

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.977

Хильдебранд Роланд

**КЛАССИФИКАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ
ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

*Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор М.И.Зеликин*

Москва — 2000

Содержание

Введение	3
1 Приведение систем к нормальной форме	10
2 Классификация нормальных форм класса C^3	26
2.1 Критерий существования синтеза	26
2.2 Вспомогательные утверждения	30
2.3 Лемма о гиперболической точке	34
2.4 Особые режимы	44
2.5 Некоторые свойства системы	54
2.5.1 Поведение системы при $u = 0$	56
2.5.2 Производная отображения Пуанкаре	60
2.5.3 Поведение системы при $u = 1$	68
2.6 Случай $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$	72
2.7 Случай $\phi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi]$	77
2.7.1 Построение отображения Пуанкаре	78
2.7.2 Производные отображения Пуанкаре	82
2.7.3 Определяющий существование синтеза цикл	86
2.7.4 Связь между функцией $\tilde{\phi}$ и интегралом I_{min}	90
2.7.5 Построение оптимального синтеза	99
3 Аналитические нормальные формы	104
3.1 Предварительное исследование	104
3.2 Синтез с особым режимом	109
3.3 Синтез со спиралевидной структурой	115
3.4 Синтез с кривой дисперсии	125
4 Результаты	150
Литература	154

Введение

Данная работа относится к области оптимального управления. Предметом исследования являются аффинные по скалярному управлению системы $\dot{x} = f(x) + ug(x)$ на плоскости. Здесь u меняется в интервале $[0, 1]$, а f обладает особой точкой типа фокуса или центра. Функционал цены квадратический с точностью до членов более высокого порядка. Рассмотрена группа симметрий, ассоциированная с этим классом систем, найдены канонические формы и проведена классификация этих форм.

Вместо того, чтобы исследовать отдельные объекты, в математике часто целесообразнее рассматривать целые классы объектов. Эта точка зрения оправдана существованием групп преобразований, которые переводят разные объекты друг в друга и устанавливают между ними соотношение эквивалентности. Таким образом, идентифицировав в каждой орбите группы преобразований канонического представителя наиболее простого вида, и исследовав эти конкретные объекты, мы получим информацию и о всех других объектах соответствующих орбит. Нахождение и классификация канонических представителей представляет собой одну из наиболее часто встречающихся в математике проблем.

В теории оптимального управления группой преобразований служит группа *feedback*. В узком смысле термин *feedback group* зарезервирован для систем, в которых управление может принимать любые значения в вещественном векторном пространстве \mathbf{R}^n . В зависимости от поставленной задачи, однако, рассматриваются и различные подходящие подгруппы группы *feedback*. Нахождение канонических систем по отношению к группе *feedback* и их классификация является самостоятельной задачей, которой посвящено много работ.

В 1970 году П. Бруновский [23] расклассифицировал линейные системы по действию группы *feedback* и ввёл соответствующую каноническую форму, форму Бруновского. Впоследствии классификации линейных систем были посвящены работы многих авторов (см. например [21],[22],[24],[36],[43], [55],[57],[61],[62],[74],[76]). В этих работах эта проблема была сведена к чисто алгебраической конечномерной задаче.

В задаче классификации нелинейных систем группа *feedback* бесконечномерная, что существенно усложняет ситуацию (см. например [19],[26],[30], [60],[71] и обзор [40]). Смежным вопросом является стабилизация точек равновесия посредством динамического управления (см. например обзор [68]). Особый интерес здесь представляет нахождение орбит линейных систем, т.е. характеристика нелинейных систем, которые могут быть переведены в линейную преобразованием из группы *feedback*. Для таких систем тогда можно применить аппарат,

разработанный для линейного случая. Характеризации линеаризуемости посвящены, например, работы [52],[69],[72]. Локальное условие линеаризуемости сводится к бесконечному набору условий на скобки Ли входящих в правую часть системы векторных полей.

Чтобы не рассматривать бесконечный набор условий, было введено понятие приближённой группы *feedback*, переводящую системы друг в друга с точностью до членов порядка выше некоторого значения. Условия эквивалентности систем по отношению к приближённой группе *feedback* были найдены А. Кренером (см. например [49],[50]). Это конечный набор условий на джеты того порядка, который соответствует порядку приближённой группы *feedback*. Статья [51] представляет обзор по линеаризации и приближённым группам *feedback*.

Действие приближённой группы на джеты исследовал К. Чон (см. например серию работ [70]–[72]). Он показал, что оно сводится к действию конечномерной группы Ли. В. Канг и А. Кренер исследовали нормальные формы по отношению к действию на джеты второго порядка [44],[53].

Пусть множество допустимых управлений является полиэдром. Тогда множество допустимых фазовых скоростей является выпуклой оболочкой конечного множества векторных полей. Поэтому действие подгруппы группы *feedback*, сохраняющая множество допустимых управлений, сводится к действию группы диффеоморфизмов на семейства векторных полей. Этот предмет был подробно изучен многими авторами. В этой связи вспоминается серия работ Р.И. Богданова (см. [4]–[6],[17]), где было изучено действие групп диффеоморфизмов различной степени гладкости на векторное поле на плоскости. Подробную классификацию пар векторных полей на плоскости провёл А.А. Давыдов в монографии [25]. Там же рассмотрен и случай более, чем двух, полей. Тесно связанной с вопросами классификации множеств векторных полей является проблема классификации распределений. Этому вопросу посвящёна, например, работа [79]. Дальнейшие результаты по классификации особых точек на плоскости и в трёхмерном пространстве см. например [9],[10],[28],[73].

Классификации разных классов систем оптимального управления на плоскости были проведены многими авторами. М.М. Байтман [3] исследовал двумерные системы с функционалом быстрогодействия. А. Брессан и Б. Пикколи недавно провели полную классификацию таких систем в окрестности особой точки дрейфогого поля по отношению к топологической эквивалентности возникающих оптимальных синтезов [20]. Б. Якубчик и В. Респондек провели классификацию двумерных систем с неограниченным управлением по отношению к группе *feedback* и слабой группе *feedback*, которая помимо диффеоморфизмов фазового пространства и преобразований *feedback* включает ещё гладкое изменение масштаба времени [41],[42].

Стандартный метод решения задач оптимального управления состоит в применении принципа максимума Понтрягина [15]. Он приводит к гамильтоновым системам с разрывной правой частью. Нахождение оптимального управления сводится к нахождению лагранжевых сечений в расширенном фазовом пространстве этих гамильтоновых систем. Пусть $H = H(u, x, \psi)$ — функция Понтрягина, зависящая от одномерного управления $u \in \mathcal{U} \subset \mathbf{R}$. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Здесь x — совокупность переменных фазового пространства X , ψ — сопряжённые переменные, параметризующие слой в кокасательном расслоении T^*X . Принцип максимума определяет управление u следующим образом:

$$u(x, \psi) = \operatorname{argmax}_{u \in \mathcal{U}} H(u, x, \psi).$$

Может случиться, что максимум функции H по u достигается больше, чем в одной точке множества \mathcal{U} . Тогда принцип максимума не определяет управления u однозначно.

В задачах, аффинных по управлению, функция Гамильтона зависит аффинно от u : $H(u, x, \psi) = H_0(x, \psi) + uH_1(x, \psi)$. Часто возникает ситуация, когда $H_1 \equiv 0$ на некоторой траектории в течение некоторого интервала времени. Соответствующие траектории называются особыми и являются самостоятельным предметом исследования. В частности, интерес представляет стыковка неособых траекторий с особыми. Глобальным порядком особого режима называется такое натуральное число q , при котором в окрестности особого режима имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2q} \frac{\partial H(u, x, \psi)}{\partial u} \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial H(u, x, \psi)}{\partial u} \equiv 0 \quad \forall k \leq 2q - 1.$$

Теорема Кэлли [46] гласит, что особая траектория чётного глобального порядка не может стыковаться с неособой траекторией, если точка переключения изолирована. Тем не менее, неособая траектория может выходить на особый режим чётного глобального порядка, если точка стыковки является точкой накопления переключений управления. Этот феномен известен под названием четтеринга. Простейшим примером возникновения четтеринга является задача Фуллера, исследованная впервые в 60-х годах (см. например [29], [32], [75] и содержащиеся там ссылки). Теория четтеринга развита М.И. Зеликиным и В.Ф. Борисовым в монографии [78].

Теорема Кэлли применима только в том случае, если реализованное на особом режиме управление u лежит во внутренности множества допустимых управлений \mathcal{U} . В данной работе исследуется синтез в окрестности особого режима, управление на котором лежит на границе множества \mathcal{U} .

Мы рассмотрим аффинные по управлению системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида на плоскости. Минимизируется интегральный функционал

$$J = \int_0^\infty (F(x) + uG(x)) dt \rightarrow \min \quad (0.1)$$

по траекториям системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u; \quad x \in U \subset \mathbf{R}^2, \quad u \in [0, 1], \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \tilde{x}. \quad (0.2)$$

Терминальным многообразием служит фиксированная точка $\tilde{x} \in \mathbf{R}^2$. Окрестность U точки \tilde{x} является односвязной. Предполагается, что управление $u(t)$ — измеримая функция от времени t . A, B — векторные поля, а F, G — скалярные функции. Мы исследуем случай, когда эти величины принадлежат классу C^3 , и случай C^ω . Поле A имеет в точке \tilde{x} особенность типа фокуса или центра: якобиан $\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x})$ имеет комплексно-сопряжённые собственные значения и $A(\tilde{x}) = 0$. Поле B в окрестности U невырождено. Главным членом в разложении Тейлора функции F в точке \tilde{x} является квадратичная форма, т.е. сама функция F и её градиент в \tilde{x} исчезают. Функция G также исчезает в \tilde{x} . Допустимые траектории $x(t)$ не выходят за пределы окрестности U .

Такие системы возникают, например, в популяционной динамике систем хищник-жертва, где управлением служит интенсивность отлова одного из видов. Невозмущённой системой в этом случае является система Вольтерра-Лоттка. Системы в окрестности особой точки типа фокуса с интегральными функционалами специального вида рассматривались, например, в работах [11], [54]. В [11] исследовался математический маятник, который требуется привести в состояние покоя приложением односторонней ограниченной силы с минимальным среднеквадратическим отклонением. В этой работе также исследовались управляемые системы Вольтерра-Лоттка. В работе [54] тоже рассматривались системы популяционной динамики, но функционал при этом зависел от времени. Мы здесь рассматриваем общий случай автономной системы.

В разделе 2.3 данной работы доказано утверждение о структуре диффеоморфизма в окрестности гиперболической неподвижной точки, которое представляет самостоятельный интерес.

В литературе описаны три разных подхода к этой задаче. История исследования гиперболических точек диффеоморфизмов и динамических систем восходит

к Пуанкаре. Он нашёл достаточные условия на собственные значения линейной части аналитической системы ОДУ, чтобы она была линеаризуемой в некоторой окрестности особой точки [59]. Идея Пуанкаре состояла в том, чтобы вычислить коэффициенты ряда Тейлора осуществляющего эквивалентность диффеоморфизма фазового пространства исходя из разложения векторного поля нелинейной системы вокруг особой точки. Накладываемые условия на собственные значения при этом гарантируют сходимости. В качестве частного случая вытекает, что двумерная аналитическая система ОДУ в окрестности гиперболической особой точки (т.е. седла) имеет устойчивый и неустойчивый усы, задающиеся аналитическими функциями.

В начале века Адамар предложил иной подход [33]. Он рассматривал устойчивый и неустойчивый усы как графики функций, неподвижных относительно трансформации графиков, индуцированной исследуемым диффеоморфизмом в окрестности неподвижной гиперболической точки. Оказалось, что в подходящем пространстве функций эта трансформация является сжимающей, что позволяет применить теорему Банаха о неподвижной точке (разумеется, в то время, когда вышла публикация Адамара, теоремы Банаха в нынешней формулировке ещё не существовало). С одной стороны, подход Адамара позволил доказать существование инвариантных подмногообразий также для диффеоморфизмов конечной гладкости. С другой стороны он гарантировал только липшицевость этих многообразий. Хотя Адамар рассматривал только двумерные системы, его подход легко обобщается на системы в \mathbf{R}^n .

Третий подход был предложен О. Перроном, который построил интегрально-функциональное уравнение для функций, задающих инвариантные усы [58].

В 30-х годах И.Г. Петровский показал, что если правая часть системы непрерывно дифференцируема, то инвариантные многообразия в окрестности гиперболической точки также непрерывно дифференцируемы [13].

В 50-х годах Ш. Штернберг [66] доказал существование инвариантных усов для гомеоморфизмов на плоскости, дифференцируемых только в гиперболической точке и удовлетворяющих определённому условию Липшица. В случае диффеоморфизма он доказал, что инвариантные усы имеют ту же гладкость, что и сам диффеоморфизм. При этом для доказательства существования инвариантных многообразий использовался метод Адамара, а для доказательства гладкости — метод Пуанкаре. В дальнейшем Штернберг обобщил результаты Пуанкаре на случай конечной гладкости, при этом степень гладкости зависела от собственных значений линейной части системы (см. [64]–[67]). Далее он разработал метод, с помощью которого случай системы ОДУ сводился к случаю диффеоморфизма [65].

Около 1960 года Д.М. Гробман и П. Хартман ([7],[8],[34]) независимо друг

от друга доказали, что для системы класса C^2 в окрестности гиперболической неподвижной точки существует гомеоморфизм, линеаризующий систему. Позже Хартман доказал это утверждение также для систем класса C^1 (см. [35]). Заметим, что из существования инвариантных многообразий гладкости C^k не следует существование линеаризующего диффеоморфизма гладкости C^k . Так, Хартман в своей работе [34] привёл пример аналитической нелинейной системы в \mathbf{R}^3 , для которой не существует даже диффеоморфизма класса C^1 , переводящего её в линейную систему.

Позже были найдены аналогичные результаты для бесконечномерных пространств (см. например [37],[38],[39],[56],[63]), и развиты дальше результаты для конечномерных пространств (см. например [16],[31],[47],[48]).

В разделе 2.3 данной работы исследованы гомеоморфизмы на плоскости, происходящие от системы ОДУ с асимптотикой $\dot{x} = O(|x| \ln |x|)$, следовательно, не имеющие производных в неподвижной точке. Показано, что при условиях, в некотором смысле утверждающих гиперболичность неподвижной точки, инвариантные усы существуют и имеют степень гладкости, совпадающую со степенью гладкости гомеоморфизма в проколотой окрестности неподвижной точки. Для этого использовался метод Адамара. Показано также, что если гомеоморфизм некоторым (негладким) преобразованием координат можно перевести в аналитическое отображение, то инвариантные усы в исходной системе координат задаются аналитическими функциями. Для этого использовался метод Пуанкаре.

В данной работе мы покажем, что решением задачи (0.1),(0.2) в случае общего положения функций A, B, F, G является решение одного из нижеследующих трёх типов:

I.тип: Оптимальный синтез в окрестности точки \tilde{x} существует и имеет следующий вид. Имеются кривая переключения с 1 на 0 и особый режим, стыкующиеся в \tilde{x} . Существует в точности одна траектория, которая за конечное время попадает в \tilde{x} . Остальные траектории за конечное время попадают на особый режим, а по нему асимптотически достигают \tilde{x} .

II.тип: Оптимальный синтез в окрестности точки \tilde{x} существует и имеет следующий вид. Имеются две кривые переключения, с 0 на 1 и наоборот, которые стыкуются в точке \tilde{x} . Траектории оборачиваются вокруг \tilde{x} бесконечное количество раз, пересекая попеременно эти кривые и при каждом обороте приближаясь к \tilde{x} со скоростью геометрической прогрессии. Моменты переключения управления накапливаются к бесконечности.

III.тип: Оптимального синтеза не существует. Существует последовательность допустимых траекторий, на которых значения функционала J стремятся к $-\infty$. Это возможно, потому что интеграл (0.1) берётся до $+\infty$.

В данной работе мы не ставили себе целью дать полную классификацию синтезов для всех систем вида (0.1), (0.2). Мы ограничимся такими функциями A, B, F, G , для которых главные члены в разложении Тейлора определяют поведение системы в окрестности \tilde{x} , и исследуем также бифуркацию между типами I и II. Нас интересует структура синтеза оптимального управления в окрестности U точки \tilde{x} . Точнее, мы исследуем ростки синтезов вокруг \tilde{x} в зависимости от ростков функций A, B, F, G .

Диссертация структурирована нижеследующим образом.

В первой главе найдена группа симметрий задачи и построена каноническая форма относительно этой группы. Группа включает в себя максимальную подгруппу канонических преобразований расширенного фазового пространства, сохраняющую структуру задачи. Эта подгруппа состоит из группы локальных диффеоморфизмов фазовой плоскости и из группы преобразований подинтегральной функции функционала, которую можно охарактеризовать как пространство замкнутых 1-форм на фазовой плоскости. Далее группа преобразований включает в себя изменение масштаба времени и умножение функционала на постоянную величину. Исследовано действие этой группы на линейные джеты системы, найдена каноническая форма в пространстве этих джетов и полный набор инвариантов этого действия, являющихся координатами на факторпространстве джетов.

Во второй главе исследованы канонические формы систем класса C^3 . На фактормногообразии джетов выделены три открытые области, объединение которых является плотным множеством. Каждая из областей при этом соответствует одному из вышеназванных типов оптимального синтеза. В параграфе 2.3 сформулированы и доказаны утверждения о существовании и гладкости инвариантных многообразий у вырожденного гомеоморфизма в окрестности неподвижной точки, имеющей в некотором смысле гиперболический характер.

В третьей главе исследована бифуркация при переходе значений инвариантов на фактормногообразии джетов из области, соответствующей типу I оптимального синтеза в область, соответствующую типу II. Точнее, проведена полная классификация аналитических систем, значения инвариантов которых лежат на границе между этими областями. При этом установлено, что возникает ещё один тип синтеза, топологически неэквивалентный типам I и II.

В последней главе ещё раз подытожены результаты в виде точно сформулированных теорем.

Автор рад представившейся возможности выразить глубокую благодарность своему научному руководителю профессору М.И. Зеликину за оказанное внимание и помощь во время аспирантуры. Автор также благодарен Н.Б. Мельникову за поддержку при оформлении диссертации.

1 Приведение систем к нормальной форме

Рассмотрим множество четвёрок (A, B, F, G) функций класса C^3 , определённых в некоторой окрестности U' точки $\tilde{x} \in \mathbf{R}^2$. При этом A, B — векторные поля, F, G — скалярные функции, и выполняются следующие условия:

- i) $A(\tilde{x}) = 0$,
- ii) поле A имеет в \tilde{x} фокус или центр, т.е. $(\frac{1}{2}\text{tr}(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x})))^2 - \det(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x})) < 0$,
- iii) $B(\tilde{x}) \neq 0$,
- iv) $F(\tilde{x}) = G(\tilde{x}) = 0$,
- v) $\nabla F(\tilde{x}) = 0$,

где tr — след матрицы. Обозначим это множество четвёрок через S . Оно является подмножеством бесконечномерного векторного пространства над \mathbf{R} . Каждой паре $((A, B, F, G), U)$, состоящей из функций (A, B, F, G) , определённых в окрестности U' и удовлетворяющих условиям i)-v), и окрестности $U \subset U'$, соответствует задача оптимального управления (0.1),(0.2) в окрестности U .

Пусть существует окрестность U точки \tilde{x} , в которой функции A, B, F, G и A', B', F', G' соответственно совпадают. Тогда пара $((A, B, F, G), U)$ задаёт ту же задачу (0.1),(0.2), что и $((A', B', F', G'), U)$. Следовательно, им соответствует один и тот же оптимальный синтез в окрестности U . Таким образом, каждая четвёрка ростков в \tilde{x} функций A, B, F, G , удовлетворяющих условиям i)-v), задаёт росток синтеза задачи (0.1),(0.2) в том смысле, что соответствующие оптимальные синтезы для любых двух представителей совпадают, если ограничить соответствующие им задачи на достаточно малую окрестность U . В дальнейшем мы для простоты будем отождествлять четвёрки функций (A, B, F, G) множества S с соответствующими задачами (0.1),(0.2).

В этом разделе мы исследуем группу симметрий задачи (0.1),(0.2). Это позволяет свести исследование всей совокупности S рассматриваемых задач к исследованию наиболее просто устроенных представителей орбит группы симметрий. В частности, если элементы некоторой группы преобразований переводят синтез в орбитально эквивалентный, то при знании синтеза для одной конкретной задачи можно построить синтез для всех задач из соответствующей орбиты этой группы.

Определим четыре группы преобразований функций (A, B, F, G) из S , переводящие синтез в орбитально эквивалентный.

Кренером в [49] было дано следующее определение орбитальной эквивалентности управляемых систем: две управляемые системы

$$\dot{x} = A(x) + uB(x), \quad \dot{x}' = A'(x') + uB'(x'), \quad u \in \mathcal{U},$$

определённые в окрестностях V , V' , называются орбитально эквивалентными, если существует диффеоморфизм $D : V \rightarrow V'$, переводящий траектории первой системы в траектории второй при любых одинаковых управлениях $u(t)$.

Это имеет место тогда и только тогда, когда диффеоморфизм D переводит A в A' и B в B' , т.е. $A'(D(x)) = D_*(A(x))$ и $B'(D(x)) = D_*(B(x))$. Здесь D_* обозначает дифференциал D . В частности, если A , B , A' , B' удовлетворяют условиям i)-iii), то особая точка \tilde{x} переводится в особую точку $\tilde{x}' = D(\tilde{x})$. Чтобы оптимальный синтез при таком преобразовании оставался оптимальным, функции F и G должны сохраняться, т.е. $F'(D(x)) = F(x)$, $G'(D(x)) = G(x)$. В дальнейшем мы без ограничения общности будем считать, что точка \tilde{x} совпадает с началом координат $(0, 0)$, так как её можно переместить с помощью подходящей трансляции.

Обозначим группу диффеоморфизмов класса C^4 в окрестности U точки \tilde{x} , оставляющих \tilde{x} неподвижной, через Δ . Пусть $D \in \Delta$ и $D_* = \frac{\partial x'}{\partial x}$ — дифференциал D . Здесь $x' = D(x)$ — новые координатные функции. Тогда четвёрка (A, B, F, G) преобразуется по формулам

$$\begin{aligned} A'(x'(x)) &= \frac{\partial x'}{\partial x} A(x), & B'(x'(x)) &= \frac{\partial x'}{\partial x} B(x), \\ F'(x'(x)) &= F(x), & G'(x'(x)) &= G(x). \end{aligned}$$

Утверждение 1.1. *Если сумма векторных полей $A + B$ принадлежит классу C^4 , то существует такой диффеоморфизм $D \in \Delta$, что образ $D_*(A + B)$ этой суммы является постоянным ненулевым векторным полем. Диффеоморфизм D можно выбрать таким, что якобиан D_* в точке \tilde{x} равен единичной матрице E_2 . Если вдобавок поле $A + B$ аналитическое, то D можно выбрать аналитическим.*

Доказательство: Поле A в точке \tilde{x} вырождено, а поле B невырождено. Следовательно сумма $A + B$ невырождена в окрестности точки \tilde{x} , и применима теорема о выпрямлении векторного поля [2]. Если $A + B \in C^4$ ($\in C^\omega$), осуществляющий выпрямление диффеоморфизм D также принадлежит классу C^4 (C^ω) по теореме о дифференцируемой (аналитической) зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных [27]. Последующим аффинным преобразованием можно добиться того, что точка \tilde{x} остается неподвижной при действии D и якобиан D_* в этой точке равен единичной матрице. \square

Предположение гладкости в утверждении 1.1 существенно. Вообще говоря, если сумма $A + B$ принадлежит только классу C^3 , то выпрямляющий диффеоморфизм D также принадлежит только классу C^3 и не является элементом группы Δ .

