, 20, 65, 22]. Обзор истории этих исследований можно найти в [21].

Методы внутренней точки для авто-шкалированных барьеров привлекли внимание многих исследователей [40, 43, 71, 72, 78], см. также более общие обзоры и пособия [80, 84, 62, 85, 82, 64].

5.4 Обобщения на несимметрические конуса

В работе [17] методы, основанные на авто-шкалированных барьерах, были обобщены на случай *гиперболических* барьеров на гиперболических конусах. В работе [9] были предложены методы для однородных конусов, основанные на представлении этих конусов через T-алгебры. В работах [45, 53] понятие точки шкалировки было рассмотрено для произвольных барьеров.

К началу 2000-х развитие теории методов внутренней точки замедлилось, и центр исследований переместился к приложениям. Проблемы оптимизации, возникающие на практике, редко представлены в виде стандартной конической программы над симметрическим конусом, и часто даже неэквивалентны такой программе, например, потому что они невыпуклы. Поэтому важно уметь переформулировывать возникающие в различных областях проблемы оптимизации в симметрические программы, или находить выпуклые релаксации в виде таких программ. Соответственно винмание исследователей стало акцентироваться на формулировке разных опримизационных проблем в виде полу-определенных программ и конструкции полу-определенных релаксаций.

В последние годы, однако, снова наблюдается повышенный интерес к методам внутренней точки и самосогласованным барьерам. В частности, были построены новые барьеры, как для произвольных выпуклых множеств и конусов [23, 15, 8, 1], так и для линейного программирования [33, Раздел 6.3],[34]. В работе [48] в качестве обобщения авто-шкалированных барьеров были рассмотрены барьеры с *отрицательной кривизной*, а параметр барьера как мерило скорости сходимости был дополнен *коэффициентом рецессии*.

5.5 Геометрия самосогласованных барьеров

В этом разделе мы представим обзор исследований спецефически по геометрии методов внутренней точки и самосогласованных барьеров.

Подробный анализ геометрии линейного программирования был проведен Кармаркаром в работе [27]. В качестве одного из геометрических объектов выступает риманова метрика, определенная гессианом барьера. Изначально эта метрика была введена вне связи с самим барьером. Метрика позволяет преобразовывать градиенты (кокасательные векторные поля) в направления (касательные векторные поля) и наоборот, что приводит к интерпретации методов внутренней точки как методов градиентного спуска, минимизирующих некий потенциал. В случае методов аффинного типа метрика определена на внутренности ортанта, в то время как в методах проективного типа она определена на множестве внутренних лучей ортанта. В первом случае метрика является плоской, во втором она обладает ненулевой кривизной. В аффинном случае направление шага определяется градиентом линейной функции цены, в проективном градиентом некоторого потенциала, хотя в оригинальной формулировке [27, Theorem 1] это не упомянуто в явном виде. Одним из итогов геометрического характера работы [27] был рост числа итераций метода с кривизной траекторий градиентного векторного поля, поскольку кривизна определяет качество аппроксимации интегральной кривой дискретной последовательностью итераций градиентного спуска. Оценки числа итераций через кривризну центрального пути были позже получены также в работах [70, 87, 42, 25].

Ю.Е. Нестеров и А.С. Немировский показали, что преобразование Лежандра логарифмично однородного самосогласованного барьера F на конусе K является изометрией между внутренностями прямого и двойственного конусов, если рассматривать их как римановы многообразия, оснащенные метриками F'', F''_*, соответственно [59, p.45], см. также [52]. Более того, эта изометрия переводит третью производную F''' в $-F'''_*$, а первую производную F' в $-F'_*$.

Впоследствии риманова метрика играла только побочную роль, определяя локальные нормы в окрестностях точек итераций или точек шкалировок. В 2000-х гг. интерес к метрике как к самостоятельному геометрическому объекту возобновился. Были исследованы ее геодезические и определенные ею расстояния. В работе [52] геодезические были посчитаны для нескольких конкретных случаев. Прямое произведение внутренностей прямого и двойственного конусов также было рассмотрено как риманово многообразие, оснащенное прямым произведением метрик на факторах. Было показано, что длина прямо-двойственного центрального пути в этой метрике отличалась на фактор, ограниченный $\sqrt{2}$, от геодезической длины. В работах [46, 47] с геодезической длиной сравнивалась длина прямого центрального пути.

