Геометрия 3-х мерных конусов и приложения в оптимизации

Роланд Хильдебранд

Laboratoire Jean Kuntzmann / CNRS

Семинар Мат. института им. Стеклова РАН
7 ноября 2022 г.

План

- коническая оптимизация
- самосогласованные барьеры
- полу-однородные конусы
- канонический барьер на 3-х мерных конусах
- самоассоциированные конусы

План

- **коническая оптимизация**
- самосогласованные барьеры
- полу-однородные конусы
- канонический барьер на 3-х мерных конусах
- самоассоциированные конусы

Конические программы

Определение

Остроконечный замкнутый выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью называется регулярным или правильным.

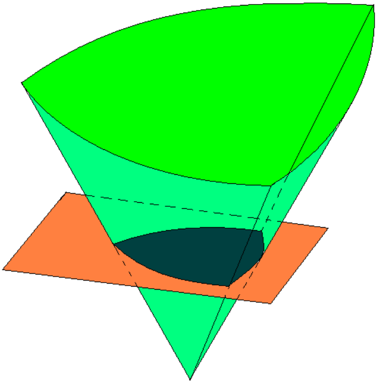
Определение

Коническая программа над регулярным конусом $K \subset \mathbb{R}^n$ — это задача оптимизации вида

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b.$$

любая задача выпуклой оптимизации может быть приведена к конической программе

Геометрическая интерпретация



допустимое множество представляется в виде пересечения конуса K с аффинным подпространством

альтернативная формулировка

$$\min_z \langle c', z \rangle : \; A'z + b' \in K$$

переменная параметризует не конус, а допустимое множество

Коническое представление условий

сложность конической программы зависит от конуса K

нужно записать исходную задачу, используя "хороший" конус

K строится как прямое произведение конусов, соответствующих отдельным (выпуклым) ограничениям

например, $y \geq x^2$ записывается в виде

$$(1 + y, 1 - y, 2x) \in L_3,$$

$$L_3 = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \mid x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$$

чем больше "хороших" конусов, тем шире спектр условий, которые можно использовать в модели

цель: пополнить запас "хороших" конусов

Примеры конусов

конусы, использующиеся в оптимизации:

- ортант $\mathbb{R}^n_+ = \left\{(x_1, \dots, x_n)^T \mid x_i \geq 0\right\}$ (Karmarkar 1984)
- конус Лоренца $L_n = \left\{(x_0, \dots, x_{n-1}) \mid x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}\right\}$ (Nesterov, Nemirovski 1994)
- матричный конус $\mathcal{S}^n_+$ вещественных симметрических неотрицательно определённых матриц (NN 1994)
- матричный конус $\mathcal{H}^n_+$ комплексных эрмитовых неотрицательно определённых матриц (NN 1994)
- экспоненциальный конус $K_{\exp}$ (Nesterov 2006)
- степенные конусы K_p (Chares 2009)
- специальные сечения матричных конусов (Vandenberghe, Anderson 2014)
- их прямые произведения

экспоненциальный конус

$$\begin{aligned} K_{\exp} &= \mathrm{cl}\left\{(t, tx, ty) \mid t \geq 0,\ \ y \geq e^x\right\} \\ &= \left\{(t, tx, ty) \mid t > 0,\ \ y \geq e^x\right\} \cap \left\{(0, tx, ty) \mid x \leq 0,\ \ y \geq 0\right\} \end{aligned}$$

ограничение $y \geq e^x$ записывается в виде $(1, x, y) \in K_{\exp}$

степенной конус

$$K_p = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_2| \leq x_1^{1/p} x_3^{1/q},\ \ x_1 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0\}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \ p, q \in [1, +\infty]$

ограничение $x_1 \geq |x_2|^p$ для $p \geq 1$ записывается в виде $(x_1, x_2, 1) \in K_p$

Двойственный конус

Определение

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ *— регулярный выпуклый конус. Двойственным к* K *называется конус*

$$K^* = \{s \in \mathbb{R}_n = (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle s, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in K\}\,.$$

двойственный конус определён в *двойственном* векторном пространстве

для регулярного K конус K^* также является регулярным, и $(K^*)^* = K$

Самодвойственные конусы

если в пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$ задано *скалярное произведение*, то двойственное V^* можно отождествить с прямым пространством

Определение

*Пусть $K \subset V$ — регулярный выпуклый конус. Если на V существует скалярное произведение такое, что при соответствующем отождествлении V с V^* имеет место равенство $K = K^*$, то K называется **самодвойственным**.*

Однородные конусы

Определение

Пусть $K \subset V$ — регулярный конус. Линейное отображение $A : V \to V$ называется **автоморфизмом** *конуса K если $A[K] = K$.*

Определение

Регулярный конус называется **однородным** *если для любой пары x, y точек во внутренности K^o конуса K существует автоморфизм A конуса K такой, что $A(x) = y$.*