Обозначим через Ξ аддитивную группу потенциальных векторных полей $\xi : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ класса C^3 , исчезающих в \tilde{x} : $\xi(\tilde{x}) = 0$, $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$. Элемент $\xi \in \Xi$

переводит функции A, B, F, G в функции A', B', F', G' по следующим формулам:

$$A' = A, \quad B' = B, \quad F' = F + \langle \xi, A \rangle, \quad G' = G + \langle \xi, B \rangle.$$

Покажем, что оптимальный синтез задачи (0.1), (0.2) инвариантен относительно действия элементов группы преобразований Ξ .

Геометрический смысл этих преобразований состоит в следующем. Рассмотрим аффинную по управлению систему

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^k f_i(x)u_i, \quad I(x(t)) = \int (\phi_0(x) + \sum_{i=1}^k \phi_i(x)u_i) dt \rightarrow \inf,$$

$$x \in \mathbf{R}^n, \quad f_0, f_i \in \mathbf{R}^n, \quad u_i \in \mathbf{R}, \quad \phi_0, \phi_i \in \mathbf{R}.$$

Как известно [77], функционал I можно представить в виде интеграла от некоторой формы $\eta(x)$, если векторы $f_i, i = 0, \dots, k$ линейно независимы. При этом η на векторах f_i принимает значения ϕ_i .

$$I(x(t)) = \int \eta, \quad \eta(f_i) = \phi_i, \quad i = 0, \dots, k$$

С другой стороны, интеграл от некоторой формы η можно представить в виде

$$\int \eta = \int (\eta(f_0) + \sum_{i=1}^k \eta(f_i)u_i) dt.$$

Если форма точная, т.е. $\eta = d\omega$, то функционал зависит только от начальной и конечной точки траектории. Всякое управление, переводящее систему из начальной точки в конечную, придаёт функционалу одно и то же значение. Поэтому прибавление полного дифференциала к подынтегральному выражению в функционале не меняет оптимального синтеза. Если рассматривать ξ как вектор коэффициентов дифференциальной формы $\eta = \langle \xi, dx \rangle$, то имеем

$$\begin{aligned} \int (F' + G'u) dt &= \int ((F + Gu) + \langle \xi, A + Bu \rangle) dt = \\ &= \int (F + Gu) dt + \int \langle \xi, dx \rangle = \int (F + Gu) dt + \int \eta. \end{aligned}$$

Но в силу накладываемых на ξ условий η является точной формой, и оптимальный синтез для функций F', G' не отличается от оптимального синтеза для функций F, G .

Замечание 1: Вследствие регулярности векторного поля B всегда существует такое поле ξ , что $\langle \xi, B \rangle = -G$. После преобразования ξ получаем $G' = 0$, $F' = F + \langle \xi, A \rangle$, и подинтегральное выражение в (0.1) не зависит от u . Но в общем случае такое поле ξ принадлежит только классу C^2 и не содержится в группе Ξ .

Утверждение 1.2. Если B и G принадлежат классу C^4 , то существует такая функция $\xi \in \Xi$, что $\langle \xi, B \rangle = -G$. Если $\nabla G(\tilde{x}) = 0$, то ξ можно подобрать так, что $\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) = 0$. Если B и G — аналитические функции, то ξ можно выбрать аналитическим.

Доказательство: Так как $B \in C^4$, то существует диффеоморфизм $D \in \Delta$, переводящий B в постоянное поле $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Если B — аналитическая функция, то в силу теоремы об аналитической зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных [27] диффеоморфизм D можно выбрать аналитическим. Диффеоморфизм D переводит функцию G в некоторую функцию G' , которая также принадлежит классу C^4 и исчезает в точке \tilde{x} . Если $D \in C^\omega$ и $G \in C^\omega$, то также $G' \in C^\omega$. Определим функцию $\chi(x_1, x_2) = -\int_0^{x_1} G'(\sigma, x_2) d\sigma$ и потенциальное поле $\xi' = \nabla \chi$. Функция χ принадлежит классу C^4 , а поле ξ' — классу C^3 . Если $G' \in C^\omega$, то $\chi \in C^\omega$ и $\xi' \in C^\omega$. Имеем $\xi'_1(\tilde{x}) = -G'(\tilde{x}) = 0$, $\xi'_2(\tilde{x}) = 0$. Таким образом, $\xi' \in \Xi$. Определим поле ξ как образ поля ξ' при обратном диффеоморфизме D^{-1} . Если $D \in C^\omega$ и $\xi' \in C^\omega$, то также $\xi \in C^\omega$. Ясно, что $\langle \xi', B' \rangle = \frac{\partial \chi}{\partial x_1} = -G'$, поэтому $\langle \xi, B \rangle = -G$.

Вычислим $\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x})$ в случае, если $\nabla G(\tilde{x}) = 0$. Тогда $\nabla G'(\tilde{x}) = 0$, и

$$\frac{\partial \xi'_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) = \frac{\partial G'}{\partial x_1}(\tilde{x}) = 0, \quad \frac{\partial \xi'_1}{\partial x_2}(\tilde{x}) = \frac{\partial G'}{\partial x_2}(\tilde{x}) = 0, \quad \frac{\partial \xi'_2}{\partial x_2}(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}(\tilde{x}) = 0.$$

Таким образом, $\frac{\partial \xi'}{\partial x}(\tilde{x}) = 0$. Отсюда следует $\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) = 0$. \square

Замечание: Группы преобразований Δ и Ξ индуцируют канонические преобразования гамильтоновой системы данной задачи оптимального управления в расширенном фазовом пространстве T^*X .

Опишем ещё две группы преобразований множества S , переводящих синтез в эквивалентный. Используем более широкое определение орбитальной эквивалентности, данное в [41]. Это определение допускает дополнительно изменение масштаба времени умножением dt на положительную функцию, зависящую от x .

Обозначим через Λ мультипликативную группу положительных скалярных функций $\lambda(x)$ класса C^3 в окрестности U , а через R — мультипликативную

группу положительных вещественных чисел \mathbf{R}_+ . Определим действие элементов $\lambda \in \Lambda$ и $r \in R$ на четвёрки (A, B, F, G) следующим образом:

$$A' = \lambda A, B' = \lambda B, F' = \lambda F, G' = \lambda G; \quad A' = A, B' = B, F' = rF, G' = rG.$$

Действие элемента $\lambda(x) \in \Lambda$ отвечает изменению масштаба времени, а именно умножению дифференциала dt на множитель $\frac{1}{\lambda(x)}$. Так как дифференциал $dx = (A + uB)dt$ и подынтегральное выражение $(F + uG)dt$ остаются инвариантными, преобразования из Λ переводят синтез в орбитально эквивалентный по [41]. Наконец, умножение функций F, G на положительную константу $r \in R$ не меняет оптимального синтеза.

Итак, четыре группы преобразований Δ, Ξ, Λ, R переводят оптимальный синтез в орбитально эквивалентный. Обозначим через \mathbf{G} группу, порождённую группами Δ, Ξ, Λ, R . Умножением в \mathbf{G} служит композиция преобразований. Исследуем структуру группы \mathbf{G} . Обозначим подгруппы Δ, Ξ, Λ, R через $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$. Далее, обозначим умножение в \mathbf{G} через \bullet , а композицию отображений через \circ . Элементы группы \mathbf{G} рассматриваются, с одной стороны, как преобразования множества S при применении операции \bullet и, с другой стороны, как отображения из окрестности U в \mathbf{R}^2 или \mathbf{R} при применении операции \circ .

Утверждение: $\forall \mathbf{g}_i \in \mathbf{G}_i, \mathbf{g}_j \in \mathbf{G}_j, i, j = 1, \dots, 4 \exists \mathbf{g}'_i \in \mathbf{G}_i, \mathbf{g}'_j \in \mathbf{G}_j : \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j = \mathbf{g}'_j \bullet \mathbf{g}'_i$.

Доказательство: Для любых $D \in \Delta, r \in R, \lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi$ имеем $D \bullet r = r \bullet D, r \bullet \lambda = \lambda \bullet r, \xi \bullet \lambda = \lambda \bullet \xi$ и

$$\begin{aligned} D \bullet \lambda &= \lambda' \bullet D, & \text{где } \lambda' &= \lambda \circ D; \\ D \bullet \xi &= \xi' \bullet D, & \text{где } \xi' &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^T (\xi \circ D); \\ r \bullet \xi &= \xi'' \bullet r, & \text{где } \xi'' &= \frac{\xi}{r}. \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\partial x'}{\partial x}$ — матрица дифференциала диффеоморфизма D . Отсюда следует, что подгруппы Ξ и Λ нормальны в \mathbf{G} . Следовательно, для любых $D \in \Delta, r \in R, \lambda \in \Lambda, \xi \in \Xi$ найдутся такие $\xi', \xi'' \in \Xi, \lambda' \in \Lambda$, что $\lambda \bullet D = D \bullet \lambda', \xi \bullet D = D \bullet \xi', \xi \bullet r = r \bullet \xi''$. \square

Следствие 1.1. *Любой элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ однозначно представляется в виде произведения $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \bullet \mathbf{g}_2 \bullet \mathbf{g}_3 \bullet \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_i \in \mathbf{G}_i, i = 1, \dots, 4$.*

Нашей целью является исследование задач из множества S в случае общего положения, когда главные члены в разложениях Тейлора функций A, B, F, G в точке \tilde{x} определяют тип синтеза. В этом случае структура синтеза определяется соответствующей струёй.

Определение: Две четвёрки $(A, B, F, G), (A', B', F', G') \in S$ принадлежат к одной струе, если выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x}) = \frac{\partial A'}{\partial x}(\tilde{x}), \quad B(\tilde{x}) = B'(\tilde{x}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}(\tilde{x}), \quad \frac{\partial G}{\partial x}(\tilde{x}) = \frac{\partial G'}{\partial x}(\tilde{x}).$$

Определим проекцию p из S на пространство струй.

$$p : (A, B, F, G) \mapsto \left(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x}), B(\tilde{x}), \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{x}), \frac{\partial G}{\partial x}(\tilde{x}) \right) \in \mathbf{R}^{11}$$

Обозначим образ множества S в 11-мерном пространстве струй через P . Множество $P \subset \mathbf{R}^{11}$ открыто и определяется условиями ii), iii). Далее обозначим для краткости матрицу $\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x})$ через a , вектор $B(\tilde{x})$ через b , матрицу $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{x})$ через f , а вектор-строку $\frac{\partial G}{\partial x}(\tilde{x})$ через g .

Лемма: Действие группы \mathbf{G} на S индуцирует действие на P .

Доказательство: Пусть $(A, B, F, G) \in S$, $\mathbf{g}(A, B, F, G) = (A', B', F', G')$, где $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$. Нужно показать, что $p(A', B', F', G') = (a', b', f', g')$ зависит только от $p(A, B, F, G) = (a, b, f, g)$. Вычислим проекцию (a', b', f', g') вначале для случая, когда \mathbf{g} является элементом одной из образующих подгрупп Δ, Ξ, Λ, R .

Пусть $\mathbf{g} = D \in \Delta$. Обозначим через $M = \frac{\partial x'}{\partial x}(\tilde{x}) \in \text{GL}(2, \mathbf{R})$ матрицу дифференциала D_* в точке \tilde{x} . Поле A и градиент $\frac{\partial F}{\partial x}$ исчезают в точке \tilde{x} , поэтому компоненты вектора (a, b, f, g) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\partial A'}{\partial x'}(\tilde{x}) = \frac{\partial M A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'}(\tilde{x}) = M \frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x}) M^{-1} = M a M^{-1}, \\ b' &= M b, \\ f' &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2}(\tilde{x}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'}(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'}(\tilde{x}) = (M^{-1})^T f M^{-1}, \\ g' &= \frac{\partial G'}{\partial x'}(\tilde{x}) = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'}(\tilde{x}) = g M^{-1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{g} = \xi(x) \in \Xi$. Учитывая $A(\tilde{x}) = 0$, $\xi(\tilde{x}) = 0$ и симметричность матри-

цы $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, получаем

$$\begin{aligned} a' &= a, \\ b' &= b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{x}) + \frac{\partial \left(\frac{\partial \langle \xi, A \rangle}{\partial x} \right)^T}{\partial x}(\tilde{x}) = f + \frac{\partial \left(\xi^T \frac{\partial A}{\partial x} \right)^T}{\partial x} + \frac{\partial \left(A^T \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^T}{\partial x} = \\ &= f + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^T \frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x}) = f + a^T \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) + \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) a, \\ g' &= \frac{\partial G'}{\partial x}(\tilde{x}) = \frac{\partial G}{\partial x}(\tilde{x}) + \frac{\partial \langle \xi, B \rangle}{\partial x}(\tilde{x}) = g + B^T \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) = g + b^T \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть $\mathbf{g} = \lambda(x) \in \Lambda$. Тогда

$$a' = \lambda(\tilde{x})a, \quad b' = \lambda(\tilde{x})b, \quad f' = \lambda(\tilde{x})f, \quad g' = \lambda(\tilde{x})g. \quad (1.3)$$

Пусть, наконец, $\mathbf{g} = r \in R$. Тогда

$$a' = a, \quad b' = b, \quad f' = rf, \quad g' = rg. \quad (1.4)$$

Так как \mathbf{G} порождается элементами рассмотренных подгрупп, в общем случае (a', b', f', g') зависит также только от (a, b, f, g) . Лемма доказана. \square

Заметим, что (a', b', f', g') зависит линейно от (a, b, f, g) . Таким образом, действие группы \mathbf{G} на P задаёт представление \mathbf{G} в $\text{GL}(11)$. Обозначим ядро этого представления через \mathbf{G}_E . На множестве P эффективно действует факторгруппа \mathbf{G}/\mathbf{G}_E . Она является линейной группой Ли.

Представим элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ в виде произведения $D \bullet \xi \bullet \lambda \bullet r$ элементов подгрупп Δ, Ξ, Λ, R . Уравнения (1.1)-(1.4) показывают, что преобразование, индуцированное элементом \mathbf{g} в пространстве струй, зависит только от набора величин $\frac{\partial x'}{\partial x}(\tilde{x}), \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}), \lambda(\tilde{x}), r$. Вследствие симметричности матрицы $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ лишь девять из них алгебраически независимы. Нетрудно видеть, что элементы алгебры Ли, порождаемые вариацией каждой из этих величин, линейно независимы. Таким образом, группа \mathbf{G}/\mathbf{G}_E является 9-мерной линейной группой Ли.

Обозначим матрицу $\frac{\partial x'}{\partial x}(\tilde{x})$ через M , матрицу $\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x})$ через ξ_x , а число $\lambda(\tilde{x})$ просто через λ . Таким образом, произвольный элемент группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E задаётся набором (M, ξ_x, λ, r) . Его действие на точку $(a, b, f, g) \in P$ представляется в виде композиции преобразований (1.1)-(1.4), в этом же порядке.

Утверждение 1.3. *Пусть $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$. Тогда в смежном классе $\mathbf{g}\mathbf{G}_E$ найдётся такой элемент \mathbf{g}' , что соответствующие ему преобразования задаются аналитическими функциями.*

Доказательство: Элемент \mathbf{g} представим в виде композиции $D \bullet \xi(x) \bullet \lambda(x) \bullet r$ элементов подгрупп Δ, Ξ, Λ, R . Эти элементы определяют величины (M, ξ_x, λ, r) . Определим C^ω -диффеоморфизм D' как линейное преобразование с матрицей M , потенциальную вектор-функцию $\xi'(x)$ как линейную по x функцию $\xi'(x) = \xi_x x$, а положительную вещественнозначную функцию $\lambda'(x)$ как постоянную функцию $\lambda'(x) \equiv \lambda = \lambda(\tilde{x})$. Ясно, что композиция $\mathbf{g}' = D' \bullet \xi'(x) \bullet \lambda'(x) \bullet r$ лежит в одном смежном классе с \mathbf{g} и обладает требуемыми свойствами. \square

Подгруппа \mathbf{G}_E действует внутри каждой струи. Если бы это действие было транзитивным, задача сводилась бы к рассмотрению только линейных систем. К сожалению, это не так. Чтобы убрать нелинейную часть системы, необходимо привести четыре функции от двух переменных A_1, A_2, B_1, B_2 к виду $B_1 \equiv B_1(0, 0), B_2 \equiv B_2(0, 0), A_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(0, 0)x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(0, 0)x_2, A_2 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(0, 0)x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(0, 0)x_2$. Но мы располагаем только тремя функциями $x'_1(x), x'_2(x), \lambda(x)$, которые мы можем выбрать произвольно, так как группа Ξ не действует на A, B .

В [4] исследована орбитальная эквивалентность решений уравнения $\dot{x} = A(x)$ на плоскости в окрестности особой точки гладкого векторного поля A . В этой работе доказано, что не все системы орбитально эквивалентны своей линеаризации вокруг особой точки, в частности, если линеаризация является центром. Диффеоморфизмы, осуществляющие орбитальную эквивалентность, предполагались класса C^∞ . Но нетрудно видеть, что в случае центра при расширении класса допустимых диффеоморфизмов на классы конечной гладкости этот результат остаётся в силе.

Исследуем действие группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E на P и выделим наиболее просто устроенных представителей орбит в пространстве струй.

Предложение 1: Пусть $q = (a, b, f, g) \in P$. Тогда существует элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_E$ такой, что точка $\mathbf{g}(q) = \hat{q} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{f}, \hat{g}) \in P$ удовлетворяет уравнениям

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} * & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{f}_{12} = 0, \quad \hat{f}_{11}^2 + \hat{f}_{22}^2 \in \{0, 1\}; \quad \hat{g} = 0. \quad (1.5)$$

Значение элемента на месте звёздочки зависит от матрицы a и лежит в интервале $(-2, 2)$.

Доказательство: Преобразуем условие ii):

$$\begin{aligned} \frac{\text{tr}^2 a}{4} - \det a &= \frac{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2}{4} - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = \\ &= \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12}a_{21} < 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\det a > 0$, и определён корень $\sqrt{\det a}$. Далее, $-a_{12}a_{21} > 0$. Поэтому a_{12} либо положительно, либо отрицательно.

Пусть $a_{12} > 0$. Тогда $a_{21} < 0$ и матрица

$$\begin{pmatrix} -a_{21} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & a_{12} \end{pmatrix}$$

положительно определена. Следовательно,

$$-b_1^2 a_{21} + b_1 b_2 (a_{11} - a_{22}) + b_2^2 a_{12} = b^T \begin{pmatrix} -a_{21} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & a_{12} \end{pmatrix} b > 0.$$

Если $a_{12} < 0$, то $a_{21} > 0$ и вышестоящая матрица отрицательно определена. Следовательно, $-b_1^2 a_{21} + b_1 b_2 (a_{11} - a_{22}) + b_2^2 a_{12} < 0$. Во всяком случае выражение $\beta = -b_1^2 a_{21} + b_1 b_2 (a_{11} - a_{22}) + b_2^2 a_{12}$ не равно нулю.

Поэтому следующая матрица определена и невырождена:

$$M = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)\sqrt{\det a} & (a_{12}b_2 - a_{22}b_1)\sqrt{\det a} \\ -b_2 \det a & b_1 \det a \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к M имеет вид

$$M^{-1} = \frac{1}{\det a} \begin{pmatrix} b_1 \sqrt{\det a} & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ b_2 \sqrt{\det a} & -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix}.$$

Применим к (a, b, f, g) преобразование (1.1) с матрицей M . Находим

$$\begin{aligned}
a' &= MaM^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & a_{12}b_2 - a_{22}b_1 \\ -b_2\sqrt{\det a} & b_1\sqrt{\det a} \end{pmatrix} \frac{a}{\beta\sqrt{\det a}} * \\
&\quad * \begin{pmatrix} b_1\sqrt{\det a} & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ b_2\sqrt{\det a} & -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & \sqrt{\det a} \\ -\sqrt{\det a} & 0 \end{pmatrix}, \\
b' &= Mb = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)\sqrt{\det a} & (a_{12}b_2 - a_{22}b_1)\sqrt{\det a} \\ -b_2 \det a & b_1 \det a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\det a} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
f' &= (M^{-1})^T f M^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} b_1\sqrt{\det a} & b_2\sqrt{\det a} \\ a_{22}b_1 - a_{12}b_2 & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{pmatrix} \frac{f}{(\det a)^2} \begin{pmatrix} b_1\sqrt{\det a} & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ b_2\sqrt{\det a} & -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{b^T f b}{\det a} & \frac{b^T f a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} \\ \frac{(a^{-1}b)^T f b}{\sqrt{\det a}} & (a^{-1}b)^T f a^{-1} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^T f b}{\det a} & \frac{b^T f a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} \\ \frac{b^T f a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} & b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b \end{pmatrix}, \\
g' &= gM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{g_1 b_1 + g_2 b_2}{\sqrt{\det a}}, \frac{g_1(a_{22}b_1 - a_{12}b_2) + g_2(-a_{21}b_1 + a_{11}b_2)}{\det a} \end{pmatrix} = \\
&= \left(\frac{g b}{\sqrt{\det a}}, g a^{-1} b \right).
\end{aligned}$$

Подействуем на точку $(a', b', f', g') \in P$ преобразованием (1.3), определяемым числом $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\det a}}$. Обозначим результат через (a'', b'', f'', g'') :

$$\begin{aligned}
a'' &= \lambda a' = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & b'' &= \lambda b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
f'' &= \lambda f' = \begin{pmatrix} \frac{b^T f b}{\sqrt{\det a}^3} & \frac{b^T f a^{-1} b}{\det a} \\ \frac{b^T f a^{-1} b}{\det a} & \frac{b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} \end{pmatrix}, & g'' &= \lambda g' = \left(\frac{g b}{\det a}, \frac{g a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} \right).
\end{aligned}$$

Из условия ii) следует, что $a''_{11}{}^2 = \frac{\operatorname{tr}^2 a}{\det a} < 4$. Отсюда вытекает, что $a''_{11} \in (-2, 2)$.