В работах [60, 61, 24] была установлена связь между геометрией барьеров в информационной геометрией. Количество итераций было оценено через кривизну центрального пути. В обеих теориях присутствует *двойственно плоская структура* (dually flat structure), определенная как многообразие, наделенное римановой метрикой наряду с парой плоских аффинных связностей, двойственных друг к другу по отношению к метрике. В роли прямой аффинной связности выступает каноническая связность прямого векторного пространства $\mathbb{R}^n$, в то время как в роли двойственной связности выступает связность двойственного пространства $\mathbb{R}_n$. Такая геометрическая структура исвестна также под названием *гессианова многообразия* (Hessian manifold) [68]. Было показано, что в случае методов аффинного типа поле неправлений шага является параллельным по отношению к двойственной связности. Этот результат был ранее доказан в эквивалентной формулировке в работе [7].

Список литературы

[1] Jacob Abernethy and Elad Hazan. Faster convex optimization: Simulated annealing with an efficient universal barrier. In *Proceedings of The 33rd International Conference on Machine Learning*, volume 48, pages 2520–2528, 2016.

[2] Farid Alizadeh. *Semi-definite programming*. PhD thesis, University of Minnesota, 1991.

[3] Farid Alizadeh. Optimization over the positive semi-definite cone: interior-point methods and combinatorial applications. In Panos M. Pardalos, editor, *Advances in Optimization and Parallel Computing*, pages 1–25. North Holland, Amsterdam, 1992.

[4] Farid Alizadeh. Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM J. Optimiz.*, 5(1):13–51, 1995.

[5] Earl R. Barnes. A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems. *Math. Program., Ser. B*, 36(2):174–182, 1986.

[6] David Allen Bayer and Jeffrey Clark Lagarias. The nonlinear geometry of linear programming I. Affine and projective scaling trajectories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314(2):499–526, 1989.

[7] David Allen Bayer and Jeffrey Clark Lagarias. The nonlinear geometry of linear programming II. Legendre transform coordinates and central trajectories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314(2):527–581, 1989.

[8] Sébastien Bubeck and Ronen Eldan. The entropic barrier: exponential families, log-concave geometry, and self-concordance. *Math. Oper. Res.*, 44(1):264–276, 2019.

[9] Chek Beng Chua. A T-algebraic approach to primal-dual interior-point algorithms. *SIAM J. Optimiz.*, 20:503–523, 2009.

[10] Dick den Hertog and Cornelis Roos. A survey of search directions in interior point methods for linear programming. *Math. Program., Ser. B*, 52(1):481–509, 1991.

[11] I.I. Dikin. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviet Math. Dokl.*, 8:674–675, 1967.

[12] Leonid Faybusovich. Jordan algebras, symmetric cones and interior-point methods. Technical report, University of Notre Dame, 1995.

[13] Leonid Faybusovich. Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms. *Positivity*, 1(4):331–357, 1997.

[14] Leonid Faybusovich. Linear systems in Jordan algebras and primal-dual interior-point algorithms. *J. Comput. Appl. Math.*, 86:149–175, 1997.

[15] Daniel J. Fox. A Schwarz lemma for Kähler affine metrics and the canonical potential of a proper convex cone. *Ann. Mat. Pur. Appl.*, 194(1):1–42, 2015.

[16] Clovis C. Gonzaga. Path-following methods for linear programming. *SIAM Rev.*, 34:167–224, 1992.

[17] Osman Güler. Hyperbolic polynomials and interior-point methods for convex programming. *Math. Oper. Res.*, 22:350–377, 1997.

[18] Raphael A. Hauser. Self-scaled barrier functions: decomposition and classification. Technical Report Numerical Analysis Report DAMTP 1999/NA13, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge, 1999.

[19] Raphael A. Hauser. *On search directions for self-scaled conic programming*. PhD thesis, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, 2000.