для данной размерности n список однородных конусов $K \subset \mathbb{R}^n$ можно получить алгоритмическим путём [Винберг 1963; Kaneyuki, Tsuji 1974; Dorfmeister 1979]

Классы конических программ

программы над конусами

- $K = \mathbb{R}^n_+$: линейные программы (LP)
- $K = \prod_j L_{n_j}$: квадратично-конические программы (SOCP)
- $K = \mathcal{S}^n_+$: полу-определённые программы (SDP)
- $K = K^m_{\exp}$: геометрические программы (GP)

$LP \subset SOCP \subset SDP$

разработаны солверы (CLP, LiPS, SDPT3, SeDuMi, CPLEX, MOSEK, ...)

План

- коническая оптимизация
- **самосогласованные барьеры**
- полу-однородные конусы
- канонический барьер на 3-х мерных конусах
- самоассоциированные конусы

Метод внутренней точки

напомним формулировку конической программы

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \qquad Ax = b$$

проблемное условие $x \in K$ устраняется добавлением барьера к функционалу цены

$$\min_{x} \langle c, x \rangle + \mu \cdot F(x) : \qquad Ax = b$$

где $F : K^o \to \mathbb{R}$ такая, что $F|_{\partial K} = +\infty$ и удовлетворяющяя ряду других условий

метод приблизительно решает безусловную задачу и одновременно стремит $\mu \to 0$

следующая итерация вычисляется на основе производных F', F'' в 1 — 3 точках (метод 2-го порядка)

Логарифмично однородные барьеры

Определение (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ *— регулярный выпуклый конус. Логарифмично однородным самосогласованным барьером на* K *называется функция* $F : K^o \to \mathbb{R}$ *класса* C^3*, удовлетворяющая условиям*

- $F(\alpha x) = -\nu \log \alpha + F(x)$ *(логарифмичная однородность)*
- $F''(x) \succ 0$ *(локально строгая выпуклость)*
- $\lim_{x \to \partial K} F(x) = +\infty$ *(барьерное свойство)*
- $|F'''(x)[h,h,h]| \leq 2(F''(x)[h,h])^{3/2}$ *(самосогласованность)*

для всех касательных векторов h *в каждой точке* $x \in K^o$*. Параметр однородности* ν *называется параметром барьера.*

растяжения действуют прибавлением констант к F

"Хорошие" конусы

Для каких конусов K алгоритм работает эффективно?

всё зависит от свойств барьера

теория: чем меньше параметр ν барьера, тем быстрее алгоритм

практика: стоимость вычисления производных не должна доминировать стоимость решения линейной системы для вычисления направления поиска

требования к барьеру

- логарифмично однородный с небольшим параметром ν
- производные F', F'' должны быть эффективно вычислимы

Двойственный барьер

пусть $f : D \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция

преобразованием Лежандра функции f называется функция

$$f^*(s) = \sup_{x \in D} \langle s, x \rangle - f(x)$$

Лемма (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)

Преобразование Лежандра логарифмично однородного барьера с параметром ν на конусе K является логарифмично однородным барьером с тем же параметром ν на $-K^*$.

двойственный барьер определим как

$$F_*(s) = F^*(-s) = \sup_{x \in K} \left(-\langle s, x \rangle - F(x) \right)$$

положительно определённый гессиан барьера F на конусе K можно интерпретировать как риманову метрику

тогда внутренность конуса K принимает структуру полного риманова многообразия (полнота — следствие самосогласованности)

Лемма (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)

Преобразование Лежандра $\mathcal{D} : x \mapsto p = -F'(x)$ является изометрией между внутренностью прямого и двойственного конусов. Изометрия действует на тензор третьих производных барьера умножением на -1.

Примеры барьеров

для классических задач используются следующие барьеры

класс	K	F	ν
LP	$\mathbb{R}^n_+$	$-\sum_{i=1}^n \log x_i$	n
SOCP	$\prod_{j=1}^J L_{n_j}$	$-\sum_j \log\left((x_0^j)^2 - (x_1^j)^2 - \cdots - (x_{n_j-1}^j)^2\right)$	$2J$
SDP	$\mathcal{S}^n_+$	$-\log\det A$	n

на $\prod_{i=1}^m K_i$ используется $F(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m F_i(x_i)$ с параметром $\nu = \sum_{i=1}^m \nu_i$

параметр этих барьеров оптимальный (не существует барьера с меньшим ν)

все эти конусы — симметрические (однородные и самодвойственные)