Определим симметрическую матрицу

$$\xi_x = \begin{pmatrix} -g''_1 & -g''_2 \\ -g''_2 & f''_{12} - g''_1 - \frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}} g''_2 \end{pmatrix}.$$

Применим преобразование (1.2), определяемое этой матрицей. Компоненты a'', b''

останутся неизменными, а f'' и g'' перейдут в

$$\begin{aligned}
f''' &= f'' + a''^T \xi_x + \xi_x a = f'' + \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}} g_1'' + g_2 & -f_{12}'' + g_1'' \\ -g_1'' & -g_2'' \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}} g_1'' + g_2 & -g_1'' \\ -f_{12}'' + g_1'' & -g_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}'' - 2\frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}} g_1'' + 2g_2'' & 0 \\ 0 & f_{22}'' - 2g_2'' \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{b^T f b}{\sqrt{\det a}^3} - 2g \left(\frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}^3} E_2 - \frac{a^{-1}}{\sqrt{\det a}} \right) b & 0 \\ 0 & \frac{b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} - \frac{2g a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{b^T f b - 2g a b}{\sqrt{\det a}^3} & 0 \\ 0 & \frac{b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2g a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} \end{pmatrix}, \\
g''' &= g'' + b''^T \xi_x = g'' + (-g_1'', -g_2'') = 0.
\end{aligned}$$

Если $f_{11}''' = f_{22}''' = 0$, то точка $(a'', b'', f''', g''') \in P$ удовлетворяет условиям (1.5). В обратном случае отнормируем сумму квадратов $f_{11}'''^2 + f_{22}'''^2$. Применим трансформацию (1.4), определяемую числом $r = (f_{11}'''^2 + f_{22}'''^2)^{-1/2}$. Тогда мы получим точку $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{f}, \hat{g})$, которая также удовлетворяет условиям (1.5):

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{tr} a}{\sqrt{\det a}} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = 0, \quad \hat{f}_{12} = 0, \\
\hat{f}_{11} &= \frac{b^T f b - 2g a b}{\sqrt{(b^T f b - 2g a b)^2 + (\det a)^2 (b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2g a^{-1} b)^2}}, \\
\hat{f}_{22} &= \frac{\det a (b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2g a^{-1} b)}{\sqrt{(b^T f b - 2g a b)^2 + (\det a)^2 (b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2g a^{-1} b)^2}}. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Искомый элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_E$ является композицией вышеописанных преобразований. Предложение 1 доказано. \square

Утверждение 1.4. Пусть $(A, B, F, G) \in S$. Если $A, B, G \in C^4$, то существует такое преобразование $\mathbf{h} \in \mathbf{G}$, что образ $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{F}, \hat{G}) = \mathbf{h}(A, B, F, G)$ четвёрки функций (A, B, F, G) обладает следующими свойствами. Вдобавок к условиям (1.5) выполняются условия

$$\hat{G}(x) \equiv 0, \quad \hat{A}(x) + \hat{B}(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Если $A, B, G \in C^\omega$, то преобразование \mathbf{h} можно представить аналитическими функциями.

Доказательство: Пусть $A, B, G \in C^4(C^\omega)$. Пусть $(a, b, f, g) \in P$ — струя четвёрки (A, B, F, G) . В силу предложения 1 и утверждения 1.3 существует элемент $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, который задаётся аналитическими функциями и переводит четвёрку (A, B, F, G) в четвёрку (A', B', F', G') , удовлетворяющую уравнениям (1.5). Заметим, что функции A', B', G' выражаются через A, B, G и поэтому принадлежат классу $C^4(C^\omega)$. Имеем $\nabla G'(\tilde{x}) = 0$, поэтому в силу утверждения 1.2 существует элемент $\xi \in \Xi$ (аналитический в случае $A, B, G \in C^\omega$), который удовлетворяет равенствам $\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x}) = 0$, $\langle \xi, B' \rangle = -G'$. Первое равенство гарантирует, что при его применении не нарушаются условия (1.5), а второе, что он переводит функцию G' в тождественный нуль. В силу утверждения 1.1, наконец, существует диффеоморфизм D (аналитический в случае $A, B, G \in C^\omega$), выпрямляющий векторное поле $A' + B'$ и дифференциал которого в точке \tilde{x} равен единичной матрице. Поэтому преобразование D не нарушает условий (1.5) и результирующая четвёрка $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{F}, \hat{G})$ удовлетворяет уравнениям (1.7). Положим $\mathbf{h} = \mathbf{g} \bullet \xi \bullet D$. \square

Замечание: Если вместо C^4 -гладкости предположить C^5 -гладкость, то к уравнениям (1.7) можно ещё добавить условие $A_2 \equiv -x_1$, однако доказательство здесь намного более объёмное.

Обозначим множество всех элементов $\hat{q} \in P$, удовлетворяющих условиям (1.5), через Q . Предложение 1 утверждает, что для каждой данной точки $q \in P$ существует точка $\hat{q} \in Q$, лежащая на орбите точки q относительно действия группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E . Покажем, что точка \hat{q} однозначно определена. Тогда существует биекция между Q и множеством орбит на P .

Утверждение 1.5. Пусть $(a, b, f, g) — точка из P , а $\mathbf{g} \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_E$ — такой элемент, что $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{f}, \hat{g}) = \mathbf{g}(a, b, f, g) \in Q$. Тогда $\hat{a}, \hat{b}, \hat{f}, \hat{g}$ удовлетворяют уравнениям (1.6).$

Доказательство: Покажем, что выражения (1.6) инвариантны относительно преобразований из \mathbf{G}/\mathbf{G}_E . Так как группа \mathbf{G}/\mathbf{G}_E порождается трансформациями (1.1)-(1.4), достаточно проверить инвариантность относительно этих трансформаций.

Выражение $\hat{a}_{11} = \frac{\text{tr } a}{\sqrt{\det a}}$ не меняется при преобразованиях (1.2) и (1.4), поскольку последние не меняют матрицу a . Инвариантность относительно трансформации (1.1) следует из инвариантности следа и определителя. При умножении 2×2 -матрицы на константу $\lambda > 0$ определитель умножается на λ^2 , а след — на λ . Отсюда вытекает инвариантность отношения $\frac{\text{tr } a}{\sqrt{\det a}}$ относительно преобразования (1.3).

Обратимся к выражениям $f_{11}''' = \frac{b^T f b - 2g a b}{\sqrt{\det a}^3}$ и $f_{22}''' = \frac{b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2g a^{-1} b}{\sqrt{\det a}}$. Пусть

$M \in \text{GL}(2, \mathbf{R})$ — невырожденная матрица. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{b'^T f' b' - 2 g' a' b'}{\sqrt{\det a'}^3} &= \frac{(b^T M^T)((M^{-1})^T f M^{-1})(M b) - 2(g M^{-1})(M a M^{-1})(M b)}{\sqrt{\det(M a M^{-1})}^3} \\ &= \frac{b^T f b - 2 g a b}{\sqrt{\det a}^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b'^T (a'^{-1})^T f' a'^{-1} b' - 2 g' a'^{-1} b'}{\sqrt{\det a'}} &= \\ &= \frac{(b^T M^T)((M^{-1})^T (a^{-1})^T M^T)((M^{-1})^T f M^{-1})(M a^{-1} M^{-1})(M b)}{\sqrt{\det(M a M^{-1})}} \\ &\quad - \frac{2(g M^{-1})(M a^{-1} M^{-1})(M b)}{\sqrt{\det(M a M^{-1})}} = \frac{b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2 g a^{-1} b}{\sqrt{\det a}}. \end{aligned}$$

Пусть ξ_x — симметрическая 2×2 -матрица. Тогда

$$\frac{b'^T f' b' - 2 g' a' b'}{\sqrt{\det a'}^3} = \frac{b^T (f + a^T \xi_x + \xi_x a) b - 2(g + b^T \xi_x) a b}{\sqrt{\det a}^3} = \frac{b^T f b - 2 g a b}{\sqrt{\det a}^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{b'^T (a'^{-1})^T f' a'^{-1} b' - 2 g' a'^{-1} b'}{\sqrt{\det a'}} &= \\ &= \frac{b^T (a^{-1})^T (f + a^T \xi_x + \xi_x a) a^{-1} b - 2(g + b^T \xi_x) a^{-1} b}{\sqrt{\det a}} = \frac{b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2 g a^{-1} b}{\sqrt{\det a}}. \end{aligned}$$

По отношению к преобразованию (1.3) оба выражения однородны степени 0, т.е. инвариантны. При преобразовании (1.4) оба выражения умножаются на одно и то же положительное число r . В соотношениях $\hat{f}_{11}, \hat{f}_{22}$ это число в числителе и в знаменателе сокращается. Таким образом, величины $\hat{a}_{11}, \hat{f}_{11}, \hat{f}_{22}$ инвариантны по отношению к действию элементов из группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E .

Обозначим орбиту точки (a, b, f, g) по отношению к действию группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E через \mathcal{O} . В силу вышесказанного, выражения (1.6) одинаковы для всех точек из \mathcal{O} . Пусть теперь точка (a, b, f, g) удовлетворяет условиям (1.5). Тогда

$$\hat{a}_{11} = \frac{a_{11} + a_{22}}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}} = \frac{a_{11}}{1} = a_{11}.$$

Если $f_{11}^2 + f_{22}^2 \neq 0$, то

$$\begin{aligned}\hat{f}_{11} &= \frac{b^T f b - 2 g a b}{\sqrt{(b^T f b - 2 g a b)^2 + (\det a)^2 (b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2 g a^{-1} b)^2}} = \frac{f_{11}}{\sqrt{f_{11}^2 + f_{22}^2}}, \\ \hat{f}_{22} &= \frac{\det a (b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2 g a^{-1} b)}{\sqrt{(b^T f b - 2 g a b)^2 + (\det a)^2 (b^T (a^{-1})^T f a^{-1} b - 2 g a^{-1} b)^2}} = \frac{f_{22}}{\sqrt{f_{11}^2 + f_{22}^2}},\end{aligned}$$

и в силу $f_{11}^2 + f_{22}^2 = 1$ находим $\hat{f}_{11} = f_{11}$, $\hat{f}_{22} = f_{22}$. В ином случае $\hat{f}_{11} = 0 = f_{11}$, $\hat{f}_{22} = 0 = f_{22}$. Таким образом, $(a, b, f, g) = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{f}, \hat{g})$.

Отсюда следует, что на орбите \mathcal{O} лежит в точности одна точка, удовлетворяющая уравнениям (1.5). Для произвольного представителя $(a, b, f, g) \in \mathcal{O}$ она представляется уравнениями (1.6). Утверждение 1.5 доказано. \square

Следствие: *Существует каноническая биекция между множеством Q и множеством орбит группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E на P .*

Мы будем считать, что уравнения (1.5) задают нормальную форму элементов из P , т.е. точки множества Q — канонические представители орбит группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E .

Если $\hat{f}_{11} = \hat{f}_{22} = 0$, то структура синтеза определяется членами высшего порядка и не является предметом исследования данной работы. Мы рассматриваем только задачи (0.1), (0.2), для которых $\hat{f}_{11}^2 + \hat{f}_{22}^2 \neq 0$. Соответствующие таким задачам четвёрки функций (A, B, F, G) находятся в общем положении. Введём следующие обозначения:

$$Q^* = \{\hat{q} \in Q \mid \hat{f}_{11}^2 + \hat{f}_{22}^2 = 1\}, \quad P^* = \{q \in P \mid \exists \mathbf{g} \in \mathbf{G}/\mathbf{G}_E : \mathbf{g}(q) \in Q^*\}.$$

Утверждение: Q^* гомеоморфно произведению $\mathbf{R} \times S^1$.

Доказательство: Действительно, точка $q \in Q^*$ однозначно определяется величинами $\hat{a}_{11}, \hat{f}_{11}, \hat{f}_{22}$, связанными соотношением $\hat{f}_{11}^2 + \hat{f}_{22}^2 = 1$. Последние два параметра задают точку из S^1 , а для первого параметра имеем $\hat{a}_{11} \in (-2, 2) \cong \mathbf{R}$. \square

Параметр $\hat{a}_{11} = \frac{\text{tr } a}{\sqrt{\det a}}$ определяет скорость закручивания или раскручивания интегральных кривых поля $A(x)$ вокруг фокуса \tilde{x} . Обозначим его через α :

$$\alpha = \frac{\text{tr } a}{\sqrt{\det a}}.$$

Параметризуем окружность S^1 углом ϕ таким образом, что

$$\sin \phi = \hat{f}_{11}, \quad -\cos \phi = \hat{f}_{22}.$$

Величина ϕ имеет следующий смысл. В замечании 1 отмечалось, что прибавлением интеграла от подходящей точной формы к функционалу можно обратить функцию G в нуль, и под интегралом остаётся только некоторая функция F' класса C^2 , не зависящая от управления u .

Утверждение 1.6. *Либо существует такое положительное число c , что $c \sin \phi$ равно второй производной от функции F' в точке \tilde{x} по направлению вектора b , а $-c \cos \phi$ — второй производной по направлению вектора $\sqrt{\det a} a^{-1}b$, либо обе эти производные равны нулю.*

Доказательство: Пусть $\xi(x)$ — такая потенциальная вектор-функция класса C^2 , что $\xi(\tilde{x}) = 0$ и $\langle \xi, B \rangle = -G$. Обозначим симметрическую матрицу $\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tilde{x})$ через ξ_x . Дифференцированием вышестоящего равенства в точке \tilde{x} находим $\sum_{\mu} \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x} B_{\mu} = -\nabla G$, т.е. $b^T \xi_x = -g$. Обозначим матрицу вторых производных $\frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}(\tilde{x})$ через f' . Тогда в силу (1.2) имеем $f' = f + a^T \xi_x + \xi_x a$. Вторые производные функции F' по направлениям b и $\sqrt{\det a} a^{-1}b$ имеют вид

$$b^T f' b = b^T f b + b^T a^T \xi_x b + b^T \xi_x a b = b^T f b + 2b^T \xi_x a b = b^T f b - 2gab,$$

$$\begin{aligned} \det a (a^{-1}b)^T f' a^{-1}b &= \\ &= \det a (b^T (a^{-1})^T f a^{-1}b + b^T (a^{-1})^T a^T \xi_x a^{-1}b + b^T (a^{-1})^T \xi_x a a^{-1}b) = \\ &= \det a (b^T (a^{-1})^T f a^{-1}b + b^T \xi_x a^{-1}b + b^T (a^{-1})^T \xi_x b) = \\ &= \det a (b^T (a^{-1})^T f a^{-1}b - 2ga^{-1}b). \end{aligned}$$

Если обе производные не равны одновременно нулю, то положим

$$c = \sqrt{(b^T f b - 2gab)^2 + (\det a)^2 (b^T (a^{-1})^T f a^{-1}b - 2ga^{-1}b)^2}.$$

Сравнивая с (1.6), находим, что c является искомым положительным числом. \square

Вектор $\sqrt{\det a} a^{-1}b$ имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим определитель $d_{AB} = A_1 B_2 - A_2 B_1$ матрицы, составленной из векторов A и B . Обозначая вектор-строку $(B_2, -B_1)$ через b^T , находим $d_{AB} = b^T A$. Градиент функции d_{AB} в точке \tilde{x} вследствие $A(\tilde{x}) = 0$ имеет вид $\nabla d_{AB} = b^T \nabla A = b^T a$. Производная функции d_{AB} по направлению вектора $\sqrt{\det a} a^{-1}b$, таким образом, принимает вид $b^T a \sqrt{\det a} a^{-1}b = \sqrt{\det a} b^T b = 0$. Следовательно, этот вектор касателен к линии нулевого уровня функции d_{AB} , т.е. к кривой, на которой A и B коллинеарны.

Величины α и ϕ в силу утверждения 1.5 инвариантны по отношению к преобразованиям из группы \mathbf{G}/\mathbf{G}_E , и, таким образом, из \mathbf{G} . Они образуют полную

систему инвариантов множества P^* относительно действия \mathbf{G}/\mathbf{G}_E . Структура синтеза в задаче (0.1),(0.2) в случае общего положения определяется этими двумя параметрами.

2 Классификация нормальных форм класса C^3

Предметом исследования в этой главе являются нормальные формы, полученные в главе 1. Они представляют собой управляемые системы ОДУ на плоскости следующего вида:

$$\dot{x} = A + Bu; \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad u \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

По траекториям системы (2.1) минимизируется функционал

$$J = \int_0^\infty (F(x) + uG(x)) dt \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Терминальным многообразием является начало координат $\tilde{x} = (0, 0)$, причём оно может достигаться за бесконечное время, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{x}$. Управление $u(t)$ предполагается измеримой функцией от времени t . A, B — векторные поля класса C^3 , F, G — скалярные функции класса C^3 . Поле A в начале координат \tilde{x} имеет особенность типа фокуса или центра. Поле B в окрестности \tilde{x} невырождено. Главными членами в разложении Тейлора функций F, G в точке \tilde{x} являются квадратичные формы, т.е. сами функции F, G и их градиенты в \tilde{x} исчезают. Кроме того, выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 \\ 0 & -\cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь $\alpha \in (-2, 2)$ и $\phi \in [0, 2\pi)$ являются параметрами задачи.

Оптимальный синтез задачи (2.1), (2.2) рассматривается в малой окрестности U точки \tilde{x} . Потребуем, чтобы допустимые траектории не выходили за пределы U . Окрестность U в дальнейшем предполагается односвязной.

2.1 Критерий существования синтеза

В исследуемой задаче (2.1), (2.2) ищется измеримая функция управления $u(t)$, минимизирующая функционал (2.2). Но в связи с тем, что интервал интегрирования бесконечен, инфимум J не обязан быть конечным. В этом случае не существует оптимального синтеза. В этом параграфе мы дадим простой критерий, определяющий, конечен $\inf J$ или бесконечен. Мы докажем, что бесконечность $\inf J$ эквивалентна существованию замкнутой допустимой траектории, интеграл $\oint (F + uG) dt$ по которой отрицателен.

Лемма 1: Пусть существуют число $T_* > 0$, точка $x_* \in U$ и измеримая функция $u_* : [0, T_*] \rightarrow [0, 1]$, такие, что траектория системы

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) + B(x(t))u_*(t), \quad x(0) = x_* \quad (2.4)$$

лежит в окрестности U , и $x(T_*) = x(0) = x_*$. Пусть $\int_0^{T_*} (F + u_*G) dt < 0$. Тогда задача оптимального управления (2.1), (2.2) относится к типу III, т.е. оптимального синтеза не существует. Для любой точки $x^0 \in U$ существуют последовательности управлений $\{u_n(t)\}$ и чисел $\{T_n\}$, такие, что для соответствующих траекторий $x_n(t)$ с начальной точкой $x_n(0) = x^0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (F(x_n(t)) + u_n(t)G(x_n(t))) dt = -\infty,$$

и $x_n(t) = \tilde{x} \forall t > T_n$.

Прежде чем приступить к доказательству леммы, докажем следующее свойство достижимости.

Утверждение 2.1. Существует константа такая \bar{T} , что любая точка $x^1 \in U$ достижима из любой точки $x^0 \in U$ по траектории с допустимым кусочно-непрерывным управлением за конечное время $T < \bar{T}$.

Доказательство: Рассмотрим траекторию системы

$$\dot{x} = A + B, \quad x(0) = \tilde{x},$$

т.е. траекторию системы (2.1) с управлением $u = 1$, проходящую через \tilde{x} . Обозначим эту кривую через γ . Параметризуем её временем t ; $\gamma(t) = x(t)$. Пусть $\gamma_+ = \{\gamma(t) | t > 0\}$, $\gamma_- = \{\gamma(t) | t < 0\}$ — две ветки кривой γ , стыкующиеся в \tilde{x} . Пусть $x^0 \in U$ — некоторая начальная точка. Рассмотрим траекторию $\sigma_A(x^0; t)$ системы $\dot{x} = A$, проходящую в момент времени $t = 0$ через точку x^0 . Определим моменты времени пересечения траекторией σ_A кривых γ_-, γ_+ : $T_+(x^0) = \min\{t \geq 0 | \sigma_A(x^0; t) \in \gamma_-\}$, $T_-(x^0) = \max\{t \leq 0 | \sigma_A(x^0; t) \in \gamma_+\}$. Точка \tilde{x} является для системы $\dot{x} = A$ особой точкой типа фокуса или центра. Поэтому в случае $x^0 \neq \tilde{x}$ величины $T_+(x^0)$ и $T_-(x^0)$ определены и конечны. В случае $x^0 = \tilde{x}$ положим $T_+(x^0) = T_-(x^0) = 0$.

Пусть $x^0, x^1 \in U$ — произвольные точки. Мы попадаем из точки x^0 в точку x^1 , применяя следующее кусочно-непрерывное управление $u(t)$: сначала полагаем $u = 0$ и попадаем из x^0 за конечное время $T_+(x^0)$ на кривую γ_- , затем применяем управление $u = 1$ и по γ за конечное время доходим до точки $\sigma_A(x^1; T_-(x^1))$, из которой снова с управлением $u = 0$ за конечное время $-T_-(x^1)$ попадаем в точку x^1 .

Время $T(x^0, x^1)$, за которое мы попадаем этим способом из x^0 в x^1 , ограничено. Выберем $\bar{T} > \sup_{x^0, x^1} T(x^0, x^1)$. Утверждение 2.1 доказано. \square

Доказательство леммы 1: Траекторией системы (2.4) является замкнутый контур l , который обходится за время T_* . Справедливо неравенство $\oint_l (F + u_*G) dt < 0$.

Построим последовательность $\{u_n(t)\}$. Сначала, применяя построенное в утверждении 2.1 кусочно-непрерывное управление, движемся из начальной точки x^0 в точку x_* . Затем n раз обходим контур l , применяя управление u_* , а затем движемся из x_* в точку \tilde{x} , т.е. на терминальное многообразие, на которое в конечном итоге попадаем за конечное время T_n . Значения функционала $\int_0^{T_n} (F + uG) dt$ образуют убывающую арифметическую прогрессию, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_n} (F + uG) dt = -\infty$. При $t > T_n$ применим управление $u(t) = 0$. С этим управлением фазовая точка остаётся в точке \tilde{x} и, вследствие $F(\tilde{x}) = G(\tilde{x}) = 0$, не даёт прирост функционалу. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} (F + uG) dt = -\infty$. Лемма 1 доказана. \square

Верно и обратное утверждение.

Лемма 2: Пусть для некоторой точки x^0 (и таким образом и для любой точки из U) существуют последовательности управлений $\{u_n(t)\}$ и чисел $\{T_n\}$, такие, что для соответствующих траекторий $x_n(t)$ с начальной точкой $x_n(0) = x^0$ имеет место

$$x_n(T_n) = \tilde{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_n} (F(x_n(t)) + u_n(t)G(x_n(t))) dt = -\infty.$$

Тогда существуют замкнутый, гомеоморфный S^1 или вырожденный в точку контур l и соответствующее допустимое управление $u_*(t)$, при применении которого фазовая точка движется по l , такие, что l обходится за конечное время и $\oint_l (F + uG) dt < 0$.