[20] Raphael A. Hauser. Self-scaled barriers for semidefinite programming. Technical Report Numerical Analysis Report DAMTP 2000/NA02, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge, 2000.

[21] Raphael A. Hauser and Osman Güler. Self-scaled barrier functions on symmetric cones and their classification. *Found. Comput. Math.*, 2(2):121–143, 2002.

[22] Raphael A. Hauser and Yongdo Lim. Self-scaled barriers for irreducible symmetric cones. *SIAM J. Optimiz.*, 12(3):715–723, 2002.

[23] Roland Hildebrand. Canonical barriers on convex cones. *Math. Oper. Res.*, 39(3):841–850, 2014.

[24] Satoshi Kakihara, Atsumi Ohara, and Takashi Tsuchiya. Information geometry and interior-point algorithms in semidefinite programs and symmetric cone programs. *J. Optim. Theory Appl.*, 157(3):749–780, 2013.

[25] Satoshi Kakihara, Atsumi Ohara, and Takashi Tsuchiya. Curvature integrals and iteration complexities in SDP and symmetric cone programs. *Comput. Optim. Appl.*, 57(3):623–665, 2014.

[26] Narendra Karmarkar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373–395, 1984.

[27] Narendra Karmarkar. Riemannian geometry underlying interior-point methods for linear programming. In Jeffrey Clark Lagarias and Michael J. Todd, editors, *Mathematical Developments Arising from Linear Programming*, volume 114 of *Contemporary Mathematics*, pages 51–75. AMS, Providence, Rhode Island, 1988.

[28] Leonid G. Khachiyan. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании (A polynomial algorithm in linear programming). *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 244(5):1093–1096, 1979.

[29] Masakazu Kojima, Nimrod Megiddo, and Shinji Mizuno. A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming. *Math. Program., Ser. B*, 61(1):263–280, 1993.

[30] Masakazu Kojima, Shinji Mizuno, and Akiko Yoshise. A primal-dual interior point algorithm for linear programming. In Nimrod Megiddo, editor, *Progress in Mathematical Programming*, chapter 2, pages 29–47. Springer, New York, 1989.

[31] Jeffrey Clark Lagarias. The nonlinear geometry of linear programming III. Projective Legendre transform coordinates and Hilbert geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 320(1):193–225, 1990.

[32] Jeffrey Clark Lagarias and Michael J. Todd, editors. *Mathematical Developments Arising from Linear Programming*, volume 114 of *Contemporary Mathematics*. AMS, Providence, Rhode Island, 1988.

[33] Yin Tat Lee. *Faster Algorithms for Convex and Combinatorial Optimization*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2016.

[34] Yin Tat Lee and Aaron Daniel Sidford. A faster algorithm for linear programming and the maximum flow problem. In *The Fifth International Conference on Continuous Optimization of the Mathematical Optimization Society (ICCOPT)*, page 58, 2016.

[35] Anatoli Yu. Levin. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций (On an algorithm for the minimization of convex functions). *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 160(6):1244–1247, 1965.

[36] Nimrod Megiddo. Pathways to the optimal set in linear programming. In Nimrod Megiddo, editor, *Progress in Mathematical Programming*, chapter 8, pages 131–158. Springer, New York, 1989.

[37] Sanjay Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM J. Optimiz.*, 2(4):575–601, 1992.

[38] Shinji Mizuno, Masakazu Kojima, and Michael J. Todd. Infeasible-interior-point primal-dual potential-reduction algorithms for linear programming. *SIAM J. Optimiz.*, 5(1):52–67, 1995.

[39] Shinji Mizuno, Michael J. Todd, and Yinyu Ye. On adaptive-step primal-dual interior-point algorithms for linear programming. *Math. Oper. Res.*, 18(4):964–981, 1993.

[40] Renato D.C. Monteiro. Primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming. *SIAM J. Optimiz.*, 7(3):663–678, 1997.

[41] Renato D.C. Monteiro and Ilan Adler. Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear programming. *Math. Program., Ser. B*, 44(1):27–41, 1989.