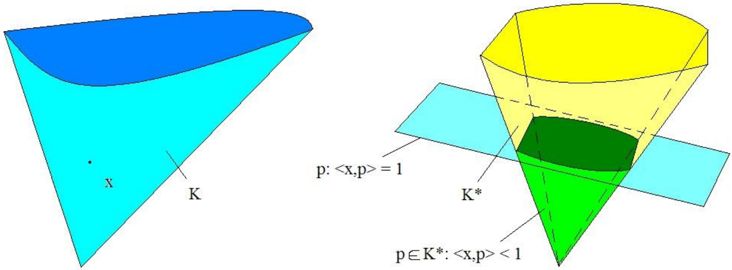
Экспоненциальный конус

$$K_{\exp} = \left\{(x, y, 0) \,|\, x \leq 0,\ \ y \geq 0\right\} \cup \left\{(x, y, z) \,|\, z > 0,\ \ y \geq z e^{x/z}\right\}$$

на экспоненциальном конусе имеется барьер [Nesterov 2006]

$$F(x, y, z) = -\log\left(z \log\frac{y}{z} - x\right) - \log y - \log z,$$

значение параметра $\nu = 3$ также оптимально пусть K — произвольный регулярный выпуклый конус



функция объёма $V : K^o \ni x \mapsto Vol\{p \in K^* \,|\, \langle x, p \rangle < 1\}$
определена с точностью до множителя

Универсальный барьер

Теорема (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский, 1994)

Существует константа $c \geq 1$ такая, что для произвольного регулярного выпуклого конуса $K \subset \mathbb{R}^n$

$$F(x) = c \log V(x)$$

является самосогласованным барьером на K с параметром $\nu = c \cdot n$. Этот барьер называется универсальным.

позже было установлено, что можно выбрать $c = 1$ [Bubeck, Eldan 2015]

$\Rightarrow$ со стороны теории препятствий нет

Интегральное представление

Лемма (Güler 1996)

Универсальный барьер с точностью до аддитивной константы равен $c \log \varphi(x)$, *где*

$$\varphi(x) = \int_{K^*} e^{-\langle x,p \rangle}\, dp$$

— характеристическая функция K.

Свойства

универсальный барьер F

- $A \in \mathrm{Aut}\ K \Rightarrow F(Ax) = F(x) + \log\det\ A$
- эквивариантен по отношению к действию $SL(n, \mathbb{R})$
- $F_{\prod_i K_i} = \sum_i F_{K_i}$

для неоднородных конусов трудно вычислим
не эквивариантен по отношению к двойственности

двойственный барьер к универсальному называется *энтропическим* [Bubeck, Eldan 2015]

Канонический барьер

Теорема (Cheng, Yau; A.-M. Li и др.)

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, не содержащая прямой. Тогда существует единственное выпуклое решение $F : D \to \mathbb{R}$ уравнения в частных производных $\log \det F'' = 2F$ с граничным условием $\lim_{x \to \partial D} F(x) = +\infty$.

Теорема (Х. 2014)

Если D — внутренность выпуклого регулярного конуса K, это решение УрЧП является логарифмично однородным самосогласованным барьером на K со значением параметра $\nu = n$. Этот барьер называется **канонический**. *Двойственный барьер к каноническому барьеру на конусе K совпадает с каноническим барьером на двойственном конусе K^*.*

Свойства

канонический барьер

- обладает теми же свойствами инвариантности что и универсальный
- эквивариантен по отношению к двойственности
- совпадает с универсальным (и энтропическим) на однородных конусах
- непрерывная группа симметрий (автоморфизмов) понижает размерность УрЧП

на симметрических конусах все три барьера задаются стандартным логарифмическим барьером

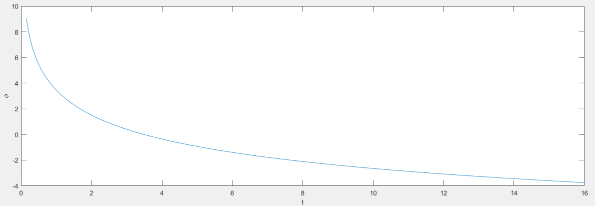
Пример канонического барьера

на экспоненциальном конусе $K_{\exp}$

$$F_{can}(x,y,z) = -\log y - 2\log z + \phi\left(\log\frac{y}{z} - \frac{x}{z}\right)$$

$\phi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ задана неявно кривой

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \log(1+\kappa) + 2\kappa \\ \log(1+\kappa) - 3\log\kappa \end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R}_{++} \right\}$$



Основная идея

- до сих пор для данного конуса находился барьер, исходя из аналитического представления конуса
- для трансцендентных конусов найденные барьеры не совпадают ни с универсальным, ни с энтропическим, ни с каноническим
- для степенных конусов используются барьеры, заведомо не оптимальные

идея: использовать группу симметрий, чтобы свести УрЧП, задающее канонический барьер, к ОДУ

- для каких конусов возможна такая редукция?
- какие конуса из полученных интересны для оптимизации?
- какого типа ОДУ возникают, связь с другими областями математики?