Доказательство: Выберем такое $n \in \mathbf{N}$, что

$$\int_0^{T_n} (F + u_n G) dt < -(\sup_{x \in U} |F(x)| + \sup_{x \in U} |G(x)|) \bar{T}.$$

Здесь \bar{T} — константа из утверждения 2.1. Рассмотрим следующее управление. Начиная с точки x^0 , применяем управление u_n и за время T_n доходим до \tilde{x} . Затем за время T , в силу утверждения 2.1 меньшее, чем \bar{T} , возвращаемся из \tilde{x} в x^0 . Имеем

$$\int_0^{T_n+T} (F + uG) dt \leq \int_0^{T_n} (F + uG) dt + T(\sup_{x \in U} |F(x)| + \sup_{x \in U} |G(x)|) < 0.$$

Полученный замкнутый контур l' в общем случае самопересекающийся. Но такой контур можно разложить на контура, гомеоморфные S^1 , и вырожденные контура, состоящие только из одной точки. Каждый из этих контуров по отдельности можно обойти с допустимым управлением за конечное время, не превосходящее $T_n + T$. Так как $\oint_{l'} (F + uG) dt < 0$, среди них найдётся по крайней мере один контур l , для которого $\oint_l (F + uG) dt < 0$. Лемма 2 доказана. \square

Лемма 3: Множество точек окрестности U , в которых вектора A и B коллинеарны, представляет собой кривую γ_{AB} класса C^3 . γ_{AB} содержит точку \tilde{x} и в ней касается оси Ox_2 . \tilde{x} разделяет кривую γ_{AB} на две ветки, γ_{AB}^- и γ_{AB}^+ . На γ_{AB}^- имеем $x_2 < 0$; на этой ветке вектора A и B антипараллельны. На γ_{AB}^+ имеем $x_2 > 0$ и A, B параллельны. Кривая γ_{AB} является нулевым уровнем функции $d_{AB} = A_1B_2 - A_2B_1$. Градиент функции d_{AB} в окрестности U невырожденный, и кривая γ_{AB} делит U на две области, в которых $d_{AB} > 0$ и $d_{AB} < 0$ соответственно.

Доказательство: Вектора A и B коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель $d_{AB} = A_1B_2 - A_2B_1$ составленной из них матрицы равен нулю. Поэтому кривая γ_{AB} есть линия нулевого уровня функции d_{AB} . На ней в частности лежит точка \tilde{x} . Вычислим градиент функции d_{AB} в \tilde{x} .

$$\nabla d_{AB}(\tilde{x}) = -(\nabla A_2)B_1(\tilde{x}) = (1, 0). \quad (2.5)$$

Из теоремы о неявной функции следует, что кривая γ_{AB} принадлежит классу C^3 и в точке \tilde{x} касается оси Ox_2 . Остальные утверждения леммы следуют из неравенства $\frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\tilde{x}) > 0$. \square

Лемма 1 позволяет установить, для каких значений параметров α, ϕ не существует оптимального синтеза для задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2.1. Пусть дана задача (2.1), (2.2). Если $\cos \phi > 0$, то $\inf J = -\infty$ и оптимального синтеза не существует.

Доказательство: Рассмотрим кривую γ_{AB} и вычислим на ней главную, квадратичную часть функции F . В силу леммы 3 кривую γ_{AB} в окрестности \tilde{x} можно параметризовать переменной x_2 . Разложим ограничение функции F на кривую γ_{AB} в ряд Тейлора в точке \tilde{x} . Первая производная $\frac{dF}{dx_2}$ в силу леммы 3 равна $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\tilde{x}) = 0$, так как вектор $\frac{\partial}{\partial x_2}$ касателен к кривой γ_{AB} . По той же причине имеем для второй производной

$$\frac{d^2F}{dx_2^2}(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\tilde{x}) = -\cos \phi.$$

Следовательно, имеем $F = -\frac{\cos \phi}{2}x_2^2 + O(x_2^3)$ на кривой γ_{AB} . Рассмотрим функцию $\chi = F - \frac{A_1}{B_1}G$. В силу соотношений (2.3) и леммы 3 имеем на кривой γ_{AB} : $A_1 = x_2 + O(x_2^2)$, $B_1 = 1 + O(x_2)$. Следовательно, $-\frac{A_1}{B_1} = -x_2 + O(x_2^2)$, $-\frac{A_1}{B_1}G = O(x_2^3)$ и на кривой γ_{AB} имеем

$$\chi = F - \frac{A_1}{B_1}G = -\frac{\cos \phi}{2}x_2^2 + O(x_2^3). \quad (2.6)$$

Рассмотрим точку \bar{x} на ветке γ_{AB}^- и зададим в ней управление $u_0 = -\frac{A_1}{B_1}$. Если точка \bar{x} достаточно близка к \tilde{x} , то $u_0 = -x_2 + O(x_2^2)$ лежит в интервале допустимых управлений $[0, 1]$. Тогда $\dot{x}_1 = A_1 + u_0 B_1 = 0$, $\dot{x}_2 = A_2 + u_0 B_2 = -\frac{1}{B_1} d_{AB} = 0$ и фазовая точка с этим управлением может неограниченно долго находиться в \bar{x} . Значение подинтегральной функции $F + uG$ функционала (2.2) в точке \bar{x} с управлением u_0 равно χ . Имеем $\cos \phi > 0$, и для точки \bar{x} , достаточно близкой к \tilde{x} , имеем $F + u_0 G = -\frac{\cos \phi}{2} x_2^2 + O(x_2^3) < 0$. Таким образом выполнены условия леммы 1, при этом контур l вырожден в точку \bar{x} . Применение леммы 1 завершает доказательство. \square

2.2 Вспомогательные утверждения

Предоставим некоторые вспомогательные средства из математического анализа.

Пусть $F : \mathbf{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbf{R}$ аналитическая функция, определённая в некоторой окрестности D нуля $(x, y) = (0, 0)$. Пусть $F(0, 0) = 0$, $\nabla F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 0) = -c$, где $c > 0$ некоторое число. Пусть в пересечении любой окрестности нуля с правой полуплоскостью $\{x > 0\}$ существуют точки, в которых $F > 0$.

Утверждение 2.2. *Множество точек, в которых выполняется $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, в окрестности точки $(0, 0)$ представляет собой кривую ρ_{max} , задаваемую аналитической функцией $y = \chi(x)$, при этом $\chi(0) = 0$. Множество точек, в которых $F = 0$, в правой полуплоскости представляет собой пару кривых ρ_v, ρ_n , которые задаются функциями $y = \chi_v(x), y = \chi_n(x)$. Функции χ_n, χ_v аналитичны при $x > 0$ и раскладываются в ряд по степеням \sqrt{x} . При этом $\chi_v(x) > \chi(x) > \chi_n(x)$ для всех $x > 0$.*

Доказательство: Существование и единственность кривой ρ_{max} следует из теоремы о неявной функции [27]. Обозначим аналитическую функцию $F(x, \chi(x))$ через F_{max} . В силу условий утверждения она положительна при $x > 0$.

Проведём аналитическую замену координат в окрестности нуля. Пусть новые координаты задаются уравнениями $x^* = x$, $y^* = y - \chi(x)$. Имеем

$$\frac{\partial(x^*, y^*)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{d\chi}{dx} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d\chi}{dx} & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в системе координат (x^*, y^*) градиент функции F принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial x^*} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d\chi}{dx}, \quad \frac{\partial F}{\partial y^*} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Заметим, что кривая ρ_{max} переходит в ось Ox^* , поэтому производная $\frac{\partial F}{\partial y^*} = \frac{\partial F}{\partial y}$ тождественно равна нулю на этой оси. Отсюда следует, что в разложении

Тейлора функции F в точке \tilde{x} в новой системе координат отсутствуют члены вида $(x^*)^k y^*$. Таким образом, $F(x^*, y^*) = -(y^*)^2 f_1(x^*, y^*) + f_2(x^*)$, где f_1, f_2 — аналитические функции. Обратим внимание на то, что $f_2 = F_{max}$ и $f_1(0, 0) = c$. Таким образом, функции χ_H, χ_V задаются равенством $F_{max} = (y^*)^2 f_1(x^*, y^*)$.

Проведём в правой полуплоскости $\{x^* \geq 0\}$ ещё одну замену координат. Пусть $x^{**} = \sqrt{x^*}, y^{**} = y^*$. Подставим эти соотношения в степенные ряды функций F_{max} и f_1 , заменив x^* на $(x^{**})^2$. В разложениях этих функций по новым координатам переменная x^{**} появляется только в чётной степени, причём старший коэффициент в разложении F_{max} и нулевой коэффициент $f_1(0, 0) = c$ в разложении f_1 положительны. Поэтому корень $\sqrt{F_{max}}$ является аналитической функцией от переменной x^{**} , а $\sqrt{f_1}$ — аналитической функцией от x^{**}, y^{**} .

Имеем $\sqrt{F_{max}(x^{**})} = |y^{**}| \sqrt{f_1(x^{**}, y^{**})} = \pm y^{**} \sqrt{f_1(x^*, y^*)}$. Знак $+$ относится к верхней полуплоскости $\{y^{**} > 0\}$, т.е. к функции χ_V , а знак $-$ — к функции χ_H . Имеем $\frac{\partial}{\partial y^{**}} (\sqrt{F_{max}} \mp y^{**} \sqrt{f_1})(0, 0) = \mp \sqrt{f_1(0, 0)} = \mp \sqrt{c} \neq 0$. Отсюда вытекает по теореме о неявной функции, что χ_V и χ_H , задаваемые как функции $y^{**} = y^{**}(x^{**})$, являются аналитическими. Переходя снова к системе координат (x^*, y^*) , находим, что они задаются как степенные ряды от $\sqrt{x^*}$. В исходных координатах (x, y) к ним прибавляется ещё аналитическая функция χ . Таким образом, функции χ_V, χ_H в этих координатах также задаются степенными рядами по \sqrt{x} .

При $x > 0$ замена $x \leftrightarrow \sqrt{x}$ аналитична, поэтому функции $\chi_V(x), \chi_H(x)$ аналитичны при $x > 0$. \square

Пусть Z — векторное поле. Через D_Z обозначим производную $\langle Z, \nabla \rangle$ по направлению Z . Для дифференцируемых векторных полей Y, Z обозначим скобку Ли как обычно через $[Y, Z] = D_Y Z - D_Z Y$.

Обозначим через r, φ полярные координаты на фазовой плоскости, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$.

Определим следующие порядковые соотношения.

Определение: Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ — множество, $f, w : D \rightarrow \mathbf{R}$ — отображения. Будем говорить, что величина f имеет порядок w , в обозначениях $f = \theta(w)$, если найдётся такое число $c > 0$, что для всех точек из $s \in D$ имеет место $|f(s)| < c|w(s)|$. Будем говорить также, что величина f имеет строго порядок w , в обозначениях $f = \Theta(w)$, если найдутся такие числа $a \geq b > 0$, что для всех $s \in D$ имеет место

$$\begin{aligned} a w(s) &\leq f(s) \leq b w(s), & \text{если } w \leq 0; \\ a w(s) &\geq f(s) \geq b w(s), & \text{если } w \geq 0. \end{aligned}$$

Координаты x_1, x_2 и радиус r служат малыми параметрами разложения, по

отношению к которым определяются главные члены рассматриваемых функций.

Утверждение 2.3. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ — окрестность нуля, $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ — функция класса C^k , $k > 0$. Пусть функция $f(x)$ имеет порядок $\theta(|x|^l)$, $l \in \mathbf{N}_+$, $l \leq k$. Тогда производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ на любом заданном наперёд компакте $D_0 \subset D$ имеют порядок $\theta(|x|^{l-1})$.

Доказательство: В начале координат все производные функции f до порядка $l - 1$ включительно равны нулю, иначе не выполнено соотношение $f = \theta(|x|^l)$. Следовательно, в нуле все производные функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ до порядка $l - 2$ включительно равны нулю. Но функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ принадлежит классу C^{l-1} . Разлагая по формуле Тейлора в нуле, находим, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ состоит только из остаточного члена. Последний имеет порядок $\theta(|x|^{l-1})$, так как производные порядка $l - 1$ на компакте D_0 ограничены. \square

В силу того, что $\alpha \in (-2, 2)$, имеем

$$A_1 x_2 - A_2 x_1 = x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + x_2^2 + \theta(r^3) = \Theta(r^2). \quad (2.7)$$

Введём ещё одну систему координат с переменными x_1, ζ , где $\zeta = -\frac{x_2}{x_1}$. Функция ζ определена всюду, кроме оси Ox_2 . Имеем

$$\frac{\partial(x_1, \zeta)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x_2}{x_1^2} & -\frac{1}{x_1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, \zeta)} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение: Пусть $\zeta_\alpha, \zeta_\beta \in \mathbf{R}$ — некоторые числа. Тогда система координат x_1, ζ невырождена на множестве $\{x \in U \mid x \neq \tilde{x}, \zeta(x) \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]\}$.

Доказательство: На рассматриваемом множестве $x_1 = \pm\Theta(r) \neq 0$, и якобиан замены координат x_1, x_2 на x_1, ζ невырожден. \square

Утверждение 2.4. Пусть $k \geq 1$ — целое число. Величины $\bar{x}_1 = |x_1|^{\frac{1}{k}}, \zeta$ являются аналитическими функциями от величин $\bar{r} = r^{\frac{1}{k}}, \varphi$. При $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi)$ переменные \bar{r}, φ являются аналитическими функциями от \bar{x}_1, ζ , и эта замена локально взаимно-однозначна.

Доказательство: Имеем $\cos \varphi \neq 0$, и

$$\bar{x}_1 = \bar{r} \sqrt[k]{|\cos \varphi|}, \quad \zeta = -\frac{x_2}{x_1} = -\operatorname{tg} \varphi,$$

откуда следует первая часть утверждения. Далее,

$$\frac{\partial(\bar{x}_1, \zeta)}{\partial \text{barr}, \varphi} = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{|\cos \varphi|} & -\text{sgn}(\cos \varphi) \frac{1}{k} \bar{r} \sin \varphi (|\cos \varphi|)^{\frac{1}{k}-1} \\ 0 & -\frac{1}{\cos^2 \varphi} \end{pmatrix}.$$

При $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi)$ эта матрица обратима, что доказывает вторую часть утверждения. \square

Утверждение 2.5. Пусть в окрестности D точки (x_0, y_0) определена аналитическая функция $f : \mathbf{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbf{R}^2, f : (x, y) \mapsto (f^x(x, y), f^y(x, y))$. Пусть справедлива оценка $f^x(x, y) - f^x(x_0, y_0) = \Theta(x - x_0)$. Допустим, что $y_*(x)$ — аналитическая функция, определённая в окрестности точки x_0 , и $y_*(x_0) = y_0$. Тогда множество $f[\{(x, y) \in D \mid y = y_*(x)\}]$ в окрестности точки $(f^x(x_0, y_0), f^y(x_0, y_0))$ является графиком аналитической в окрестности точки $f^x(x_0, y_0)$ функции $y = y'_*(x)$.

Доказательство: Выражения $f^x(x, y_*(x)), f^y(x, y_*(x))$ являются аналитическими функциями от x . В силу оценки $f^x(x, y_*(x)) - f^x(x_0, y_*(x_0)) = \Theta(x - x_0)$ справедливо $\frac{df^x(x, y_*(x))}{dx}(x_0) > 0$, и функция $f^x(x, y_*(x))$ обратима в окрестности точки x_0 . Подставляя обратную функцию в выражение $f^y(x, y_*(x))$, находим искомую аналитическую функцию y'_* . \square

Утверждение 2.6. Допустим, что ρ — непрерывно дифференцируемая кривая на фазовой плоскости, стыкующаяся с точкой \tilde{x} . Пусть на ρ справедлива оценка $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} + \theta(r^{\frac{1}{2}}) = \theta(1)$. Тогда производная $\frac{dx_2}{dx_1}$ на кривой ρ имеет предел при $x \rightarrow \tilde{x}$, и имеет место оценка $\frac{d\zeta}{dx_1} = \theta(\sqrt{r})$.

Доказательство: Параметризуем кривую ρ переменной x_1 . В силу оценки $\frac{x_2}{x_1} = \theta(1)$ имеем $x_1 = \pm \Theta(r)$. Отсюда следует $\frac{dx_2}{dx_1} = \left(\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{x_2}{x_1}\right) \frac{1}{x_1} = \frac{\theta(\sqrt{r})}{\pm \Theta(r)} = \theta(x_1^{-\frac{1}{2}})$, $\frac{d\zeta}{dx_1} = \theta(\sqrt{r})$. Это означает, что существует такая константа $c > 0$, что $\left|\frac{dx_2(x_1)}{dx_1}\right| \leq c x_1^{-\frac{1}{2}}$. Зафиксируем значение \bar{x}_1 . Тогда для любого $x_1 \in (0, \bar{x}_1)$ имеем

$$\left|\frac{x_2(x_1)}{x_1} - \frac{x_2(\bar{x}_1)}{\bar{x}_1}\right| \leq c \int_{|x_1|}^{|\bar{x}_1|} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = 2c(\sqrt{|\bar{x}_1|} - \sqrt{|x_1|}) < 2c\sqrt{|\bar{x}_1|}.$$

Следовательно,

$$\frac{x_2(x_1)}{x_1} \in \left(\frac{x_2(\bar{x}_1)}{\bar{x}_1} - 2c\sqrt{|\bar{x}_1|}, \frac{x_2(\bar{x}_1)}{\bar{x}_1} + 2c\sqrt{|\bar{x}_1|}\right).$$

При $\bar{x}_1 \rightarrow 0$ длина этого интервала стремится к нулю. Отсюда вытекает, что $\frac{x_2}{x_1}$ как функция от x_1 имеет предел при $x_1 \rightarrow 0$. Но тогда в силу условий утверждения производная $\frac{dx_2}{dx_1}$ также имеет предел. \square

Утверждение 2.7. Пусть ρ — непрерывно кривая на фазовой плоскости, стыкующаяся с точкой \tilde{x} . Пусть производная $\frac{dx_2}{dx_1}$ на ρ имеет конечный предел $l_* \neq 0$ при подходе к \tilde{x} . Тогда в окрестности точки \tilde{x} справедливы следующие утверждения.

1. Если ρ расположена в верхней полуплоскости, то поток траекторий системы $\dot{x} = A$, выходящих из точек кривой ρ , и поток траекторий системы $\dot{x} = A + B$, входящих в точки кривой ρ , не пересекаются друг с другом.

2. Если ρ расположена в нижней полуплоскости, то поток траекторий системы $\dot{x} = A$, входящих в точки кривой ρ , и поток траекторий системы $\dot{x} = A + B$, входящих в точки кривой ρ , не пересекаются друг с другом.

Доказательство: Имеем $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} + o(1)$, поэтому нормаль к кривой ρ выражается в виде $n = (-x_2 + o(r), x_1)$. Тогда $\text{sgn}\langle A, n \rangle = \text{sgn}(-A_1x_2 + A_2x_1 + o(r^2)) = -1$, $\text{sgn}\langle A + B, n \rangle = \text{sgn}(-x_2 + o(r)) = -\text{sgn}x_2$. Следовательно, траектории систем $\dot{x} = A$ и $\dot{x} = A + B$ трансверсально подходят к ρ с одной и той же стороны, если $x_2 > 0$, и с противоположных сторон, если $x_2 < 0$. \square

2.3 Лемма о гиперболической точке

Известно [1], что диффеоморфизм многообразия в окрестности гиперболической неподвижной точки топологически эквивалентен своей линеаризации вокруг этой точки. В частности, существуют два инвариантных подмногообразия, которые называются устойчивым и неустойчивым усами. Более того, степень гладкости этих подмногообразий равна степени гладкости исходного диффеоморфизма [56].

Следующая лемма задаёт более слабые достаточные условия существования дифференцируемых инвариантных подмногообразий в окрестности неподвижной точки у отображения плоскости в себя. В частности, не требуется дифференцируемости отображения во всей окрестности неподвижной точки. Тем не менее, основные идеи доказательства в [56] переносятся и на наш случай.

Лемма (о гиперболической точке): Пусть $M = \{(x, y) \mid x \in (0, c], y \in [a, b]\} \subset \mathbf{R}^2$ — прямоугольное множество на плоскости, $c > 0$, $a < b$ — некоторые числа. Пусть $f = (f^x, f^y) : M \rightarrow \mathbf{R}_+ \times [a, b]$ — дифференцируемая функция. Предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^x(x, y) = 0 \quad \forall y \in [a, b], \quad (2.8)$$

и пусть существует такая константа $L > 0$, что выполнены неравенства

$$f_x^x \geq 1 + L\|f_y^x\|, \quad (2.9)$$

$$\frac{|f_x^y|}{f_x^x} < L(1 - L\|f_y^x\| - \|f_y^y\|), \quad (2.10)$$

где под нормой подразумевается C^0 -норма. Верхние индексы обозначают компоненты функции f , нижние — частные производные. Тогда существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $\gamma : (0, c] \rightarrow [a, b]$, липшицевая с константой L , график которой $\Gamma(\gamma) = \{(x, \gamma(x)) \mid x \in (0, c]\} \subset M$ переходит в себя при отображении f .

Доказательство: Пусть выполнены условия леммы. Обозначим через M_L множество липшицевых с константой L функций $\gamma : (0, c] \rightarrow [a, b]$, т.е.

$$|\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in (0, c]. \quad (2.11)$$

M_L является полным метрическим пространством с метрикой, индуцированной C^0 -нормой.

Пусть $\gamma \in M_L$. Рассмотрим функцию $f^x(x, \gamma(x))$. Для любых $x_1, x_2 \in (0, c]$, $x_2 \geq x_1$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} & f^x(x_2, \gamma(x_2)) - f^x(x_1, \gamma(x_1)) \\ &= f^x(x_2, \gamma(x_2)) - f^x(x_2, \gamma(x_1)) + f^x(x_2, \gamma(x_1)) - f^x(x_1, \gamma(x_1)) = \\ &= \int_{\gamma(x_1)}^{\gamma(x_2)} f_y^x(x_2, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} f_x^x(x, \gamma(x_1)) dx \geq \\ &\geq -\|f_y^x\| |\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| + (1 + L\|f_y^x\|)(x_2 - x_1) \geq x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Предпоследнее неравенство справедливо в силу (2.9), а последнее в силу (2.11). Отсюда следует, что $f^x(x, \gamma(x))$ является строго возрастающей функцией от x . При этом для любого $x \in (0, c]$ справедливо $f^x(x, \gamma(x)) \geq x$, иначе мы приходим к противоречию с неравенством $f^x > 0$.

Обозначим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x)$ через y^* . Тогда в силу (2.8) и вследствие ограниченности производной f_y^x имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f^x(x, \gamma(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} (f^x(x, \gamma(x)) - f^x(x, y^*) + f^x(x, y^*)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f_y^x(x, \theta)(\gamma(x) - y^*) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\theta \in [\gamma(x), y^*]$ — промежуточная точка. Таким образом, образ интервала $(0, c]$ при отображении $f^x(x, \gamma(x))$ для фиксированного $\gamma \in M_L$ содержит интервал $(0, c]$. Следовательно, для любого $\gamma \in M_L$ существует обратная функция

$g_\gamma : (0, c'] \rightarrow (0, c]$, где $c' = f^x(c, \gamma(c)) \geq c$. Из (2.12) следует, что g_γ является липшицевой функцией с константой 1.