[42] Renato D.C. Monteiro and Takashi Tsuchiya. A strong bound on the integral of the central path curvature and its relationship with the iteration-complexity of primal-dual path-following LP algorithms. *Math. Program., Ser. A*, 115(1):105–149, 2008.

[43] Renato D.C. Monteiro and Yin Zhang. A unified analysis for a class of long-step primal-dual path-following interior-point algorithms for semidefinite programming. *Math. Program., Ser. B*, 81(3):281–299, 1998.

[44] Yuri Nesterov. Long-step strategies in interior-point primal-dual methods. *Math. Program.*, 76:47–94, 1996.

[45] Yuri Nesterov. Towards nonsymmetric conic optimization. Discussion paper 2006/28, CORE, Louvain-la-Neuve, 2006.

[46] Yuri Nesterov and Arkadi Nemirovski. Central path and Riemannian distances. Discussion paper 2003/51, CORE, Louvain-la-Neuve, 2003.

[47] Yuri Nesterov and Arkadi Nemirovski. Primal central paths and Riemannian distances for convex sets. *Found. Comput. Math.*, 8(5):533–560, 2008.

[48] Yuri Nesterov and Levent Tunçel. Local superlinear convergence of polynomial-time interior-point methods for hyperbolicity cone optimization problems. *SIAM J. Optimiz.*, 26(1):139–170, 2016.

[49] Yuri E. Nesterov and Michael J. Todd. Self-scaled cones and interior-point methods in nonlinear programming. Discussion paper 1994/62, CORE, Louvain-la-Neuve, 1994.

[50] Yuri E. Nesterov and Michael J. Todd. Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Math. Oper. Res.*, 22:1–42, 1997.

[51] Yuri E. Nesterov and Michael J. Todd. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM J. Optimiz.*, 8(2):324–364, 1998.

[52] Yuri E. Nesterov and Michael J. Todd. On the Riemannian geometry defined by self-concordant barriers and interior-point methods. *Found. Comput. Math.*, 2:333–361, 2002.

[53] Yurii Nesterov. Towards non-symmetric conic optimization. *Optim. Method Softw.*, 27(5):893–917, 2012.

[54] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. A general approach to polynomial-time algorithms design for convex programming. Technical report, Centr. Econ. & Math. Inst., USSR Acad. Sci., Moscow, 1988.

[55] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. Polynomial barrier methods in convex programming. *Ekonom. i Mat. Metody*, 24(6):1084–1091, 1988.

[56] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. Self-concordant functions and polynomial time methods in convex programming. Technical report, Centr. Econ. & Math. Inst., USSR Acad. Sci., Moscow, 1989.

[57] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. Optimization over positive semidefinite matrices: Mathematical background and user's manual. Technical report, Centr. Econ. & Math. Inst., USSR Acad. Sci., Moscow, 1990.

[58] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. Conic formulation of a convex programming problem and duality. *Optim. Methods Softw.*, 1(2):95–115, 1992.

[59] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. *Interior-point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, volume 13 of *SIAM Stud. Appl. Math.* SIAM, Philadelphia, 1994.

[60] Atsumi Ohara. Information geometric analysis of an interior point method for semidefinite programming. In O. Barndorff-Nielsen and E. Jensen, editors, *Geometry in Present Day Science*, pages 49–74. World Scientific, 1999.

[61] Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya. An information geometric approach to polynomial-time interior-point algorithms: complexity bound via curvature integral. Technical Report 1055, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 2007. Research Memorandum.

[62] Florian A. Potra and Stephen J. Wright. Interior-point methods. *J. Comput. Appl. Math.*, 124(2):281–302, 2000.

[63] James Renegar. A polynomial-time algorithm based on Newton's method for linear programming. *Math. Program., Ser. B*, 40(1):59–93, 1988.

[64] James Renegar. *A Mathematical View of Interior-Point Methods in Convex Optimization*. MPS/SIAM Ser. Optim. SIAM, Philadelphia, 2001.

[65] Stefan Hans Schmieta. Complete classification of self-scaled barrier functions. Technical Report CORC TR-2000-01, Columbia University, New York, 2000.