План

- коническая оптимизация
- самосогласованные барьеры
- **полу-однородные конусы**
- канонический барьер на 3-х мерных конусах
- самоассоциированные конусы

идея: использовать группу автоморфизмов, чтобы свести УрЧП, задающее канонический барьер, к ОДУ

Определение

Регулярный конус $K \subset \mathbb{R}^n$ назовём полуоднородным, если алгебра Ли его группы автоморфизмов имеет размерность не менее $n-1$.

в этом случае

- пространство орбит по группе автоморфизмов имеет размерность не более 1
- УрЧП на пространстве орбит сводится к ОДУ

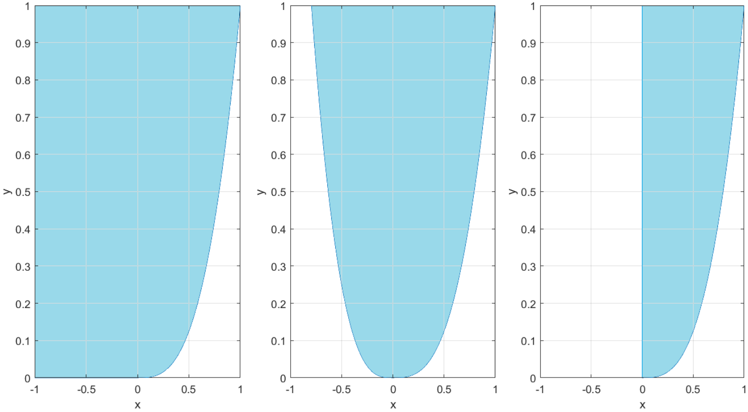
Классификация в случае $n = 3$

статья: Analytic formulas for complete hyperbolic affine spheres. *Contributions to Algebra and Geometry*, 2014

Теорема

Любой полуоднородный конус $K \subset \mathbb{R}^3$ *линейно изоморфен ровно одному из следующих конусов, где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*:*

- $K_{\exp}$
- $\mathbb{R}^3_+$
- $\{x \,|\, x_2 \leq x_1^{1/p} x_3^{1/q},\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$ *для* $p \in [2, \infty)$
- $\{x \,|\, -\alpha x_1^{1/p} x_3^{1/q} \leq x_2 \leq x_1^{1/p} x_3^{1/q},\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$ *для* $p \in [2, \infty)$, $\alpha \in (0, 1]$
- $\{x \,|\, 0 \leq x_2 \leq x_1^{1/p} x_3^{1/q},\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$ *для* $p \in [2, \infty)$



функции на полуосях вида $y = \beta \cdot |x|^p,\ \beta \in [0, +\infty]$
K получается гомогенизацией надграфика

ОДУ и решения для $K_{\exp}$

определим $t = \log \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$, тогда ОДУ примет вид

$$2\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2 - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi}^3 = e^{2\phi}$$

и $F = -\log t - \log y - 2\log z$

$$F' = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\phi}}{z} \\ -\frac{1}{y} + \frac{\dot{\phi}}{y} \\ -\frac{2}{z} + \dot{\phi}\left(-\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{\ddot{\phi}}{z^2} & -\frac{\ddot{\phi}}{yz} & \frac{\dot{\phi}}{z^2} - \frac{\ddot{\phi}}{z}\left(-\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\right) \\ -\frac{\ddot{\phi}}{yz} & \frac{1}{y^2} - \frac{\dot{\phi}}{y^2} + \frac{\ddot{\phi}}{y^2} & \frac{\ddot{\phi}}{y}\left(-\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\right) \\ \frac{\dot{\phi}}{z^2} - \frac{\ddot{\phi}}{z}\left(-\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\right) & \frac{\ddot{\phi}}{y}\left(-\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\right) & \frac{2}{z^2} + \dot{\phi}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z^3}\right) + \ddot{\phi}\left(-\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

кривую $(t, \phi(t))$ можно получить аналитически в параметризованном виде $(t(\kappa), \phi(\kappa))$, где $\kappa = -1/\dot{\phi}$

определим $t = x^{-1/p}y^{-1/q}z$, тогда ОДУ примет вид

$$\ddot{\phi}(2(p+q)+1+3t\dot{\phi}) - \dot{\phi}^2(p+q-1+t\dot{\phi}) = (p+q)e^{2\phi}$$

и $F = -\frac{p+1}{p}\log x - \frac{q+1}{q}\log y + \phi(x^{-1/p}y^{-1/q}z)$

$$F' = \begin{pmatrix} -\frac{p+1+t\dot\phi}{px} \\ -\frac{q+1+t\dot\phi}{qy} \\ \frac{t\dot\phi}{z} \end{pmatrix}$$