Определим оператор $\bar{f} : M_L \rightarrow C^0((0, c'], [a, b])$, сопоставляющий каждой функции $\gamma \in M_L$ непрерывную функцию $\bar{\gamma} = \bar{f}(\gamma)$. Эта функция определена как $\bar{\gamma}(x) = f^y(g_\gamma(x), \gamma(g_\gamma(x)))$. Отображение \bar{f} переводит точку $(x, \gamma(x))$ в точку $(f^x(x, \gamma(x)), \bar{\gamma}(f^x(x, \gamma(x))))$. Это означает, что \bar{f} переводит график $\Gamma(\gamma)$ в график $\Gamma(\bar{\gamma})$. Покажем, что ограничение функции $\bar{\gamma}$ на интервал $(0, c]$ принадлежит множеству M_L . Пусть $x_1, x_2 \in (0, c]$. Используя (2.10), (2.11) и липшицевость функции g_γ , получаем оценку

$$\begin{aligned}
& |\bar{\gamma}(x_2) - \bar{\gamma}(x_1)| = |f^y(g_\gamma(x_2), \gamma(g_\gamma(x_2))) - f^y(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_1)))| \leq \\
& \leq |f^y(g_\gamma(x_2), \gamma(g_\gamma(x_2))) - f^y(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_2)))| + \\
& + |f^y(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_2))) - f^y(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_1)))| = \\
& = \left| \int_{g_\gamma(x_1)}^{g_\gamma(x_2)} f_x^y(x, \gamma(g_\gamma(x_2))) dx \right| + \left| \int_{\gamma(g_\gamma(x_1))}^{\gamma(g_\gamma(x_2))} f_y^y(g_\gamma(x_1), y) dy \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{g_\gamma(x_1)}^{g_\gamma(x_2)} L(1 - L\|f_y^x\| - \|f_y^y\|) f_x^x(x, \gamma(g_\gamma(x_2))) dx \right| + \\
& + |\gamma(g_\gamma(x_2)) - \gamma(g_\gamma(x_1))| \|f_y^y\| \leq \\
& \leq L(1 - L\|f_y^x\| - \|f_y^y\|) |f^x(g_\gamma(x_2), \gamma(g_\gamma(x_2))) - f^x(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_2)))| + \\
& + L\|f_y^y\| |g_\gamma(x_2) - g_\gamma(x_1)| \leq \\
& \leq L(1 - L\|f_y^x\| - \|f_y^y\|) |f^x(g_\gamma(x_2), \gamma(g_\gamma(x_2))) - f^x(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_1)))| + \\
& + L|f^x(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_1))) - f^x(g_\gamma(x_1), \gamma(g_\gamma(x_2)))| + L\|f_y^y\| |x_2 - x_1| \leq \\
& \leq L(1 - L\|f_y^x\| - \|f_y^y\|) |x_2 - x_1| + L\|f_y^x\| L|x_2 - x_1| + L\|f_y^y\| |x_2 - x_1| = \\
& = L|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Сопоставляя каждому $\gamma \in M_L$ ограничение $\hat{\gamma}$ функции $\bar{\gamma} = \bar{f}(\gamma)$ на $(0, c]$, задаём оператор $\hat{f} : M_L \rightarrow M_L$. Ищем его неподвижные точки. Покажем, что оператор \hat{f} является сжимающим с константой $K = L\|f_y^x\| + \|f_y^y\| < 1$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in M_L$, а $\hat{\gamma}_1 = \hat{f}(\gamma_1), \hat{\gamma}_2 = \hat{f}(\gamma_2)$ — их образы, $\hat{x}_0 \in (0, c]$ — произвольная точка.

Обозначим $g_{\gamma_1}(\hat{x}_0)$ через x_0 . Имеем

$$\begin{aligned}
& |\hat{\gamma}_2(\hat{x}_0) - \hat{\gamma}_1(\hat{x}_0)| \leq \\
& \leq |\hat{\gamma}_2(\hat{x}_0) - \hat{\gamma}_2(f^x(x_0, \gamma_2(x_0)))| + |f^y(x_0, \gamma_2(x_0)) - f^y(x_0, \gamma_1(x_0))| \leq \\
& \leq L|f^x(x_0, \gamma_1(x_0)) - f^x(x_0, \gamma_2(x_0))| + \left| \int_{\gamma_1(x_0)}^{\gamma_2(x_0)} f_y^y(x_0, y) dy \right| \leq \\
& \leq L \left| \int_{\gamma_1(x_0)}^{\gamma_2(x_0)} f_y^x(x_0, y) dy \right| + |\gamma_2(x_0) - \gamma_1(x_0)| \|f_y^y\| \leq \\
& \leq L|\gamma_2(x_0) - \gamma_1(x_0)| \|f_y^x\| + |\gamma_2(x_0) - \gamma_1(x_0)| \|f_y^y\| = \\
& = K|\gamma_2(x_0) - \gamma_1(x_0)| \leq Kd(\gamma_2, \gamma_1). \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Здесь d обозначает расстояние в метрике C^0 . В силу произвольности \hat{x}_0 имеем

$$d(\hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_1) = \sup_{\hat{x}_0 \in (0, c]} |\hat{\gamma}_2(\hat{x}_0) - \hat{\gamma}_1(\hat{x}_0)| \leq Kd(\gamma_2, \gamma_1).$$

По теореме Банаха о неподвижной точке существует ровно одна функция $\gamma^*(x) \in M_L$, переходящая в себя при отображении \hat{f} .

Докажем, что она принадлежит классу C^1 . Рассмотрим пространство C_L непрерывных функций $\gamma' : (0, c] \rightarrow [-L, L]$, ограниченных по модулю константой L . Определим отображение $\hat{f}' : M_L \times C_L \rightarrow M_L \times C_L$, $\hat{f}' : (\gamma, \gamma') \mapsto (\hat{\gamma}, \hat{\gamma}')$, где функция $\hat{\gamma}' \in C_L$ задаётся соотношением

$$\hat{\gamma}'(x) = \frac{f_y^y(g_\gamma(x), \gamma(g_\gamma(x))) + \gamma'(g_\gamma(x)) f_y^y(g_\gamma(x), \gamma(g_\gamma(x)))}{f_x^x(g_\gamma(x), \gamma(g_\gamma(x))) + \gamma'(g_\gamma(x)) f_y^x(g_\gamma(x), \gamma(g_\gamma(x)))},$$

$x \in (0, c]$. Функция $\hat{\gamma}'$ действительно принадлежит множеству C_L , так как в силу (2.9) и (2.10) имеем

$$|\hat{\gamma}'(x)| \leq \frac{|f_y^y| + L\|f_y^y\|}{f_x^x - L\|f_y^x\|} < L \frac{f_x^x - f_x^x(L\|f_y^x\| + \|f_y^y\|) + \|f_y^y\|}{f_x^x - L\|f_y^x\|} \leq L.$$

Допустим, что $\gamma \in M_L$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\hat{f}'(\gamma, \frac{d\gamma}{dx})$ равно $(\hat{\gamma}, \frac{d\hat{\gamma}}{dx})$. Действительно,

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dx}(g_\gamma^{-1}(x)) = \frac{\frac{f^y(x, \gamma(x))}{dx}}{\frac{g_\gamma^{-1}(x)}{dx}} = \frac{f_x^y + \frac{d\gamma}{dx} f_y^y}{f_x^x + \frac{d\gamma}{dx} f_y^x}.$$

Покажем, что вторая компонента оператора \hat{f}' сжимает пространство C_L на константу K . Пусть $\gamma \in M_L$, $\gamma'_1, \gamma'_2 \in C_L$, $\hat{f}'(\gamma, \gamma'_1) = (\hat{\gamma}, \hat{\gamma}'_1)$, $\hat{f}'(\gamma, \gamma'_2) = (\hat{\gamma}, \hat{\gamma}'_2)$.

Тогда в силу (2.9) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned}
& |\hat{\gamma}'_2(g_\gamma^{-1}(x)) - \hat{\gamma}'_1(g_\gamma^{-1}(x))| \leq \\
& \leq \left| \frac{f'_x(x, \gamma(x)) + \gamma'_2(x)f'_y(x, \gamma(x))}{f_x(x, \gamma(x)) + \gamma'_2(x)f_y(x, \gamma(x))} - \frac{f'_x(x, \gamma(x)) + \gamma'_1(x)f'_y(x, \gamma(x))}{f_x(x, \gamma(x)) + \gamma'_1(x)f_y(x, \gamma(x))} \right| = \\
& = \frac{|(\gamma'_2(x) - \gamma'_1(x))(f_x(x, \gamma(x))f'_y(x, \gamma(x))) - f'_x(x, \gamma(x))f_y(x, \gamma(x))|}{(f_x(x, \gamma(x)) + \gamma'_2(x)f_y(x, \gamma(x)))(f_x(x, \gamma(x)) + \gamma'_1(x)f_y(x, \gamma(x)))} \leq \\
& \leq \|\gamma'_2 - \gamma'_1\| \frac{f_x \|f'_y\| + \|f'_x\| \|f_y\|}{(f_x - L\|f_y\|)^2} \leq \\
& \leq \|\gamma'_2 - \gamma'_1\| \frac{f_x(\|f'_y\| + L\|f_y\|(1 - L\|f'_y\| - \|f_y\|))}{f_x(1 + L\|f_y\|) - 2f_x L\|f_y\|} = \\
& = \|\gamma'_2 - \gamma'_1\| \frac{(\|f'_y\| + L\|f_y\|)(1 - L\|f'_y\|)}{1 - L\|f_y\|} = K\|\gamma'_2 - \gamma'_1\|.
\end{aligned}$$

Если x пробегает интервал $(0, c]$, то $g_\gamma^{-1}(x)$ пробегает интервал $(0, c']$, содержащий $(0, c]$. Поэтому $\|\hat{\gamma}'_2 - \hat{\gamma}'_1\| \leq K\|\gamma'_2 - \gamma'_1\|$, и вторая компонента \hat{f}' сжимающая с константой $K < 1$.

Следующее утверждение доказано в [56]:

Пусть X, Y — метрические пространства. Допустим, что отображение $f : X \rightarrow X$ обладает притягивающей неподвижной точкой p (т.е. $\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$). Пусть $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$, $F : (x, y) \mapsto (f(x), g_x(y))$ такое непрерывное отображение, что $q \in Y$ — неподвижная точка отображения g_p , отображения g_x липшицевы с константами $Lip(g_x)$, и $\limsup_{n \rightarrow \infty} Lip(g_x) < 1$ для всех $x \in X$. Тогда (p, q) является притягивающей неподвижной точкой отображения F .

В нашем случае \limsup не превышает K , поэтому утверждение применимо и оператор \hat{f}' имеет притягивающую неподвижную точку $(\gamma^*, \gamma^{*'})$ в множестве $M_L \times C_L$. Пусть $\gamma \in M_L$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда последовательность $\{(\hat{f}')^n(\gamma, \frac{d\gamma}{dx})\}$ стремится к точке $(\gamma^*, \gamma^{*'})$. Но $(\hat{f}')^n(\gamma, \frac{d\gamma}{dx}) = (\hat{f}^n(\gamma), \frac{d\hat{f}^n(\gamma)}{dx})$. Таким образом, $\hat{f}^n(\gamma) \rightarrow \gamma^*$ равномерно, а $\frac{d\hat{f}^n(\gamma)}{dx} \rightarrow \gamma^{*'}$. Отсюда следует, что функция γ^* непрерывно дифференцируема, и $\frac{d\gamma^*}{dx} = \gamma^{*'}$. Лемма доказана. \square

Пусть отображение f удовлетворяет условиям леммы о гиперболической точке. Тогда справедливо соотношение $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \gamma^*(x)) = (0, \lim_{x \rightarrow 0} \gamma^*(x))$. В этом смысле отображение f продолжается в точку $(0, \lim_{x \rightarrow 0} \gamma^*(x))$, и последняя является его неподвижной точкой, в некотором смысле гиперболической.

Докажем ещё одно утверждение, дающее достаточное условие того, что функ-

ция γ^* аналитична. Пусть $n \geq 3$ некоторое натуральное число. Введём новую переменную $\tilde{x} = x^{\frac{1}{n}}$ и отображение $\tilde{f} : (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, y), \tilde{f}^y(\tilde{x}, y)) = (f^x(\tilde{x}^n, y), f^y(\tilde{x}^n, y))$, соответствующее отображению f в координатах \tilde{x}, y . Тогда справедливо соотношение $\lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \tilde{f}(\tilde{x}, \gamma^*(\tilde{x}^n)) = (0, \lim_{x \rightarrow 0} \gamma^*(x))$, и точка $(0, \lim_{x \rightarrow 0} \gamma^*(x))$ является в некотором смысле неподвижной точкой также для отображения f .

Лемма (об аналитичности инвариантной кривой): *Пусть отображение f удовлетворяет условиям леммы о гиперболической точке. Допустим далее, что отображение \tilde{f} продолжается в окрестность точки $(0, \lim_{x \rightarrow 0} \gamma^*(x))$ до аналитической функции, и производная $\frac{\partial \tilde{f}^{\tilde{x}}}{\partial \tilde{x}}$ больше нуля в этой окрестности. Тогда функция $\gamma^*(x)$ продолжается на окрестность нуля до аналитической в этой окрестности функции.*

Доказательство: Здесь и далее мы будем рассматривать функции множества M_L как определённые на интервале $[0, c]$. Это допустимо и при этом множество M_L не сужается, так как в силу липшицевости этих функций существует предел при $x \rightarrow 0$.

В силу вышесказанного точка $(0, \lim_{x \rightarrow 0} \gamma^*(x))$ является неподвижной точкой отображения \tilde{f} . Вследствие условия (2.8) имеем $\tilde{f}^{\tilde{x}}(0, y) \equiv 0$. По лемме Адамара отсюда следует, что соотношение $\frac{\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, y)}{\tilde{x}}$ в рассматриваемой окрестности также продолжается до аналитической функции от \tilde{x}, y . При этом имеем $\frac{\tilde{f}^{\tilde{x}}}{\tilde{x}}(0, y) = \frac{\partial \tilde{f}^{\tilde{x}}}{\partial \tilde{x}}(0, y) > 0$. Сузим окрестность настолько, чтобы $\frac{\tilde{f}^{\tilde{x}}}{\tilde{x}}$ нигде не обращалось в нуль. Тогда обратное соотношение $\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}^{\tilde{x}}}$ также является аналитической функцией от \tilde{x}, y , принимающей положительные значения.

Разложим функции $\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}^{\tilde{x}}}, \tilde{f}^y$ в ряд Тейлора в точке $(0, \gamma^*(0))$. Обозначим разницу $y - \gamma^*(0)$ коротко через \bar{y} .

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}^{\tilde{x}}}(\tilde{x}, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (b_{ij} \tilde{x}^i \bar{y}^j), \quad \tilde{f}^y(\tilde{x}, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (b'_{ij} \tilde{x}^i \bar{y}^j). \quad (2.14)$$

Как отмечалось выше, справедливо неравенство $b_{00} > 0$.

Разобьём доказательство на несколько шагов.

На первом шаге мы докажем, что функция $\gamma^*(x)$ является пределом аналитических функций. В доказательстве леммы о гиперболической точке функция, представляющая инвариантный ус, была построена как предел итеративного процесса в пространстве липшицевых с некоторой константой L функций. Покажем, что, если начальная функция аналитическая, то все последующие функции, получаемые в ходе этого процесса, также будут аналитическими. Другими словами, необходимо доказать, что из аналитичности функции $\gamma(x)$ следует ана-

литичность функции $\hat{\gamma}(x)$. Аналитичность, разумеется, подразумевается также в нуле.

Итак, пусть $\gamma(x) \in M_L$ — аналитическая функция с константой Липшица L . Тогда функции $f^y(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))$ и $\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))$ являются аналитическими по переменной \tilde{x} . Имеем

$$\frac{d\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))}{d\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{f}^{\tilde{x}}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{f}^{\tilde{x}}}{\partial y} \frac{d\gamma(x)}{dx} n\tilde{x}^{n-1}.$$

В силу ограниченности производной $\frac{\partial \tilde{f}^{\tilde{x}}}{\partial y}$ и липшицевости функции $\gamma(x)$ второе слагаемое имеет порядок $\theta(\tilde{x}^{n-1})$, при этом константа перед \tilde{x}^{n-1} в соответствующем неравенстве не зависит от выбора функции $\gamma(x)$. С другой стороны, производная $\frac{\partial \tilde{f}^{\tilde{x}}}{\partial \tilde{x}}$ имеет порядок $\Theta(1)$. Следовательно, можно сузить окрестность точки $(x, y) = (0, \gamma^*(0))$ настолько, что независимо от выбора $\gamma(x)$ имеем $\frac{d\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))}{d\tilde{x}} > 0$, если $(x, \gamma(x))$ лежит в этой окрестности.

По теореме о неявной функции отсюда следует, что \tilde{x} можно представить в виде аналитической функции от $\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))$. В свою очередь, отсюда вытекает, что функция $\tilde{f}^y(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n)) = f^y(x, \gamma(x))$ также аналитична по $\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n)) = f^x(x, \gamma(x))$. Но это означает, что $\hat{\gamma}(x)$ является аналитической функцией.

Итак, функция γ^* является пределом аналитических функций. На втором шаге покажем, приближающую последовательность можно выбрать так, что ряды Тейлора в нуле её членов почленно сходятся к некоторому формальному ряду.

Обратимся к неравенству (2.13):

$$|\hat{\gamma}_2(\hat{x}) - \hat{\gamma}_1(\hat{x})| \leq |\gamma_2(x) - \gamma_1(x)|.$$

Здесь γ_1, γ_2 — две функции с липшицевой константой L , а $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ — их образы при отображении \hat{f} . Допустим, что γ_1, γ_2 аналитические. Имеем $\hat{x} = \tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma_1(\tilde{x}^n)) = \Theta(\tilde{x}) = \Theta(x^{\frac{1}{n}})$, отсюда $x = \Theta(\hat{x}^n)$.

Допустим, что $|\gamma_2(x) - \gamma_1(x)| = \theta(x^k)$ для некоторого числа k . Тогда находим

$$|\hat{\gamma}_2(\hat{x}) - \hat{\gamma}_1(\hat{x})| \leq |\gamma_2(x) - \gamma_1(x)| = \theta(x^k) = \theta(\hat{x}^{nk}).$$

Другими словами, если первые k членов в разложении Тейлора в нуле функций γ_1, γ_2 совпадают, то в разложениях Тейлора функций $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ совпадают первые nk членов.

Выберем начальную функцию γ_0 приближающей последовательности таким образом, что $\gamma_0(0) = \gamma^*(0)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} |\gamma_0(x) - \gamma^*(x)| = 0$. Остальные функции последовательности определим как $\gamma_k = \hat{f}^k(\gamma_0)$. Тогда в силу (2.13) получаем

$\lim_{x \rightarrow 0} |\gamma_1(x) - \gamma^*(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |\gamma_0(x) - \gamma^*(x)| = 0$. Отсюда следует $\gamma_1(0) = \gamma_0(0) = \gamma^*(0)$, и первый член в разложениях Тейлора функций γ_0, γ_1 совпадает. Следовательно, в разложениях Тейлора функций γ_k, γ_{k+1} совпадают первые n^k членов. В частности, начиная с функции γ_k первые n^k членов уже не меняются.

Следовательно, ряды Тейлора в нуле функций γ_k почленно стремятся к некоторому предельному ряду $\sum_i (a_i x^i)$. Обозначим этот ряд через \mathcal{T} .

На третьем шаге доказательства мы докажем, что предельный ряд \mathcal{T} сходится в окрестности нуля, предъявив оценку его радиуса сходимости.

Радиусы сходимости рядов (2.14) больше нуля. Следовательно, существует такая константа $c' > 0$, что для всех i, j , таких, что $i + j \geq 1$, справедливы неравенства $|b_{ij}| < (c')^{i+j}$, $|b'_{ij}| < (c')^{i+j}$. Выберем константу c' настолько большой, чтобы выполнялось неравенство $(1 + \frac{1}{n})(1 + \sqrt{b_{00}})^2 < \frac{(c')^{n-1}}{1+c'}$. Это возможно, потому что в силу $n \geq 3$ правая сторона неравенства при $c' \rightarrow \infty$ неограниченно растёт.

Докажем, что радиус сходимости ряда \mathcal{T} больше, чем $\frac{1+c'}{(c')^n}$. Применим индукцию по коэффициентам a_k ряда \mathcal{T} . Допустим, что $k \geq 1$ и существует такое положительное число $c < \frac{(c')^n}{1+c'}$, что $|a_i| < c^i$ для всех $i = 1, \dots, k-1$. Для $k = 1$ это условие выполнено. Достаточно показать, что тогда существует такое число $\bar{c} < \frac{(c')^n}{1+c'}$, что $|a_k| < \bar{c}^k$.

Положим $\gamma = \sum_{i=0}^{k-1} (a_i x^i) = \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \tilde{x}^{in})$. Построим соответствующую функцию $\hat{\gamma}(x)$. Согласно первому шагу доказательства функция $\hat{\gamma}(x)$ также является аналитичной. Так как в ряде Тейлора функции $\gamma(x)$ первые k членов совпадают с первыми k членами ряда \mathcal{T} , то в ряде функции $\hat{\gamma}(x)$ первые nk членов совпадают с первыми nk членами ряда \mathcal{T} . В частности, коэффициент перед x^k в ряде $\hat{\gamma}(x)$ равен a_k .

Оценим этот коэффициент. По определению, функция $\hat{\gamma}(x)$ следующим образом получается из функции $\gamma(x)$. Подстановкой $y = \gamma(\tilde{x}^n)$ в функции $\tilde{f}^y(\tilde{x}, y)$ и $\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, y)$ мы получаем функции $\hat{\gamma}(\tilde{x})$ и $\hat{x}(\tilde{x})$. Затем последняя функция обращается и подставляется в первую. Результат задаётся рядом Бюрмана-Лагранжа [12]:

$$\hat{\gamma}(\hat{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{d\tilde{x}} \right)^{k-1} \left(\frac{d\tilde{f}^y(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))}{d\tilde{x}} \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))} \right)^k \right) \Big|_{\tilde{x}=0} \hat{x}^k.$$

Обозначим коэффициенты рядов Тейлора функций $\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))}$ и $\tilde{f}^y(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x}^n))$ через ρ_m и ρ'_m , т.е. $\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}^{\tilde{x}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \tilde{x}^m$, $\tilde{f}^y = \sum_{m=0}^{\infty} \rho'_m \tilde{x}^m$. Тогда коэффициент a_k задаётся

формулой

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \left(\frac{d}{d\tilde{x}} \right)^{l+1} \tilde{f}^y(\tilde{x}) \left(\frac{d}{d\tilde{x}} \right)^{k-1-l} \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{f}\tilde{x}(\tilde{x})} \right)^k \Big|_{\tilde{x}=0} = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k \binom{k-1}{l-1} l! \rho'_l \left(\frac{d}{d\tilde{x}} \right)^{k-l} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \tilde{x}^m \right)^k \Big|_{\tilde{x}=0} = \\
&= \sum_{l=1}^k \frac{l}{k} \rho'_l \sum_{m_1+\dots+m_k=k-l} (\rho_{m_1} \cdots \rho_{m_k}) = \\
&= \sum_{m_1+\dots+m_{k+1}=k-1} \left(\frac{m_{k+1}+1}{k} \rho_{m_1} \cdots \rho_{m_k} \cdot \rho'_{m_{k+1}+1} \right).
\end{aligned}$$

Здесь m_i пробегает неотрицательные целые числа.