[66] Stefan Hans Schmieta and Farid Alizadeh. Associative and Jordan algebras, and polynomial time interior-point algorithms for symmetric cones. *Math. Oper. Res.*, 26(3):543–564, 2001.

[67] David F. Shanno and Ansuman Bagchi. A unified view of interior point methods for linear programming. *Ann. Oper. Res.*, 22(1):55–70, 1990.

[68] Hirohiko Shima. *The Geometry of Hessian structures*. World Scientific, Hackensack, New Jersey, 2007.

[69] Naum Z. Shor. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования (Cut method with space dilation for the solution of convex programming problems). *Kibernetika*, 1:94–95, 1977.

[70] György Sonnevend, Josef Stoer, and Gongyun Zhao. On the complexity of following the central path of linear programs by linear extrapolation II. *Math. Program., Ser. B*, 52(1):527–553, 1991.

[71] Jos F. Sturm and Shuzhong Zhang. On the long-step path-following method for semidefinite programming. *Oper. Res. Lett.*, 22(4–5):145–150, 1998.

[72] Jos F. Sturm and Shuzhong Zhang. Symmetric primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming. *Appl. Numer. Math.*, 29(3):301–315, 1999.

[73] Kunio Tanabe. Centered Newton method for mathematical programming. In M. Iri and K. Yajima, editors, *System Modeling and Optimization: Proc. of the 13th IFIP Conf.*, volume 113 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 197–206. Springer, Berlin, 1988. Tokyo, 1987.

[74] Michael J. Todd. A study of search directions in primal-dual interior-point methods for semidefinite programming. *Optim. Methods Softw.*, 11(1–4):1–46, 1999.

[75] Michael J. Todd and Bruce P. Burrell. An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables. *Algorithmica*, 1:409–424, 1986.

[76] Michael J. Todd, Kim-Chuan Toh, and Reha H. Tütüncü. On the Nesterov-Todd direction in semidefinite programming. *SIAM J. Optimiz.*, 8(3):769–796, 1998.

[77] Michael J. Todd and Yinyu Ye. A centered projective algorithm for linear programming. *Math. Oper. Res.*, 15(3):508–529, 1990.

[78] Levent Tunçel. Potential reduction and primal-dual methods. In *Handbook of semi-definite programming. Theory, Algorithms, and Applications*, volume 27 of *International Series in Operations Research & Management Science*, chapter 9, pages 235–265. Springer, 2000.

[79] Levent Tunçel. Generalization of primal-dual interior-point methods to convex optimization problems in conic form. *Found. Comput. Math.*, 1(3):229–254, 2001.

[80] Lieven Vandenberghe and Stephen P. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Rev.*, 38(1):49–95, 1996.

[81] Robert J. Vanderbei, Marc S. Meketon, and Barry A. Freedman. A modification of Karmarkars linear programming algorithm. *Algorithmica*, 1:395–407, 1986.

[82] Henry Wolkowicz, Romesh Saigal, and Lieven Vandenberghe, editors. *Handbook of Semidefinite Programming. Theory, Algorithms, and Applications*, volume 27 of *International Series in Operations Research and Management Science*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[83] Margaret H. Wright. Interior methods for constrained optimization. *Acta Numer.*, 1:341–407, 1992.

[84] Stephen J. Wright. *Primal-dual interior-point methods*. Other Titles in Applied Mathematics. SIAM, 1997.

[85] Stephen J. Wright. Recent developments in interior-point methods. In *System Modelling and Optimization. Methods, Theory, and Applications*, volume 46 of *The International Federation for Information Processing*, pages 311–333. Springer, 2000.

[86] David B. Yudin and Arkadi S. Nemirovski. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач (Information complexity and efficient methods for the solution of convex extremal problems). *Economics and Math. Methods*, 2:357–369, 1976.

[87] Gongyun Zhao and Josef Stoer. Estimating the complexity of a class of path-following methods for solving linear programs by curvature integrals. *J. Appl. Math. Optim.*, 27(1):85–103, 1993.