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{(p+1)(p+t\dot\phi)+t^2\ddot\phi}{p^2x^2} & \frac{t\dot\phi+t^2\ddot\phi}{pqxy} & -\frac{t\dot\phi+t^2\ddot\phi}{pxz} \\ \frac{t\dot\phi+t^2\ddot\phi}{pqxy} & \frac{(q+1)(q+t\dot\phi)+t^2\ddot\phi}{q^2y^2} & -\frac{t\dot\phi+t^2\ddot\phi}{qyz} \\ -\frac{t\dot\phi+t^2\ddot\phi}{pxz} & -\frac{t\dot\phi+t^2\ddot\phi}{qyz} & \frac{t^2\ddot\phi}{z^2} \end{pmatrix}$$

кривую $(t, \phi(t))$ можно в некоторых специальных случаях получить аналитически в параметризованном виде $(t(\zeta), \phi(\zeta))$

в частности, для конуса K_p имеем $\zeta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} t \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\zeta^2+p+1)^{-\frac{1}{2p}}(\zeta^2+q+1)^{-\frac{1}{2q}}\zeta \\ -\frac{1}{2}\log(p+q)+\frac{p+1}{2p}\log(\zeta^2+p+1)+\frac{q+1}{2q}\log(\zeta^2+q+1) \end{pmatrix}$$

для пятого семейства конусов имеем

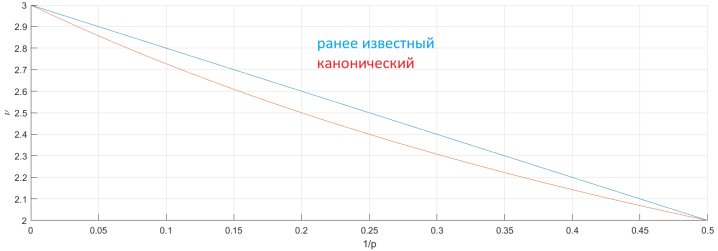
$$t=\left(\frac{\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{q-1}}{\xi+p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{p-1}}{\xi+q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\cdot(\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{p+q})\left(\frac{\xi}{(\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{p+q-1})^2}\right)^{\frac{\sqrt{p+q-1}}{\sqrt{p+q}}}$$

$$\phi = \log\left(1+\frac{\xi\sqrt{\xi+p+q-1}}{\sqrt{p+q}}\right)-\log t$$

Параметр барьера для K_p

конусы K_p, K_q изоморфны для $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
поэтому достаточно рассмотреть случай $p \in [2, +\infty]$



для ранее известного барьера

$$F = -\log\left(x_1^{2/p} x_3^{2/q} - x_2^2\right) - \left(1 - \frac{2}{p}\right)\log x_1 - \left(1 - \frac{2}{q}\right)\log x_3$$

имеем $\nu = 3 - \frac{2}{p}$: [Chares 2009] эмпирически, [Roy, Xiao 2022] с доказательством
для канонического барьера $\nu = \frac{3p}{p+1}$

для третьего семейства конусов имеем $\xi \in (0, +\infty)$,

$$t=(\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{q-1})^{-\frac{1}{p}}(\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{p-1})^{-\frac{1}{q}}$$

$$\cdot\frac{1-\xi}{\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{p+q}}\left(\frac{\sqrt{\xi+p+q-1}+\sqrt{p+q-1}}{\sqrt{\xi+p+q-1}-\sqrt{p+q-1}}\right)^{\frac{\sqrt{p+q-1}}{\sqrt{p+q}}}$$

$$\phi=\log\frac{\sqrt{p+q}-\xi\sqrt{\xi+p+q-1}}{\sqrt{p+q}\,t}$$

в общем случае параметризация кривой (t, ϕ) возможна через эллиптические функции

- в качестве новых конусов нашлись "несимметрические" степенные конусы
- особый интерес представляют "половины" степенных конусов и их двойственные (5-е и 3-е семейства)
- параметр барьера для степенных конусов K_p улучшен

Открытые вопросы

- классификация полуоднородных конусов для размерностей $n > 3$
- какие ОДУ получаются редукцией УрЧП, задающего канонический барьер
- решения этих ОДУ как спецфункции, связь с другими областями

План

- коническая оптимизация
- самосогласованные барьеры
- полу-однородные конусы
- **канонический барьер на 3-х мерных конусах**
- самоассоциированные конусы

Униформизирующая координата

пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — регулярный конус с барьером F

- гессиан барьера F'' задаёт на K^o структуру полного риманова многообразия
- логарифмичная однородность влечёт факторизацию многообразия на 1-мерную радиальную и 2-мерную трансверсальную компоненту [Sasaki 1980; Loftin 2002]
- трансверсальная компонента (уровень F) есть некомпактная односвязная риманова поверхность
- на ней существует глобальная комплексная координата $z \in M \subset \mathbb{C}$ такая, что метрика равна $g(z) = 3e^{u(z)}|dz|^2$
- область определения M конформно эквивалентна либо $\mathbb{D}$, либо $\mathbb{C}$
- параметризация однозначна с точностью до конформного изоморфизма