Разобьём слагаемые на отдельные группы, в которых одинаковое количество чисел из множества $\{m_1, \dots, m_k\}$ равно нулю.

$$a_k = \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k}{\mu+1} \sum_{m_1+\dots+m_{k-\mu}=k} \left(\frac{m_{k-\mu}}{k} \rho_0^{\mu+1} \rho_{m_1} \cdots \rho_{m_{k-\mu-1}} \cdot \rho'_{m_{k-\mu}} \right).$$

Здесь m_i пробегает уже только положительные целые числа.

Коэффициенты ρ_m, ρ'_m находятся из разложений (2.14). Подставляя ряд $\bar{y} = \gamma(x) - \gamma(0) = \sum_{i=1}^{k-1} (a_i x^i) = \sum_{i=1}^{k-1} (a_i \tilde{x}^{in})$ в эти разложения, находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \tilde{x}^m = \sum_{i,j=0}^{\infty} \left(b_{ij} \tilde{x}^i \left(\sum_{q=1}^{k-1} a_q \tilde{x}^{qn} \right)^j \right), \quad \sum_{m=0}^{\infty} \rho'_m \tilde{x}^m = \sum_{i,j=0}^{\infty} \left(b'_{ij} \tilde{x}^i \left(\sum_{q=1}^{k-1} a_q \tilde{x}^{qn} \right)^j \right).$$

Приравниванием коэффициентов получаем

$$\rho_m = \sum_{i,j=0}^{\infty} \left(b_{ij} \sum_{q_1+\dots+q_j=\frac{m-i}{n}} a_{q_1} \cdots a_{q_j} \right).$$

Здесь q_i пробегает целые положительные числа. Очевидно все слагаемые, для которых $m-i \not\equiv 0 \pmod{n}$ или $\frac{m-i}{n} < j$, равны нулю. Отсюда находим

$$\rho_m = b_{m0} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \sum_{i=j}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \left(b_{(m-in)j} \sum_{q_1+\dots+q_j=i} a_{q_1} \cdots a_{q_j} \right).$$

Используя оценки $|b_{ij}| \leq (c')^{i+j}$, $|a_i| < c^i$ и условие $c < \frac{(c')^n}{1+c'}$, находим для $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}
|\rho_m| &\leq (c')^m + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \sum_{i=j}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} (c')^{m-in+j} \binom{i-1}{j-1} c^i = \\
&= (c')^m + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} (c')^{m-in+1} c^i \sum_{j=1}^i \binom{i-1}{j-1} (c')^{j-1} = \\
&= (c')^m + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} (c')^{m-in+1} c^i (1+c')^{i-1} = (c')^m \left(1 + \frac{c'}{1+c'} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \left(\frac{c(1+c')}{(c')^n} \right)^i \right) \\
&< (c')^m \left(1 + \lfloor \frac{m}{n} \rfloor \right) \leq \frac{m+n}{n} (c')^m.
\end{aligned}$$

Для $m = 0$ имеем $\rho_0 = b_{00}$.

Аналогично получаем $|\rho'_m| < \frac{m+n}{n} (c')^m$ при $m \geq 1$. Подставляя эти оценки в выражение для a_k , получаем

$$|a_k| \leq \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k}{\mu+1} \sum_{m_1+\dots+m_{k-\mu}=k} \left(\frac{m_{k-\mu}}{k} b_{00}^{\mu+1} \frac{m_1+n}{n} \dots \frac{m_{k-\mu}+n}{n} (c')^k \right).$$

Оценим произведение $\frac{m_1+n}{n} \dots \frac{m_{k-\mu}+n}{n}$. Сумма множителей равна $\frac{k+n(k-\mu)}{n}$. Известно, что произведение множителей с фиксированной суммой максимально, если все множители равны. Таким образом, находим

$$|a_k| \leq (c')^k \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k}{\mu+1} b_{00}^{\mu+1} \binom{k-1}{k-\mu-1} \left(1 + \frac{k}{n(k-\mu)} \right)^{k-\mu}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + \frac{c}{x})^x$ при $x > 0$. Производная этой функции положительная: $f'(x) = (1 + \frac{c}{x})^x (\ln(1 + \frac{c}{x}) - \frac{\frac{c}{x}}{1+\frac{c}{x}}) > 0$. Поэтому $\left(1 + \frac{k}{n(k-\mu)} \right)^{k-\mu} \leq \left(1 + \frac{k}{nk} \right)^k$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k (c')^k \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k}{\mu+1} \binom{k-1}{\mu} b_{00}^{\mu+1} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k (c')^k \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{\mu+1}{k} \binom{k}{\mu+1}^2 \sqrt{b_{00}^{2(\mu+1)}} \leq \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k (c')^k \left(\sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} \sqrt{b_{00}^{\mu}} \right)^2 = \left(c' \left(1 + \frac{1}{n} \right) (1 + \sqrt{b_{00}})^2 \right)^k.
\end{aligned}$$

В силу выбора константы c' имеем $c' \left(1 + \frac{1}{n}\right) (1 + \sqrt{b_{00}})^2 < \frac{(c')^n}{1+c'}$. Таким образом, константа $\bar{c} = c' \left(1 + \frac{1}{n}\right) (1 + \sqrt{b_{00}})^2$ удовлетворяет неравенствам $\bar{c} < \frac{(c')^n}{1+c'}$ и $|a_k| \leq \bar{c}^k$.

Мы доказали, что ряд \mathcal{T} имеет ненулевой радиус сходимости. Следовательно, он задаёт в окрестности нуля некоторую аналитическую функцию $\gamma_*(x)$. Если применить к этой функции отображение \hat{f} , то результирующая функция $\hat{\gamma}_*(x)$ также аналитическая, и задающий её ряд совпадает с \mathcal{T} . Таким образом, функция γ_* задаёт инвариантную относительно отображения f кривую, которая в силу единственности совпадает с кривой, задающейся функцией γ^* . Следовательно, $\gamma^* = \gamma_*$, и $\gamma^*(x)$ аналитическая. \square

2.4 Особые режимы

Обозначим через ψ сопряжённые переменные, параметризующие слой в пространстве кокасательного расслоения T^*X над фазовой плоскостью X с канонической проекцией $\pi_X : T^*X \rightarrow X$.

Функция Понтрягина системы (2.1), (2.2) аффинна по управлению. Принцип максимума Понтрягина [15] определяет управление в виде

$$u(x, \psi) = \operatorname{argmax}_{u \in [0,1]} H(u, x, \psi) = \operatorname{argmax}_u (H_0(x, \psi) + uH_1(x, \psi)) = \begin{cases} 0 & H_1 < 0 \\ 1 & H_1 > 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$H_0 = -F + \langle \psi, A \rangle, \quad H_1 = -G + \langle \psi, B \rangle. \quad (2.16)$$

Выпишем присоединённую систему. Индекс μ пробегает значения 1, 2.

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \nabla(F + uG) - \sum_{\mu} (\psi_{\mu} \nabla A_{\mu} + u\psi_{\mu} \nabla B_{\mu}) \quad (2.17)$$

Мы не рассматриваем случай, когда множитель Лагранжа перед функционалом равен нулю. Доказательство основано на построении функции Беллмана, которое проводится при ненулевом множителе.

Условие стационарности по нефиксированному временному концу записывается в виде $H = 0$. Отсюда находим

$$H_0 = -uH_1. \quad (2.18)$$

Нулевой уровень функции H_1 является поверхностью переключения в пространстве T^*X . Обозначим его пересечение с нулевым уровнем гамильтониана через \mathcal{M} . Таким образом \mathcal{M} определяется уравнениями

$$H_0(x, \psi) = 0, \quad H_1(x, \psi) = 0. \quad (2.19)$$

Утверждение 2.8. Пусть $\cos \phi < 0$. Тогда \mathcal{M} представляет собой стратифицированное многообразие. Два страта, назовём их \mathcal{M}_+ , \mathcal{M}_- , являются локальными сечениями расслоения T^*X над областями $\{x | d_{AB}(x) > 0\}$ и $\{x | d_{AB}(x) < 0\}$ соответственно. Два страта представляют собой полупрямые $\{(x, \psi) | x = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 < 0\}$ и $\{(x, \psi) | x = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 > 0\}$. Эти полупрямые стыкуются в нульмерном страте — точке $(x = 0, \psi = 0)$.

Доказательство: Выразим координаты ψ слоя расслоения T^*X через H_0 , H_1 . Уравнения (2.16) линейны по ψ и однозначно разрешимы тогда и только тогда, когда определитель d_{AB} матрицы коэффициентов не равен нулю. В этом случае

$$\psi = \frac{1}{d_{AB}} \begin{pmatrix} B_2 & -A_2 \\ -B_1 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 + F \\ H_1 + G \end{pmatrix} = \frac{1}{d_{AB}} \begin{pmatrix} B_2F - A_2G + B_2H_0 - A_2H_1 \\ -B_1F + A_1G - B_1H_0 + A_1H_1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

и система уравнений (2.19) эквивалентна системе

$$\psi = \frac{1}{d_{AB}} \begin{pmatrix} B_2F - A_2G \\ -B_1F + A_1G \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) задаёт сечения \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- . Покажем, что при замыкании множества \mathcal{M}_+ в $\pi_X^{-1}[U]$ к нему добавляется полупрямая $\{x = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 \leq 0\}$.

Границей множества $\{x \in U | d_{AB}(x) > 0\}$ в U служит прямая γ_{AB} . Поэтому предельная точка множества \mathcal{M}_+ , не лежащая в \mathcal{M}_+ , должна принадлежать прообразу $\pi_X^{-1}[\gamma_{AB}]$. Пусть $\{(x_n, \psi(x_n)) \in \mathcal{M}_+\}$ — последовательность точек, сходящаяся к предельной точке $(\bar{x}, \bar{\psi}) \notin \mathcal{M}_+$. Тогда $\bar{x} \in \gamma_{AB}$. Рассмотрим два случая.

1. $\bar{x} \neq \tilde{x}$. Имеем $\psi_2(x_n) = \frac{-B_1(x_n)\chi(x_n)}{d_{AB}(x_n)}$, где $\chi = F - \frac{A_1}{B_1}G$. Справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} B_1(x_n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{AB}(x_n) = 0$, и в силу соотношения (2.6) и неравенства $\cos \phi < 0$ справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(x_n) > 0$. Далее, $B_1(x_n) > 0$, $d_{AB}(x_n) > 0$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_2(x_n) = -\infty$. Следовательно, последовательность $\{(x_n, \psi(x_n))\}$ не сходится.

2. $\bar{x} = \tilde{x}$. В U имеем в силу (2.3) $B_1 = 1 + \theta(r)$, $A_1 = \theta(r)$, $G = \theta(r^2)$, $F = \frac{1}{2}(\sin \phi x_1^2 - \cos \phi x_2^2) + \theta(r^3)$. Поэтому $-B_1\chi = \frac{1}{2}(-\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2) + \theta(r^3)$. Выберем такой угол φ_0 , что $\text{ctg}^2 \varphi_0 |\text{tg} \phi| < 1$. Это возможно, поскольку $\cos \phi \neq 0$. Пусть точка $x \in U$ такая, что $\text{ctg}^2 \varphi = \frac{x_1^2}{x_2^2} \leq \text{ctg}^2 \varphi_0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} -\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2 &\leq \cos \phi x_2^2 + |\sin \phi| x_1^2 = -\cos \phi x_2^2 (-1 + |\text{tg} \phi| \frac{x_1^2}{x_2^2}) \\ &\leq -\cos \phi x_2^2 (-1 + |\text{tg} \phi| \text{ctg}^2 \varphi_0) = -k x_2^2, \end{aligned}$$

где k — положительное число. Следовательно, в области, задаваемой неравенством $\text{ctg}^2\varphi \leq \text{ctg}^2\varphi_0$, имеем $-B_1\chi = -\Theta(r^2)$.

Пусть бесконечное число точек последовательности $\{(x_n, \psi(x_n))\}$ лежат в этой области. Тогда без ограничения общности можно считать, что вся последовательность лежит в этой области, это не меняет предел $(\bar{x}, \bar{\psi})$. Отсюда находим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(x_n)}{\psi_2(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta(r^3)}{-B_1(x_n)\chi(x_n)} = \lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = 0$. Поэтому $\bar{\psi}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1(x_n) = 0$. Далее, $\psi_2(x_n) = \frac{-B_1(x_n)\chi(x_n)}{d_{AB}(x_n)} < 0$, поэтому $\bar{\psi}_2 \leq 0$.

Если неравенство $\text{ctg}^2\varphi \leq \text{ctg}^2\varphi_0$ выполнено только для конечного числа точек последовательности $\{(x_n, \psi(x_n))\}$, то без ограничения общности можно считать, что оно не выполняется ни для одной точки. В этом случае на точках x_n имеем $\text{tg}^2\varphi = \frac{x_2^2}{x_1^2} < \text{tg}^2\varphi_0$, следовательно, $x_2^2 = \theta(x_1^2)$, $r^2 = \Theta(x_1^2)$, $x_1 = \Theta(r)$. Тогда $d_{AB} = x_1 + \theta(r^2) = \Theta(r)$. Для предела $\bar{\psi}$ следует $\bar{\psi}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1(x_n) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\theta(r^3)}{\Theta(r)} = 0$, $\bar{\psi}_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_2(x_n) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\theta(r^2)}{\Theta(r)} = 0$. Так как множество таких последовательностей непусто, точка $(x = \psi = 0)$ является предельной для множества \mathcal{M}_+ .

Покажем, что любая точка полупрямой $\{(x, \psi) \mid x = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 \leq 0\}$ может быть предельной. Рассмотрим семейство парабол $\pi_c = \{x \mid x_1 = cx_2^2\}$ на фазовой плоскости. Разложим функцию d_{AB} в ряд Тейлора в точке \tilde{x} . Учитывая (2.5), имеем $d_{AB} = x_1 + k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 + \theta(r^3)$, где k_{11}, k_{12}, k_{22} — вторые частные производные функции d_{AB} в \tilde{x} . Ограничивая d_{AB} на кривую π_c , получаем $d_{AB} = (c + k_{22})x_2^2 + \theta(x_2^3)$. Таким образом, для любого числа $c > -k_{22}$ найдётся такое $\varepsilon = \varepsilon(c) > 0$, что кусочек $\{x \mid x_1 = cx_2^2, x_2 \in (0, \varepsilon)\}$ параболы π_c лежит в области $\{x \mid d_{AB}(x) > 0\} \subset U$. Рассмотрим функции (2.21) на этом кусочке и исследуем предел $\psi_2 = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \psi_2(x_2)$. Имеем

$$\psi_2 = \frac{-B_1\chi}{d_{AB}} = \frac{\frac{1}{2}(-\sin\phi x_1^2 + \cos\phi x_2^2) + \theta(x_2^3)}{(c + k_{22})x_2^2 + \theta(x_2^3)} = \frac{\cos\phi}{2(c + k_{22})} + \theta(x_2).$$

Таким образом, $\bar{\psi}_2 = \frac{\cos\phi}{2(c+k_{22})}$. Имеем $\cos\phi < 0$, следовательно, для произвольного $k < 0$ найдётся такое $c > -k_{22}$, что $\frac{\cos\phi}{2(c+k_{22})} = k$. Поэтому точка $(x = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 = k)$ является предельной для множества \mathcal{M}_+ .

Аналогично показывается, что при замыкании множества \mathcal{M}_- в $\pi_X^{-1}[U]$ к нему добавляется полупрямая $\{x = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 \geq 0\}$.

В силу непрерывности функций H_0, H_1 предельные точки множеств $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ принадлежат \mathcal{M} . Покажем, что множество \mathcal{M} состоит только из многообразий $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ и прямой $\{(x, \psi) \mid x = 0, \psi_1 = 0\}$. Для этого достаточно показать, что если $x \in \gamma_{AB}$, то из $(x, \psi) \in \mathcal{M}$ следует $x = 0, \psi_1 = 0$.

В случае $d_{AB} = 0$ столбцы матрицы коэффициентов в (2.16) коллинеарны

вектору правой части, т.е. определитель составленной из них матрицы исчезает:

$$A_1(G + H_1) - B_1(F + H_0) = A_1(G + H_1) - B_1(F - uH_1) = 0. \quad (2.22)$$

Подставляя $H_1 = 0$, получаем $\chi = F - \frac{A_1 G}{B_1} = 0$ как условие разрешимости системы (2.16). В силу уравнения (2.6) оно выполнено только в точке \tilde{x} . Подставляя $G(\tilde{x}) = 0$ и, в силу (2.3), $B_1(\tilde{x}) = 1, B_2(\tilde{x}) = 0$, из второго уравнения (2.16) получаем $\psi_1 = 0$. Здесь ψ_2 — свободный параметр решения. Утверждение 2.8 доказано. \square

Введём в окрестности U систему координат (x_1, ζ) , где $\zeta = -\frac{x_2}{x_1}$. Она определена всюду, кроме оси Ox_2 . Зафиксируем два произвольных числа $\zeta_\alpha, \zeta_\beta$. Рассмотрим множество $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in U \mid -\frac{x_2}{x_1} \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]\} \cup \{\tilde{x}\}$. Если окрестность U достаточно мала, то множество \mathcal{K} пересекается с кривой γ_{AB} только в точке \tilde{x} . При удалении точки \tilde{x} множество \mathcal{K} распадается на два множества $\mathcal{K}_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{K} \mid x_1 > 0\}$, $\mathcal{K}_- = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{K} \mid x_1 < 0\}$. При этом на множестве \mathcal{K}_+ имеем $d_{AB} > 0$, а на множестве \mathcal{K}_- — $d_{AB} < 0$. На множествах $\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-$ замена координат $(x_1, x_2) \leftrightarrow (x_1, \zeta)$ взаимно-однозначна. Пусть точке \tilde{x} в системе координат (x_1, ζ) соответствует отрезок $\{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. В \mathcal{K} переменные x_1, x_2 аналитически зависят от x_1, ζ .

Согласно утверждению 2.8 множества $\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-$ обладают поднятиями на многообразия $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ в T^*X . На этих поднятиях уравнения (2.21) задают ψ как функции от x и, после замены переменных, как функции от x_1, ζ .

Утверждение 2.9. Пусть функции A, B, F, G принадлежат классу C^k , где $k \geq 1$ (классу C^ω). Тогда функции (2.21) на множестве $\mathcal{K}_+ \cup \mathcal{K}_-$, рассматриваемые как функции от x_1, ζ , допускают продолжение нулём на отрезок $\{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$ до функций класса C^{k-1} (класса C^ω).

Доказательство: Представим ψ в виде

$$\psi = \frac{x_1}{d_{AB}} \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} B_2 F - A_2 G \\ -B_1 F + A_1 G \end{pmatrix}.$$

Переменные x являются аналитическими функциями от x_1, ζ . Поэтому выражения в скобке как функции от переменных x_1, ζ принадлежат классу C^k (C^ω), ровно как и величина d_{AB} . На множестве \mathcal{K} выражения в скобке имеют порядок $\theta(r^2) = \theta(x_1^2)$, а d_{AB} имеет порядок $\Theta(x_1)$. По лемме Адамара соотношение $\frac{d_{AB}}{x_1}$ продолжается на $\{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$ до функции класса C^{k-1} (C^ω), не обращающейся в нуль. Поэтому соотношение $\frac{x_1}{d_{AB}}$ также продолжается до функции класса C^{k-1} (C^ω) по переменным x_1, ζ . Соотношение выражений в скобке и x_1 по лемме Адамара тоже продолжается до функций класса C^{k-1} (C^ω). Отсюда следует утверждение. \square

Рассмотрим множество $\hat{\mathcal{K}} \in \mathcal{M}$, состоящее из поднятий множеств $\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-$ на \mathcal{M} и точки $(x = 0, \psi = 0)$. Согласно утверждению 2.9 оно задаётся функцией $\psi(x_1, \zeta)$ класса C^2 .

Следствие 2.1. *Функции ψ на множестве $\hat{\mathcal{K}}$ имеют порядок $\theta(r)$. \square*

Вычислим особые траектории, лежащие на \mathcal{M} , в случае $\cos \phi < 0$. Пусть $\cos \phi < 0$. Существует стандартный метод (см. [46]) вычисления особых режимов. Он состоит в дифференцировании тождества $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$ по времени в силу уравнений гамильтоновой системы. Если функция Понтрягина имеет вид $H = H_0 + uH_1$, то производные $\left(\frac{d}{dt}\right)^h \frac{\partial H(u, x, \psi)}{\partial u} = 0$ равны $\text{ad}_H^h H_1$, где $\text{ad}_H^0 H_1 = H_1$, $\text{ad}_H^{n+1} H_1 = \{H, \text{ad}_H^n H_1\}$. Через $\{\cdot, \cdot\}$ обозначена скобка Пуассона.