$e^{u(z)}$ — конформный фактор

Голоморфная кубическая форма

определим тензор C как ограничение кубического тензора $\frac{1}{3}F'''$ на трансверсальный фактор

из УрЧП $\det F'' = e^{2F}$ следует, что C имеет нулевой след,

$$\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} C_{ijk} = 0$$

отсюда получаем в координате $z = x + iy$

$$C_{111} = -C_{122} = a, \qquad -C_{112} = C_{222} = b$$

для некоторых вещественных функций $a(z), b(z)$

определим голоморфную кубическую форму

$$U(z) = \frac{1}{2}(a(z) + ib(z))$$

Уравнение Ванга

если переписать УрЧП в терминах $u(z), U(z)$, то оно окажется эквивалентно уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = 0, \quad e^u = \frac{1}{2}\Delta u + 2|U|^2 e^{-2u}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — производные Виртингера, $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ — Лапласиан

первое ур-е говорит, что U — голоморфная функция
второе ур-е называется уравнением Ванга [C. Wang, 1991]

- следует воспринимать как эллиптическое ур-е на u при данном U
- граничное условие — полнота метрики $e^u|dz|^2$
- обладает непрерывной группой симметрии: если (u, U) — решение, то $(u, e^{i\varphi}U)$ — решение для постоянного φ

Теория уравнения Ванга

- если $M \subset \mathbb{C}$ односвязная область, $U : M \to \mathbb{C}$ голоморфна, $u : M \to \mathbb{R}$ — решение ур-я Ванга, то существует определённый с точностью до действия группы $SL(3, \mathbb{R})$ регулярный конус $K \subset \mathbb{R}^3$, на котором канонический барьер воспроизводит пару (u, U) [Simon, C. Wang 1993]
- для любой пары (M, U) как выше, кроме $(\mathbb{C}, 0)$, решение ур-я Ванга существует и единственно [Q. Li 2019]

вывод: любой голоморфной функции U, определённой на односвязной области $M \subset \mathbb{C}$, кроме тождественного нуля на $\mathbb{C}$, можно сопоставить единственный с точностью до линейного изоморфизма конус K, канонический барьер на котором воспроизводит U как кубическую голоморфную форму

Симметрия уравнения Ванга

для данного конуса $K \subset \mathbb{R}^3$, (u, U, M) определены с точностью до конформного изоморфизма:

если $M \ni z \mapsto w \in \tilde{M}$, то

$$\tilde{U}(w) = U(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^3, \quad \tilde{u}(w) = u(z) + 2\log\left|\frac{dz}{dw}\right|$$

эти преобразования коммутируют с отображением $(u, U) \mapsto (u, e^{i\varphi} U)$

$\Rightarrow$ это отображение генерирует действие группы S^1 на классах эквивалентности конусов

Ассоциированные семейства

Определение

Конусы, получающиеся друг из друга этим действием, называются ассоциированными, соответствующие орбиты — ассоциированными семействами.

в частности, K ассоциирован с K^*, так как двойственность генерируется отображением $(u, U) \mapsto (u, -U)$ [Loftin 2001]

ассоциированность можно рассматривать как непрерывное обобщение двойственности

Полуоднородные конусы

автоморфизмы K генерируют автоморфизмы области M

последние не меняют ни метрику, ни голоморфную форму

u, U постоянны на орбитах $\Rightarrow$ U постоянна глобально

M	$U \equiv const$	K
$\mathbb{D}$	0	L_3
$\mathbb{C}$	1	$\mathbb{R}^3_+$
$\lvert Re\, z\rvert < \frac{l}{2}$	$e^{i\varphi}$	4-е семейство
$Re\, z > 0$	$e^{i\varphi}, \lvert\varphi\rvert < \frac{\pi}{2}$	5-е семейство
$Re\, z > 0$	$\pm i$	$K_{\exp}$
$Re\, z > 0$	$e^{i\varphi}, \lvert\varphi\rvert > \frac{\pi}{2}$	3-е семейство

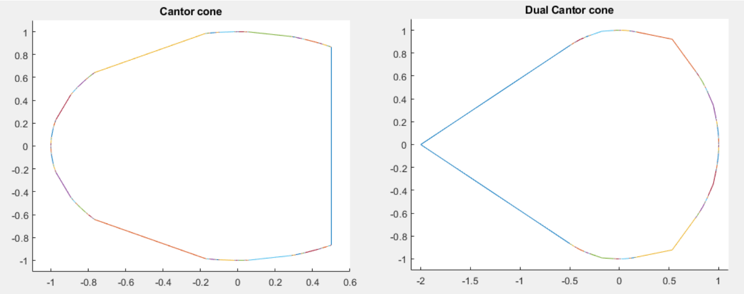
u постоянно или задаётся $\wp$ функциями Вейерштрасса от $|z|$ или x [Z. Lin, E. Wang 2016]

Другие факты

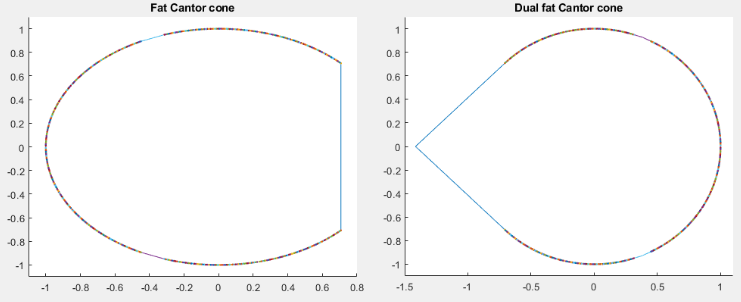
[Dumas, Wolf 2015]: полиномы на $\mathbb{C}$ соответствуют полиэдральным конусам, при этом число граней на 3 больше, чем степень полинома

некоторые рациональные функции на $\mathbb{C}$ соответствуют "канторовым" конусам, у которых множество экстремальных лучей является канторовым множеством

- нужно выколоть полюса из $\mathbb{C}$
- M является универсальной накрывающей



сечение канторова конуса: множество экстремальных лучей имеет нулевую меру



сечение "толстого" канторова конуса: множество экстремальных лучей имеет положительную меру

Какая связь есть между голоморфной формой $U : M \to \mathbb{C}$ и конусом K?

Для данного конуса, как найти его ассоциированное семейство?

Какие конусы отвечают конформному типу $M = \mathbb{C}$?

План

- коническая оптимизация
- самосогласованные барьеры
- полу-однородные конусы
- канонический барьер на 3-х мерных конусах
- **самоассоциированные конусы**

Редукция уравнения Ванга

напомним, что мы хотим привести ур-е Ванга

$$e^u = \frac{1}{2}\Delta u + 2|U|^2 e^{-2u}$$

к ОДУ с помощью симметрии

для полуоднородных конусов симметрия сохраняла u и U

но нам нужно только, чтобы сохранялись u и $|U|$, т.е., действие группы симметрии может менять фазу U

симметрия будет генерировать автоморфизм конуса только тогда, когда фаза сдвигается на $e^{2\pi ik}$, $k \in \mathbb{Z}$
остальные элементы группы генерируют изоморфизм конуса с конусами из его ассоциированного семейства

Само-ассоциированные конусы

Определение

Регулярный конус $K \subset \mathbb{R}^3$ назовём само-ассоциированным, если он линейно изоморфен всем конусам из своего ассоциированного семейства.

примеры: L_3, $\mathbb{R}^3_+$

$K = \mathbb{R}^3_+$ соответствует $U \equiv const$ на $\mathbb{C}$
здесь параллельные переносы $\mathbb{C}$ генерируют автоморфизмы $\mathbb{R}^3_+$, а вращения — изоморфизмы с ассоциированными конусами

статья: Self-associated three-dimensional cones. *Contributions to Algebra and Geometry* 63:867–906, 2022

спектр автоморфизма, генерируемого сдвигом фазы U на $e^{2\pi i}$, равен $\{1, \lambda, \lambda^{-1}\}$

назовём конус эллиптического, параболического или гиперболического типа в зависимости от того, имеем ли $\lambda = e^{i\phi}$, $\phi \in (0, \pi)$; $\lambda = 1$; или $\lambda > 1$

классификация:

тип	M	параметры	U
эллиптический	$\|z\| < R$	$R \in (0, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$	z^k
параболический	$Re\, z < b$	$b \in (-\infty, +\infty]$	e^z
гиперболический	$a < Re\, z < b$	$-\infty < a < b \leq +\infty$	e^z

Вид ОДУ

уравнение Ванга сводится к ОДУ

$$\chi'' = 2e^{\chi} - \frac{\chi'}{r} - 4r^{2k}e^{-2\chi}$$

для эллиптического типа, где $u(z) = \chi(|z|) = \chi(r)$

и к ОДУ

$$\chi'' = 2e^{\chi} - 4e^{2x}e^{-2\chi}$$

для параболического и гиперболического типа, где $u(z) = \chi(x)$

оба уравнения сводятся к уравнениям Пэнлеве III типа D_7

Вид конусов

граница конусов состоит из плоских граней (для $R = +\infty$ и $b = +\infty$) и гладких кусков

последние являются коническими оболочками кривых, представляемых в виде векторно-значных решений ОДУ