Для производной \dot{H}_1 имеем с учётом (2.16)

$$\dot{H}_1 = \{H, H_1\} = \{H_0, H_1\} = \quad (2.23)$$

$$= \sum_{\mu} \left(A_{\mu} \left(-\frac{\partial G}{\partial x_{\mu}} + \langle \psi, \frac{\partial B}{\partial x_{\mu}} \rangle \right) - \left(-\frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} + \langle \psi, \frac{\partial A}{\partial x_{\mu}} \rangle \right) B_{\mu} \right)$$

$$= \langle \psi, [A, B] \rangle + \sum_{\mu} \left(-A_{\mu} \frac{\partial G}{\partial x_{\mu}} + B_{\mu} \frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} \right). \quad (2.24)$$

Исследуем сначала прямую $\{(x, \psi) \mid x = 0, \psi_1 = 0\}$. Подставляя значения A, B, F, G и их производных в точке \tilde{x} в силу (2.3), находим

$$\dot{H}_1 = \langle \psi, -\frac{\partial A}{\partial x_1} \rangle = \psi_2 = 0. \quad (2.25)$$

Дифференцируя выражение (2.23) с учётом (2.17) дальше по t и подставляя $\psi = 0$, получим

$$\ddot{H}_1 = \langle \dot{\psi}, [A, B] \rangle + \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x_1} = u \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = u \sin \phi. \quad (2.26)$$

Утверждение 2.10. *Если $\cos \phi < 0$ и $\sin \phi \neq 0$, то точка $(x = 0, \psi = 0) \in T^*X$ представляет собой стационарный особый режим первого (глобального) порядка.*

Доказательство: Коэффициент $\sin \phi$ перед управлением u в выражении для \ddot{H}_1 не исчезает, поэтому особый режим в точке $(x = 0, \psi = 0)$ имеет глобальный порядок 1. Значение управления u определяется из условия $\ddot{H}_1 = 0$. Отсюда $u \equiv 0$, и в силу (2.1), (2.17) имеем $\dot{x} = \dot{\psi} = 0$. Следовательно, $x \equiv 0, \psi \equiv 0$. \square

Рассмотрим случай $(x, \psi) \in \mathcal{M}$, $x \neq \tilde{x}$. В силу утверждения 2.8 имеем $d_{AB} \neq 0$. Подставим (2.20) и (2.18) в (2.23). Получим неявное линейное дифференциальное уравнение

$$d_{AB}\dot{H}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -A_2 - uB_2 \\ A_1 + uB_1 \end{pmatrix}, [A, B] \right\rangle H_1 + \left\langle \begin{pmatrix} B_2F - A_2G \\ -B_1F + A_1G \end{pmatrix}, [A, B] \right\rangle - \\ - d_{AB} D_A G + d_{AB} D_B F$$

относительно H_1 . Обозначим неоднородность в правой части через C , а вектор $A + uB$ через Q . Упростим коэффициент перед H_1 . Определим матрицу

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем в силу кососимметричности скобок Ли

$$\left\langle \begin{pmatrix} -Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix}, [A, B] \right\rangle = -\langle IQ, [Q, B] \rangle$$

$$= -\langle IQ, D_Q B \rangle + \langle IQ, D_B Q \rangle + D_Q \langle Q, IB \rangle - \langle D_Q Q, IB \rangle - \langle Q, D_Q (IB) \rangle.$$

В силу кососимметричности I первое и последнее слагаемое сокращаются. Перенесём матрицу I во втором и четвёртом слагаемом в другой сомножитель. С учётом $I^2 = -E$ и $A_\mu B_\nu - B_\mu A_\nu = d_{AB} I_{\mu\nu}$ получим

$$\begin{aligned} -\langle IQ, [Q, B] \rangle &= D_Q \langle A, IB \rangle - \langle Q, ID_B Q \rangle + \langle ID_Q Q, B \rangle = \\ &= \dot{d}_{AB} - \langle Q, \langle B, \nabla \rangle (IQ) \rangle + \langle B, \langle Q, \nabla \rangle (IQ) \rangle = \\ &= \dot{d}_{AB} - \langle A, \langle B, \nabla \rangle (IQ) \rangle + \langle B, \langle A, \nabla \rangle (IQ) \rangle = \\ &= \dot{d}_{AB} + \sum_{\mu, \nu} (-A_\mu B_\nu \nabla_\nu (IQ)_\mu + B_\mu A_\nu \nabla_\nu (IQ)_\mu) = \\ &= \dot{d}_{AB} + d_{AB} \sum_{\mu, \nu, \kappa} I_{\nu\mu} I_{\mu\kappa} \nabla_\nu Q_\kappa = \dot{d}_{AB} - d_{AB} \sum_{\nu, \kappa} \delta_{\nu\kappa} \nabla_\nu Q_\kappa = \\ &= \dot{d}_{AB} - d_{AB} \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В итоге, из уравнения (2.18) следует

$$d_{AB}\dot{H}_1 = \left(\dot{d}_{AB} - d_{AB} \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) H_1 + C. \tag{2.28}$$

Допустим, что $d_{AB} \neq 0$ на некотором интервале $[t, t_0]$. Тогда уравнение (2.28) не имеет особенностей на этом интервале, и его решение запишется в виде

$$H_1(t) = -e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\tau} \int_t^{t_0} e^{-\int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\sigma} \frac{C}{d_{AB}} d\tau + e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\tau} H_1(t_0). \quad (2.29)$$

На \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- имеем $H_1 = 0$, следовательно, справедливо $\dot{H}_1 = \frac{C}{d_{AB}}$. Условие особого режима $\dot{H}_1 = 0$ запишется в виде $C = 0$.

Утверждение 2.11. *Функция $C : U \rightarrow \mathbf{R}$ принадлежит классу C^2 и представляется в виде*

$$C = \frac{1}{2} (\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2) + \rho(x), \quad (2.30)$$

где $\rho = \theta(r^3)$, $\nabla \rho = \theta(r^2)$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \theta(r)$. Если $\phi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, то квадратичная форма (2.30) отрицательно определена, и $C < 0$ в $U \setminus \{\tilde{x}\}$. Если $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, то главными осями формы (2.30) являются координатные оси. В этом случае нулевой уровень функции C состоит из двух пересекающихся в точке \tilde{x} кривых класса C^1 . Удалением точки \tilde{x} эти кривые распадаются на четыре ветки, стыкующиеся в \tilde{x} и трансверсальные координатным осям. Эти ветки принадлежат классу C^2 . Окрестность U делится этими ветками на четыре области. В областях, в которых лежит ось Ox_2 , имеем $C < 0$, а в двух других областях имеем $C > 0$.

Доказательство: По определению

$$C = \left\langle \begin{pmatrix} B_2F - A_2G \\ -B_1F + A_1G \end{pmatrix}, [A, B] \right\rangle - d_{AB} D_A G + d_{AB} D_B F. \quad (2.31)$$

Так как в выражении (2.31) участвуют первые производные функций класса C^3 , то функция C принадлежит классу C^2 . Покажем, что её главная часть совпадает с формой (2.30). Разлагая функции A, B, F, G и их производные в ряд Тейлора с помощью соотношений (2.3), получаем

$$\begin{aligned} C &= \left\langle \begin{pmatrix} \theta(r^3) \\ -F + \theta(r^3) \end{pmatrix}, -D_B A + \theta(r) \right\rangle + d_{AB} (D_B F + \theta(r^2)) = \\ &= -F + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \theta(r^3) = -\frac{1}{2} (\sin \phi x_1^2 - \cos \phi x_2^2) + \sin \phi x_1^2 + \theta(r^3) = \\ &= \frac{1}{2} (\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2) + \theta(r^3). \end{aligned}$$

Исследуем разницу $\rho = C - \frac{1}{2} (\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2) = \theta(r^3)$. Из (2.31) следует, что

$$\begin{aligned} \rho = & (B_2F - A_2G)(D_A B_1 - D_B A_1) + (-B_1F + A_1G)D_A B_2 - A_1G D_B A_2 + \\ & + B_1F B_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - d_{AB} D_A G + d_{AB} B_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + (B_1 - 1) \left(B_1 F \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + d_{AB} \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \\ & + (B_1 - 1) F \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + (d_{AB} - x_1) \frac{\partial F}{\partial x_1} + F \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + 1 \right) - \\ & - \left(F - \frac{1}{2} (\sin \phi x_1^2 - \cos \phi x_2^2) \right) + x_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} - \sin \phi x_1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, ρ представляет собой сумму членов порядка $\theta(r^3)$. В каждое слагаемое либо входит множитель класса C^3 , имеющий порядок $\theta(r^3)$, либо оно является произведением двух функций класса C^2 , имеющих порядки $\theta(r^2)$ и $\theta(r)$ соответственно. Дифференцируя функцию ρ и применяя утверждение 2.3, убеждаемся в том, что

$$\nabla \rho = \theta(r^2), \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \theta(r). \quad (2.32)$$

При этом несущественно, что окрестность U некомпактна, поскольку её можно уменьшить так, чтобы она лежала внутри компактного множества.

Пусть $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Перейдём к полярной системе координат. В силу (2.32) имеем $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_1} r \sin \varphi + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} r \cos \varphi = \theta(r^3)$, поэтому

$$\begin{aligned} C &= \frac{r^2}{2} (\sin \phi \cos^2 \varphi + \cos \phi \sin^2 \varphi) + \theta(r^3), \\ \frac{\partial C}{\partial \varphi} &= r^2 \cos \varphi \sin \varphi (\cos \phi - \sin \phi) + \theta(r^3). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Рассмотрим эти выражения на окружности радиуса $r > 0$ и приравним их нулю:

$$\begin{aligned} C = 0 &\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\operatorname{tg} \phi} + \theta(r), \\ \frac{\partial C}{\partial \varphi} = 0 &\Rightarrow \cos \varphi \sin \varphi = \theta(r). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Обозначим решения уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\operatorname{tg} \phi}$ через φ_i , $i = 1, \dots, 4$. Пусть φ_i занумерованы так, что $\varphi_i \in ((i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2})$. Зафиксируем такое $\varepsilon > 0$, не зависящее от r , что интервалы $V_i = (\varphi_i - \varepsilon, \varphi_i + \varepsilon)$, $W_i = (i\frac{\pi}{2} - \varepsilon, i\frac{\pi}{2} + \varepsilon) \bmod (2\pi)$ на окружности S^1 попарно дизъюнкты. Из уравнений (2.34) следует, что при достаточно малом r уравнение $C(r, \varphi) = 0$ выполнено только тогда, когда $\varphi \in V_i$

для какого-то $i \in \{1, \dots, 4\}$, а уравнение $\frac{\partial C}{\partial \varphi}(r, \varphi) = 0$ выполнено только тогда, когда $\varphi \in W_i$ для какого-то $i \in \{1, \dots, 4\}$. Далее, из разложения (2.30) следует, что $C(r, \varphi) < 0$, если $\varphi \in W_1 \cup W_3$, и $C(r, \varphi) > 0$, если $\varphi \in W_2 \cup W_4$. Таким образом, функция $C(r, \varphi)$, ограниченная на окружность радиуса r , на двух концах каждого из интервалов V_i имеет разные знаки. С другой стороны, производная $\frac{\partial C}{\partial \varphi}$ не имеет нулей внутри интервалов V_i , так как V_i и W_i не пересекаются. Следовательно, в каждом интервале V_i функция C имеет ровно один нуль. Обозначим его через $\hat{\varphi}_i$. Значения $\hat{\varphi}_i$ зависят от радиуса r . В силу (2.34) справедливо $\lim_{r \rightarrow 0} \hat{\varphi}_i(r) = \varphi_i$.

Функция C принадлежит классу C^2 по переменным r, φ . Так как справедливо $\frac{\partial C}{\partial \varphi}(r, \hat{\varphi}_i(r)) \neq 0$, то по теореме о неявной функции, функции $\hat{\varphi}_i(r)$, которые задаются уравнением $C(r, \hat{\varphi}_i(r)) = 0$, также принадлежат классу C^2 при $r > 0$. Функции $\hat{\varphi}_i(r)$ определяют четыре кривые класса C^2 , которые мы обозначим через γ_{C_i} соответственно. Объединим γ_{C_1} , γ_{C_3} и точку \tilde{x} в одну кривую. Покажем, что последняя класса C^1 . Достаточно показать непрерывность первой производной $\frac{dx_2}{dx_1}$ в точке \tilde{x} . Имеем $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_3 = \sqrt{-\operatorname{tg} \phi}$. Следовательно, $\frac{dx_2}{dx_1}(\tilde{x}) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_2}{x_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{tg} \hat{\varphi}_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{tg} \hat{\varphi}_3 = \sqrt{-\operatorname{tg} \phi}$. Вычислим производную $\frac{dx_2}{dx_1}$ на кривой γ_{C_3} . В силу соотношения (2.32) имеем $\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \sin \varphi = \theta(r^2)$. Отсюда $\frac{\partial C}{\partial r} = r(\sin \phi \cos^2 \varphi + \cos \phi \sin^2 \varphi) + \theta(r^2)$. Имеем $\sin \phi \cos^2 \varphi_1 + \cos \phi \sin^2 \varphi_1 = 0$, $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1 + \theta(r)$, поэтому $\sin \phi \cos^2 \hat{\varphi}_1 + \cos \phi \sin^2 \hat{\varphi}_1 = \theta(r)$. Таким образом, на кривой γ_{C_3} имеем $\frac{\partial C}{\partial r} = \theta(r^2)$. Далее, справедливо $\frac{\partial C}{\partial \varphi}(r, \hat{\varphi}_1(r)) = r^2 \cos \hat{\varphi}_1 \sin \hat{\varphi}_1 (\cos \phi - \sin \phi) + \theta(r^3) = -\Theta(r^2)$. Следовательно, производная $\frac{d\hat{\varphi}_1}{dr} = -\frac{\partial C / \partial r}{\partial C / \partial \varphi} = \frac{\theta(r^2)}{-\Theta(r^2)} = \theta(1)$ ограничена. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\frac{dx_2}{dr}}{\frac{dx_1}{dr}} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial r} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \frac{d\hat{\varphi}_1}{dr}}{\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \frac{d\hat{\varphi}_1}{dr}} = \frac{\sin \hat{\varphi}_1 + r \cos \hat{\varphi}_1 \theta(1)}{\cos \hat{\varphi}_1 - r \sin \hat{\varphi}_1 \theta(1)} = \\ &= \operatorname{tg} \hat{\varphi}_1 + \theta(r) = \sqrt{-\operatorname{tg} \phi} + \theta(r). \end{aligned}$$

Комбинируя это уравнение с первым уравнением (2.34), находим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} + \theta(r). \quad (2.35)$$

Аналогично получаем на кривой γ_{C_1} соотношение $\frac{dx_2}{dx_1} = \sqrt{-\operatorname{tg} \phi} + \theta(r)$. Отсюда находим, что на объединении кривых $\gamma_{C_1}, \gamma_{C_3}$ и точки \tilde{x} справедливо $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{dx_2}{dx_1} = \sqrt{-\operatorname{tg} \phi}$. Это значение совпадает со значением производной в точке \tilde{x} . Следовательно, кривые $\gamma_{C_1}, \gamma_{C_3}$ и точка \tilde{x} образуют кривую класса C^1 . Аналогично

доказывается, что кривые γ_{C2}, γ_{C4} и точка \tilde{x} образуют кривую класса C^1 , и на этой кривой $\frac{dx_2}{dx_1}(\tilde{x}) = -\sqrt{-\text{tg}\phi}$. Утверждение 2.11 доказано. \square

Отметим, что ветки γ_{Ci} расположены трансверсально к кривой γ_{AB} . Поэтому функция d_{AB} на них имеет порядок $\pm\Theta(r)$, в частности она не обращается в нуль. В силу утверждения 2.8 ветки γ_{Ci} имеют поднятия на \mathcal{M} . Обозначим эти поднятия соответственно через $\hat{\gamma}_{Ci}$, $i = 1, \dots, 4$. $\hat{\gamma}_{C1}$ и $\hat{\gamma}_{C4}$ лежат на \mathcal{M}_+ , а $\hat{\gamma}_{C2}$ и $\hat{\gamma}_{C3}$ — на \mathcal{M}_- .

Вернёмся к вычислению особых режимов на многообразиях \mathcal{M}_+ и \mathcal{M}_- . Вычислим вторую производную \ddot{H}_1 . Поделим (2.28) на d_{AB} и продифференцируем по t . Учитывая $H_1 = 0$, $\dot{H}_1 = \frac{\dot{C}}{d_{AB}}$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{H}_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{d}_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) H_1 + \frac{\dot{d}_{AB}}{d_{AB}} \dot{H}_1 - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \dot{H}_1 + \frac{\dot{C}}{d_{AB}} - \frac{C \dot{d}_{AB}}{d_{AB}^2} = \\ &= -\frac{C}{d_{AB}} \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\dot{C}}{d_{AB}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Рассмотрим случай $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. На кривых γ_{Ci} имеем $C = 0$, и (2.36) в силу (2.30) переходит в

$$\ddot{H}_1 = \frac{\dot{C}}{d_{AB}} = \frac{D_{AC}}{d_{AB}} + u \frac{D_{BC}}{d_{AB}} = \frac{1}{d_{AB}} \left(A_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} + u \left(B_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} \right) \right).$$

Разлагая производные функции C в ряд Тейлора, находим в силу утверждения 2.11

$$\ddot{H}_1 = \frac{1}{d_{AB}} \left[A_1 \sin \phi x_1 + A_2 \cos \phi x_2 + \theta(r^3) + u (\sin \phi x_1 + \theta(r^2)) \right].$$

Коэффициент при u положительный, и особый режим на кривых $\hat{\gamma}_{Ci}$ имеет глобальный порядок 1 и удовлетворяет условию Кэлли [46]. Условие $\dot{H}_1 = 0$ определяет управление в виде $u = -\frac{D_{AC}}{D_{BC}}$. Используя соотношения (2.3) и разлагая в ряд Тейлора, находим $u = -\alpha x_1 - x_2 + \text{ctg}\phi x_2 + \theta(r^2)$. Исследуем, когда u лежит в интервале допустимых значений $[0, 1]$. Выражение (2.30) равно нулю, поэтому $\text{ctg}\phi = -\frac{x_1^2}{x_2^2} + \theta(r)$ и $u = -\frac{1}{x_2}(x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + x_2^2) + \theta(r^2) < 1$. В силу (2.7) имеем $u \geq 0$ только в случае $x_2 < 0$. Таким образом, особыми режимами являются кривые $\hat{\gamma}_{C3}$ и $\hat{\gamma}_{C4}$. На проекции γ_{C3} фазовая точка приближается к \tilde{x} , на γ_{C4} — удаляется. Приближение и удаление происходят за бесконечное время.

Вычислим знак второй производной \ddot{H}_1 на особом режиме $\hat{\gamma}_{C3}$, если u принимает значения 0 или 1. При $u = 0$ имеем $\ddot{H}_1 = \frac{D_{AC}}{d_{AB}} = \left(-\frac{D_{AC}}{D_{BC}}\right) \left(-\frac{D_{BC}}{d_{AB}}\right)$. Как выше было установлено, на $\hat{\gamma}_{C3}$ справедливо $\left(-\frac{D_{AC}}{D_{BC}}\right) > 0$. Далее, $d_{AB} < 0$,

$D_{BC} = \sin \phi x_1 + \theta(r^2) < 0$, поэтому $\frac{D_{AC}}{d_{AB}} < 0$. Функция \ddot{H}_1 линейна по u и в интервале $(0, 1)$ имеет нуль. Следовательно, при $u = 1$ имеем $\ddot{H}_1 > 0$. Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2.12. *На особом режиме $\hat{\gamma}_{C3}$ справедливо $\ddot{H}_1 < 0$ в случае $u = 0$, и $\ddot{H}_1 > 0$ в случае $u = 1$. \square*

2.5 Некоторые свойства системы

Уравнение (2.22) задаёт функцию H_1 на кривой γ_{AB} . Разрешая его, получаем

$$H_1 = \frac{-A_1G + B_1F}{Q_1} = \frac{\langle BF - AG, e_1 \rangle}{\langle Q, e_1 \rangle} = \frac{\langle BF - AG, V \rangle}{\langle A + uB, V \rangle}. \quad (2.37)$$

Вследствие коллинеарности векторов $BF - AG$ и $Q = A + uB$ единичный орт $e_1 = (1, 0)$ можно заменить любым вектором V , неортогональным вектору Q .

Пусть теперь $u \in \mathbf{R}$ произвольное, независимо от условия (2.15). Рассмотрим произвольную траекторию σ системы $\dot{x} = Q$ и исследуем её поднятия в расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы (2.1), (2.17) с гамильтонианом $H = H_0 + uH_1$.

На нулевом уровне гамильтониана лежит однопараметрическое семейство таких поднятий, различающихся значением величины H_1 . Эволюция функции H_1 на траекториях этого семейства подчиняется уравнению (2.28). Это уравнение задаёт некоторый фазовый портрет на H_1, t -плоскости.

Пусть траектория σ в некоторый момент времени t_0 пересекает кривую γ_{AB} , пусть точка пересечения не совпадает с \tilde{x} . В этот момент функция H_1 на всех траекториях семейства принимает значение (2.37).

Рассмотрим поведение траекторий дифференциального уравнения (2.28) в окрестности точки $(H_1, t) = (\frac{-A_1G+B_1F}{Q_1}, t_0)$. При подходящей параметризации этих траекторий уравнение (2.28) принимает вид

$$H'_1 = H_1 \left(D_Q d_{AB} - d_{AB} \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + C, \quad t' = d_{AB}. \quad (2.38)$$

При $t = t_0$ имеем $d_{AB} = t' = 0$. Подставляя соотношение $d_{AB} = 0$ в (2.28), находим $H_1 D_Q d_{AB} + C = H'_1 = 0$. Таким образом, точка $(H_1, t) = (\frac{-A_1G+B_1F}{Q_1}, t_0)$ является особой точкой системы. Линеаризация в этой точке имеет вид

$$\frac{\partial(H'_1, t')}{\partial(H_1, t)} = \begin{pmatrix} D_Q d_{AB} & H_1(D_Q^2 d_{AB} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} D_Q d_{AB}) + D_Q C \\ 0 & D_Q d_{AB} \end{pmatrix}.$$

Из (2.5) следует $\nabla d_{AB}(x) = (1, 0) + \theta(r)$, из (2.3) следует $B(x) = (1, 0)^T + \theta(r)$. Отсюда находим $D_B d_{AB} = 1 + \theta(r)$. Следовательно, существует в точности одно значение $u = u_* \in \mathbf{R}$, такое, что $D_Q d_{AB} = 0$. При $u > u_*$ имеем $D_Q d_{AB} > 0$, при $u < u_*$ имеем $D_Q d_{AB} < 0$. Ясно, что значение u_* определяется из уравнения $Q = A + u_* B = 0$. Таким образом, $u_* = -\frac{A_1}{B_1} = -x_2 + \theta(r^2)$. Во всяком случае, $u_* \notin \{0, 1\}$.

Рассмотрим случай $u \neq u_*$. Тогда особая точка $(H_1, t) = (\frac{-A_1 G + B_1 F}{Q_1}, t_0)$ является узлом. Разрешим особенность.

Обозначим выражение (2.37) через κ и представим H_1 в виде $H_1(t) = \kappa(t) + d_{AB}(t)f(t)$. Дифференцируя это равенство, получаем $\dot{H}_1 = \dot{\kappa} + \dot{d}_{AB}f + d_{AB}\dot{f}$. Подставляя эти соотношения в (2.28), находим следующее уравнение на функцию f :

$$\dot{f} = -\text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} f + \frac{C - d_{AB}\dot{\kappa} + \dot{d}_{AB}\kappa - d_{AB}\text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \kappa}{d_{AB}^2}.$$

Вычислим неоднородность. Вначале выведем несколько соотношений, которые упростят вычисления. Подставляя в уравнение (2.27) управление $u = 0$, находим

$$-\langle IA, [A, B] \rangle = D_A d_{AB} - d_{AB} \text{tr} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (2.39)$$

Подставляя в (2.27) управление $u = 1$ и вычитая (2.39), получаем

$$-\langle IB, [A, B] \rangle = D_B d_{AB} - d_{AB} \text{tr} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Пусть V — вектор, неортогональный вектору Q . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\langle A, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} Q - A &= \frac{1}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} A_1 V_1 Q_1 + A_2 V_2 Q_1 - A_1 Q_1 V_1 - A_1 Q_2 V_2 \\ A_1 V_1 Q_2 + A_2 V_2 Q_2 - A_2 Q_1 V_1 - A_2 Q_2 V_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{A_1 Q_2 - A_2 Q_1}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = \frac{u d_{AB}}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\langle B, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} Q - B &= -\frac{-B_1 Q_2 + B_2 Q_1}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = -\frac{d_{AB}}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Комбинируя эти два уравнения, получаем

$$-BF + AG + \frac{\langle BF - AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} Q = -d_{AB} \frac{F + uG}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

С помощью уравнений (2.39)-(2.41) находим

$$\begin{aligned}
\frac{C - d_{AB}\dot{\kappa} + \dot{d}_{AB}\kappa - d_{AB}\text{tr}\frac{\partial Q}{\partial x}\kappa}{d_{AB}^2} &= \frac{1}{d_{AB}^2} \left\{ F\langle IB, [A, B] \rangle - G\langle IA, [A, B] \rangle - \right. \\
&\quad - d_{AB}D_A G + d_{AB}D_B F - d_{AB}D_Q \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} + D_Q d_{AB} \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} - \\
&\quad \left. - d_{AB}\text{tr}\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} \right\} = \frac{1}{d_{AB}^2} \left\{ -F(\langle B, \nabla \rangle d_{AB} - d_{AB} \langle \nabla, B \rangle) + \right. \\
&\quad + G(\langle A, \nabla \rangle d_{AB} - d_{AB} \langle \nabla, A \rangle) - d_{AB} \left(\langle A, \nabla \rangle G + \langle B, \nabla \rangle F - \langle Q, \nabla \rangle \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} \right) \\
&\quad + \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} \langle Q, \nabla \rangle d_{AB} - d_{AB} \langle \nabla, Q \rangle \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} \left. \right\} = \frac{1}{d_{AB}^2} \left\{ \left(-BF + AG + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} Q \right), \nabla \right\rangle d_{AB} + d_{AB} \langle \nabla, \left(BF-AG - Q \frac{\langle BF-AG, V \rangle}{\langle Q, V \rangle} \right) \rangle \left. \right\} = \\
&= \frac{d_{AB} \left\langle -\frac{F+uG}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}, \nabla \right\rangle d_{AB} - d_{AB} \langle \nabla, -\frac{F+uG}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} d_{AB} \rangle}{d_{AB}^2} = \left\langle \nabla, \frac{F+uG}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\dot{f} + \text{tr}\frac{\partial Q}{\partial x}f + \left\langle \nabla, \frac{F+uG}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \quad (2.42)$$

Это уравнение при $t = t_0$ уже не имеет особенностей. Отсюда следует, что траектории системы (2.38) приходят в особую точку под любыми касательными направлениями.