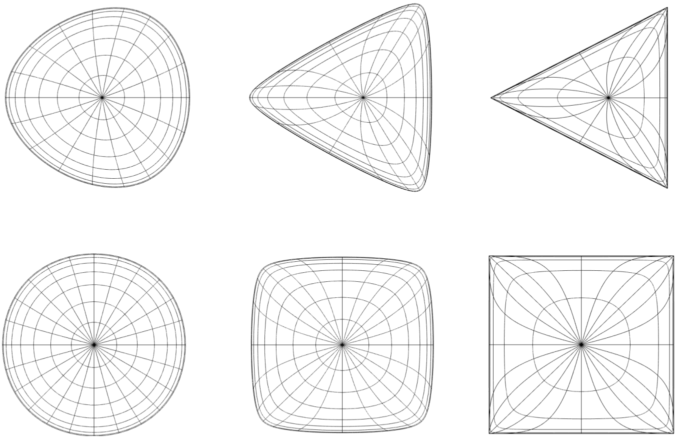
$$\dddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta \cdot \sin t \cdot y = 0,$$

где α, β — константы

картина аналогична полуоднородным конусам: у них граница полиэдральная или кусочно-гладкая и представляется в виде конической оболочки решения ОДУ

$$\dddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta \cdot y = 0,$$

где α, β — константы



$M = \{z \mid |z| < R\}$, $U = z^k$, полярная сетка в M

$k = 0, 1$; $R = 1, 2, 4$

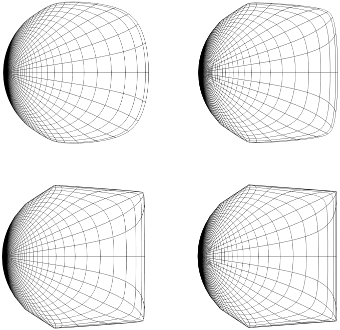
Конусы над регулярными многогранниками

если $R = +\infty$, то $U = z^k$ — полином на $\mathbb{C}$

тогда конус полиэдральный с $k + 3$ гранями [Dumas, Wolf 2015]

в силу симметрии конус построен над регулярным многогранником

параметр барьера равен $\nu = n = 3$, независимо от числа граней



$M = \{z \mid Re\, z < b\}$, $U = e^z$, равномерная сетка в M
$b = -2, -1, 0, 1$

$b = +\infty \Rightarrow M = \mathbb{C},\ U = e^z$

конус K является выпуклой конической оболочкой множества

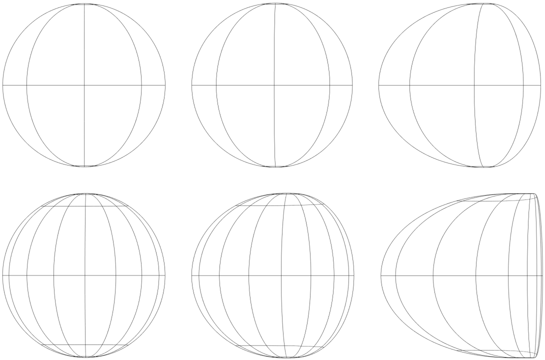
$$\{(1, n, n^2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

его компактное сечение имеет бесконечно много граней с единственной точкой накопления

нетривиальные автоморфизмы K соответствуют автоморфизмам $\mathbb{Z}$ и образуют диэдральную группу D_∞

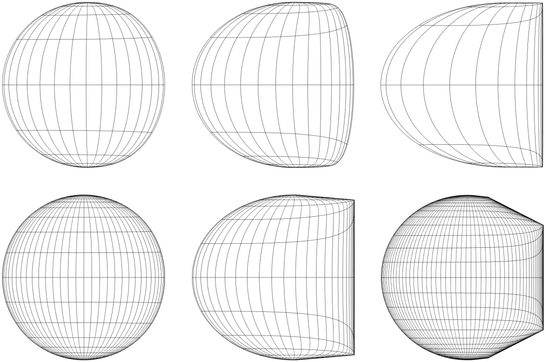
конус можно использовать в релаксаций квадратичных целочисленных задач для описания условия $y \geq x^2$, в случае когда $x \in \mathbb{Z}$

Гиперболический тип: сечения



$M = \{z \mid a < Re\, z < b\}$, $U = e^z$, равномерная сетка в M
$(a, b) = (-3, 2); (-1, 0); (1, 2); (-4, -2); (-2, 0); (0, 2)$
∂K состоит из двух аналитических кусков

Гиперболический тип: сечения



$M = \{z \mid a < Re\, z < b\}$, $U = e^z$, равномерная сетка в M
$(a, b) = (-6, 2); (-4, 0); (-2, 2); (-12, -4); (-6, 2); (-14, 2)$

Результаты

- несколько семейств новых конусов
- для оптимизации интересны конусы над регулярными многогранниками и ∞-эдральный конус
- приложение к релаксациям квадратичных целочисленных задач
- решение выражается через трансценденты Пэнлеве

Спасибо за внимание!