2.5.1 Поведение системы при $u = 0$

Рассмотрим случай $u = 0$, т.е. гамильтонову систему с гамильтонианом H_0 :

$$\dot{x} = A, \quad \dot{\psi} = \nabla F - \sum_{\mu} \psi_{\mu} \nabla A_{\mu}. \quad (2.43)$$

Утверждение 2.13. Пусть $T > 0$ — конечное число, $x_0 \in U$ некоторая точка. Обозначим решение уравнения $\dot{x} = A$, проходящее через x_0 в момент времени $t = 0$, через $x(t)$. Тогда на отрезке $t \in [-T, T]$ справедлива оценка $r(t) = \Theta(r(0))$, если окрестность U выбрать достаточно малой. Здесь $r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$.

Суть утверждения заключается в том, что константы в оценках можно выбрать независимо от выбора точки $x_0 \in U$.

Доказательство: Имеем $|\dot{r}| = \frac{1}{2r} \left| \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \right| = \frac{|A_1 x_1 + A_2 x_2|}{r} = |\alpha \cos^2 \varphi r + \theta(r^2)| \leq 2r + cr^2$ для некоторого $c > 0$. Отсюда следует цепочка неравенств $\rho(-T) \leq r(t) \leq \rho(T)$, где $\rho(t)$ — решение уравнения $\dot{\rho} = 2\rho + c\rho^2$ с начальным значением $\rho(0) = r(0)$. Имеем $\rho(\pm T) = \frac{r(0)e^{\pm T}}{2 + \frac{c}{2}r(0)(1 - e^{\pm T})}$.

Выберем окрестность U такой маленькой, чтобы выполнялось неравенство $r(0) \leq \frac{1}{c(e^{2T}-1)}$. Тогда имеем также $r(0) \leq \frac{1}{c(1-e^{-2T})}$, так как $\frac{e^{2T}+e^{-2T}}{2} \geq 1$. Следовательно, имеем $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{c}{2}r(0)(1 - e^{2T}), 1 + \frac{c}{2}r(0)(1 - e^{-2T}) \leq 2$. Отсюда находим $\rho(-T) \geq \frac{e^{-2T}}{2}r(0), \rho(T) \leq 2e^{2T}r(0)$. Таким образом, имеем оценку $\frac{e^{-2T}}{2}r(0) \leq r(t) \leq \frac{e^{-2T}}{2}r(0)$, что доказывает утверждение. \square

Пусть \hat{p} — точка на $\hat{\mathcal{K}}$, $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (2.43), проходящая в момент времени $t = 0$ через точку \hat{p} .

Утверждение 2.14. Пусть $T > 0$ — конечное число. Тогда на отрезке $t \in [-T, T]$ траектории $\hat{\sigma}$ справедлива оценка $\psi(t) = \theta(r(0)) = \theta(r(t))$, если окрестность U выбрать достаточно малой.

Доказательство: Эволюция переменных ψ определяется уравнением 2.17. Коэффициенты и неоднородность в этом линейном уравнении определяются как функции от t и координат точки $x(0)$, если рассматривать решение уравнения $\dot{x} = A$ как зависящее от t и начальных значений $x(0)$. В силу утверждения 2.13 неоднородность в уравнении 2.17 имеет порядок $\theta(r) = \theta(r(0))$, а матрица коэффициентов — порядок $\theta(1)$. Начальные значения $\psi(0)$ в силу следствия 2.1 также имеют порядок $\theta(r(0))$. Утверждение теперь следует из стандартных оценок роста решения линейного дифференциального уравнения. \square

На нулевом уровне функции H_0 система (2.43) описывается уравнениями $\dot{x} = A$ и (2.28), в которое подставлено $u = 0$. При этом коэффициенты при \dot{H}_1 и H_1 в (2.28) можно рассматривать как функции от t , определяющиеся из решения $x(t)$ уравнения $\dot{x} = A$. Выведем общее решение уравнения (2.28).

Вычислим неоднородность в уравнении (2.42) при $u = 0$ и $V = x^\perp = (-x_2, x_1)$. Находим

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla, \frac{F + uG}{\langle Q, V \rangle} \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \nabla, \frac{F}{\langle A, x^\perp \rangle} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \frac{2F}{\langle A, x^\perp \rangle} + \frac{\langle x, \nabla F \rangle}{\langle A, x^\perp \rangle} - \frac{F}{\langle A, x^\perp \rangle^2} (\langle x^\perp, D_x A \rangle + \langle A, x^\perp \rangle) = \\ &= \frac{F}{\langle A, x^\perp \rangle^2} \langle x^\perp, A - D_x A \rangle + \frac{\langle x, \nabla F \rangle}{\langle A, x^\perp \rangle}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\dot{f} + \langle \nabla, A \rangle f + \frac{F}{\langle A, x^\perp \rangle^2} \langle x^\perp, A - D_x A \rangle + \frac{\langle x, \nabla F \rangle}{\langle A, x^\perp \rangle} = 0.$$

Обозначая неоднородность коротко через $s(t)$, получаем решение

$$f(t) = -e^{-\int_{t_0}^t \langle \nabla, A \rangle d\tau} \int_{t_0}^t \left(e^{\int_{t_0}^\tau \langle \nabla, A \rangle d\sigma} s(\tau) \right) d\tau + e^{-\int_{t_0}^t \langle \nabla, A \rangle d\tau} f(t_0). \quad (2.44)$$

Подставляя этот результат в выражение для H_1 , получаем решение

$$H_1(t) = -G + F \frac{-B_1 x_2 + B_2 x_1}{-A_1 x_2 + A_2 x_1} - d_{AB} \left[\int_{t_0}^t \left(e^{-\int_{t_0}^\tau \langle \nabla, A \rangle d\sigma} s(\tau) \right) d\tau + e^{-\int_{t_0}^t \langle \nabla, A \rangle d\tau} \frac{1}{d_{AB}(t_0)} \left(-G + F \frac{-B_1 x_2 + B_2 x_1}{-A_1 x_2 + A_2 x_1} - H_1 \right)(t_0) \right]. \quad (2.45)$$

Выделим главный член. Учитывая соотношения $\sum_\mu I_{\mu\nu} I_{\mu\kappa} = \delta_{\nu\kappa}$ и $x_\mu A_\kappa - A_\mu x_\kappa = (-A_1 x_2 + A_2 x_1) I_{\mu\kappa}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-A_1 x_2 + A_2 x_1) &= \frac{d}{dt} \langle x, IA \rangle = \langle A, IA \rangle + \langle x, ID_A A \rangle = \sum_{\mu, \nu, \kappa} x_\mu I_{\mu\nu} A_\kappa \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\kappa} = \\ &= \sum_{\mu, \nu, \kappa} \left(A_\mu I_{\mu\nu} x_\kappa \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\kappa} + I_{\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\kappa} (-A_1 x_2 + A_2 x_1) I_{\mu\kappa} \right) = \\ &= -\langle A, I(A - D_x A) \rangle + \langle \nabla, A \rangle (-A_1 x_2 + A_2 x_1). \end{aligned}$$

Имеем $A - D_x A = \theta(r^2)$, следовательно, $\frac{d}{dt}(-A_1 x_2 + A_2 x_1) = \langle \nabla, A \rangle (-A_1 x_2 + A_2 x_1) + \theta(r^3)$. В силу (2.7) отсюда следует

$$\frac{\frac{d}{dt}(-A_1 x_2 + A_2 x_1)}{-A_1 x_2 + A_2 x_1} = \langle \nabla, A \rangle + \theta(r).$$

Проинтегрируем это равенство от t_1 до t_2 вдоль траектории системы $\dot{x} = A$ и возведём результат в экспоненту. Находим

$$e^{\int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla, A \rangle d\tau} = \frac{(-A_1 x_2 + A_2 x_1)(t_2)}{(-A_1 x_2 + A_2 x_1)(t_1)} + \theta(r).$$

Сравнивая разложения Тейлора функции F и её градиента в точке \tilde{x} , приходим к оценке $\langle x, \nabla F \rangle = 2F + \theta(r^3)$. Подставляя все эти соотношения в (2.45),

получаем окончательно

$$H_1(t) = \frac{1}{-A_1x_2 + A_2x_1} \left\{ -Fx_2 + d_{AB} \left[-\int_{t_0}^t 2F d\tau - \frac{-Fx_2 + \theta(r^4)}{d_{AB}}(t_0) \right] \right\} + \theta(r^2) + \frac{d_{AB}(t)}{d_{AB}(t_0)} \left(\frac{(-A_1x_2 + A_2x_1)(t_0)}{(-A_1x_2 + A_2x_1)(t)} + \theta(r) \right) H_1(t_0). \quad (2.46)$$

Вычислим выражение (2.37). Подставляя $u = 0$, находим $H_1 = -G + \frac{B_1F}{A_1}$ на кривой γ_{AB} . В силу $x_1 = \theta(x_2^2)$ получаем оценку

$$H_1 = \theta(r^2) + \frac{-\frac{1}{2} \cos \phi x_2^2 + \theta(r^3)}{x_2 + \theta(r^2)} = -\frac{\cos \phi}{2} x_2 + \theta(x_2^2). \quad (2.47)$$

Таким образом, на γ_{AB}^+ имеем $H_1 > 0$, на γ_{AB}^- — $H_1 < 0$.

Пусть \hat{p} — точка на многообразии \mathcal{M}_- , $p = \pi_X(\hat{p})$ — её проекция на фазовую плоскость. Рассмотрим траекторию $\hat{\sigma}(t)$ системы (2.43), проходящую в момент времени $t = 0$ через точку \hat{p} . Тогда её проекция $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ в момент $t = 0$ проходит через p . В силу (2.3) траектория σ оборачивается по часовой стрелке вокруг точки \tilde{x} . Последняя является особой точкой типа фокуса или центра для системы $\dot{x} = A$. При каждом обороте вокруг \tilde{x} траектория σ пересекает кривые γ_{AB}^- и γ_{AB}^+ . Определим $t_- = \max\{t < 0 \mid \sigma(t) \in \gamma_{AB}^-\}$, $t_+ = \max\{t < 0 \mid \sigma(t) \in \gamma_{AB}^+\}$ как моменты времени, в которых траектория σ первый раз в попятном направлении времени пересекает кривые γ_{AB}^- и γ_{AB}^+ .

Следствие 3.1: На траектории $\hat{\sigma}$ имеем $H_1(t_+) > 0$, $H_1(t_-) < 0$. \square

Следовательно, определён момент времени $\bar{t} = \sup\{t < t_- \mid H_1(t) \geq 0\} = \max\{t < 0 \mid \hat{\sigma}(t) \in \mathcal{M}_+\} \in (t_+, t_-)$.

Следствие 2.2. Траектория $\hat{\sigma}$ тогда и только тогда удовлетворяет на интервале $t \in [\bar{t}, 0]$ принципу максимума Понтрягина (2.15), когда на отрезке $t \in (t_-, 0)$ траектории $\hat{\sigma}$ выполняется неравенство $H_1(t) \leq 0$. \square

Утверждение 2.15. Если для всех $t \in (t_-, 0)$ справедливо $C(\sigma(t)) < 0$, то траектория $\hat{\sigma}$ на интервале $t \in [\bar{t}, 0]$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.

Доказательство: На интервале $t \in (t_-, 0]$ уравнение (2.28) не имеет особенностей, и его решение для любого t из этого интервала можно записать в виде (2.29), подставив $t_0 = 0$ и $H_1(t_0) = 0$. Но на данном интервале имеем $d_{AB} < 0$ и $C < 0$ в силу условий утверждения. Следовательно, на $\hat{\sigma}$ имеем $H_1(t) < 0$ для всех $t \in (t_-, 0)$. Следствие 2.2 завершает доказательство. \square

Сопоставим каждой точке $\hat{p} \in \mathcal{M}_-$ в соответствие точку $\hat{\sigma}(t_+) \in \mathcal{M}_+$ и обозначим определённое таким образом отображение через $\hat{\mathbf{P}}_0; \hat{\mathbf{P}}_0 : \mathcal{M}_- \rightarrow \mathcal{M}_+$. В силу утверждения 2.8 отображение $\hat{\mathbf{P}}_0$ индуцирует отображение $\mathbf{P}_0 = q \circ \hat{\mathbf{P}}_0 \circ \pi_X : \{x \in U \mid d_{AB}(x) < 0\} \rightarrow \{x \in U \mid d_{AB}(x) > 0\}$. Здесь через q обозначена правая обратная к π_X , отображающая область $\{x \in U \mid d_{AB}(x) < 0\}$ на \mathcal{M}_- . Отображение \mathbf{P}_0 является отображением Пуанкаре между многообразиями \mathcal{M}_- и \mathcal{M}_+ для системы (2.43).

2.5.2 Производная отображения Пуанкаре

В этом параграфе мы вычислим производную отображения \mathbf{P}_0 . Пусть p — точка на \mathcal{K}_- , $q = \mathbf{P}_0(p)$ — её образ, \hat{p}, \hat{q} — поднятия точек p, q на \mathcal{M} .

Исследуем отображение \mathbf{P}_0 сначала в полярных координатах. Пусть $k \geq 1$ — целое число. Введём переменные $\bar{r} = r^{\frac{1}{k}}$ и $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{r}$. Обозначим координаты $r, \bar{r}, \varphi, \tilde{\psi}$ точки p через $r_p, \bar{r}_p, \varphi_p, \tilde{\psi}_p$, а точки q — через $r_q, \bar{r}_q, \varphi_q, \tilde{\psi}_q$. Определим $\varphi_\alpha = -\pi - \arctg \zeta_\alpha, \varphi_\beta = -\pi - \arctg \zeta_\beta$. Тогда переменная φ на множестве \mathcal{K}_- меняется в интервале $[\varphi_\beta, \varphi_\alpha]$.

Утверждение 2.16. Пусть функции A, B, F, G принадлежат классу C^m , где $m \geq 3$ (классу C^ω). Пусть существуют такие числа $\varphi'_\alpha, \varphi'_\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, что для всех $p \in \mathcal{K}_-$ справедливо $\varphi(q(p)) \in [\varphi'_\alpha, \varphi'_\beta]$, и для всех $\varphi \in [\varphi'_\alpha, \varphi'_\beta]$ справедливо $\sin \phi \cos^2 \varphi + \cos \phi \sin^2 \varphi < 0$. Тогда величины \bar{r}_q, φ_q продолжаются на отрезок $(\bar{r}, \varphi) \in \{0\} \times [\varphi_\beta, \varphi_\alpha]$ до функций класса C^{k-2} (класса C^ω) от \bar{r}_p, φ_p .

Доказательство: Поднятие \hat{p} точки p на многообразии \mathcal{M}_- определяется функциями ψ , задающихся уравнениями (2.21). В силу леммы Адамара функции $\frac{B_2 F - A_2 G}{r^2}, \frac{-B_1 F + A_1 G}{r^2}, \frac{d_{AB}}{r}$ продолжаются на $\{0\} \times [\varphi_\beta, \varphi_\alpha]$ до функций класса C^{k-2} (класса C^ω) от переменных r, φ , при этом $\frac{d_{AB}}{r} \neq 0$ в окрестности точки $(r, \varphi) = (0, -\pi)$. Поэтому $\frac{F}{d_{AB} r}$ в окрестности этой точки также функция класса C^{k-2} (класса C^ω) от r, φ . Отсюда следует, что функции $\tilde{\psi}_p$ продолжаются до функций класса C^{k-2} (класса C^ω) от переменных r_p, φ_p . Рассмотрим величину $\tilde{H}_1 = \frac{H_1}{r} = -\frac{G}{r} + \langle \tilde{\psi}, B \rangle$. По лемме Адамара соотношение $\frac{G}{r}$ является функцией класса C^{k-1} (класса C^ω) по r, φ . Таким образом, \tilde{H}_1 — функция класса C^{k-1} (класса C^ω) по $r, \varphi, \tilde{\psi}$.

Перепишем систему (2.43) в переменных $\bar{r} = r^{\frac{1}{k}}$, $\varphi, \tilde{\psi}_1 = \frac{\psi_1}{r}, \tilde{\psi}_2 = \frac{\psi_2}{r}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{r} &= \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{r^2}, \\
\dot{\bar{r}} &= \frac{1}{k} \frac{\bar{r}}{r} \dot{r} = \frac{\bar{r}}{k} \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{r^2}, \\
\dot{\varphi} &= \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \frac{A_2 x_1 - A_1 x_2}{x_1^2} = \frac{x_1 A_2 - x_2 A_1}{r^2}, \\
\dot{\tilde{\psi}} &= \frac{\dot{\psi}}{r} - \tilde{\psi} \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\nabla F}{r} - \sum_{\mu} \tilde{\psi}_{\mu} \nabla A_{\mu} - \tilde{\psi} \frac{\dot{r}}{r}, \\
\dot{\tilde{H}}_1 &= -\frac{\dot{G}}{r} + \frac{G \dot{r}}{r^2} + \langle \dot{\tilde{\psi}}, B \rangle + \langle \tilde{\psi}, \dot{B} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

По лемме Адамара величины $\frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{r^2}$, $\frac{x_1 A_2 - x_2 A_1}{r^2}$, $\frac{\nabla F}{r}$, $\frac{\dot{G}}{r}$, $\frac{G}{r}$ продолжаются до функций класса C^{k-2} (класса C^{ω}) от переменных r, φ , и, таким образом, по \bar{r}, φ . Следовательно, правая сторона системы (3.8) в переменных $\bar{r}, \varphi, \tilde{\psi}$ продолжается до функций класса C^{k-2} (класса C^{ω}) по этим переменным, также как и производная $\dot{\tilde{H}}_1$.

В силу теоремы о дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3. Пусть функции A, B, F и G принадлежат классу C^m , $m \geq 3$ (классу C^{ω}). На траекториях системы (3.8), проходящих через точки множества $\mathcal{K}_- \cup \{0\} \times [\varphi_{\beta}, \varphi_{\alpha}]$ в момент времени $t = 0$, переменные $\bar{r}, \varphi, \tilde{\psi}$ являются функциями класса C^{k-2} (класса C^{ω}) от \bar{r}_p, φ_p и времени t . \square

Следовательно, на этих траекториях величина \tilde{H}_1 является функцией класса C^{k-2} (класса C^{ω}) от \bar{r}_p, φ_p, t . Момент времени $\bar{t}(\bar{r}_p, \varphi_p)$, в который траектории пересекают многообразие \mathcal{M}_+ , неявно задаётся уравнением $\tilde{H}_1 = 0$. С помощью этого уравнения можно определить функцию $\bar{t}(\bar{r}_p, \varphi_p)$ также на $\{0\} \times [\varphi_{\beta}, \varphi_{\alpha}]$. Положим $\bar{t}(0, \varphi_p) = \sup\{t < 0 \mid \varphi(0, \varphi_p, t) \in [\varphi_{\beta}, \varphi_{\alpha}]\}$. Этот супремум существует вследствие непрерывности функции $\tilde{H}_1(r_p, \varphi_p, t)$ и он не меньше, чем $\limsup_{r_p \rightarrow 0} \varphi(r_p, \varphi_p, \bar{t}(r_p, \varphi_p))$.

В силу (2.28) имеем

$$\dot{\tilde{H}}_1 = \frac{\dot{H}_1 r - H_1 \dot{r}}{r^2} = \tilde{H}_1 \left(\frac{\dot{d}_{AB}}{d_{AB}} - \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{r^2} \right) + \frac{C}{d_{AB} r}.$$

Если справедлива оценка $d_{AB} = x_1 + \theta(r^2) = \pm\Theta(r)$, то последнее уравнение принимает вид

$$\dot{\tilde{H}}_1 = \tilde{H}_1 \left(\frac{A_1}{x_1} - \alpha - \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{r^2} + \theta(r) \right) + \frac{\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2 + \theta(r^3)}{2x_1 r + \theta(r^3)}.$$

Так как \tilde{H}_1 непрерывно дифференцируемо продолжается на $r = 0$, то при $r = 0$ уравнение переходит в

$$\dot{\tilde{H}}_1 = \tilde{H}_1 (\operatorname{tg} \varphi - \alpha \cos^2 \varphi) + \frac{\sin \phi \cos^2 \varphi + \cos \phi \sin^2 \varphi}{2 \cos \varphi}. \quad (2.49)$$

В силу условий доказываемого утверждения имеем для $\varphi_p \in [\varphi_\beta, \varphi_\alpha]$ оценку $\dot{\tilde{H}}_1(0, \varphi_p, \bar{t}(0, \varphi_p)) = \frac{\sin \phi \cos^2 \varphi(0, \varphi_p, \bar{t}(0, \varphi_p)) + \cos \phi \sin^2 \varphi(0, \varphi_p, \bar{t}(0, \varphi_p))}{2 \cos \varphi(0, \varphi_p, \bar{t}(0, \varphi_p))} = -\Theta(1) < 0$. Для $q(p)$, $p \in \mathcal{K}_-$ имеем оценки $C = -\Theta(r^2)$, $d_{AB} = \Theta(r)$, $\frac{C}{d_{AB}} = -\Theta(1)$. Таким образом, $\dot{\tilde{H}}_1(\bar{r}_p, \varphi_p, \bar{t}(\bar{r}_p, \varphi_p)) = -\Theta(1)$.

Следовательно, по теореме о неявной функции \bar{t} является функцией класса C^{k-2} (класса C^ω) от переменных \bar{r}_p, φ_p . Но тогда \bar{r}_q, φ_q , будучи функциями класса C^{k-2} (класса C^ω) от $\bar{r}_p, \varphi_p, \bar{t}$, являются функциями класса C^{k-2} (класса C^ω) по \bar{r}_p, φ_p . Утверждение 2.16 доказано. \square

Вычислим производные отображения \mathbf{P}_0 . Исследуем оператор переноса касательных векторов в касательном пространстве к расширенному фазовому пространству T^*X вдоль траекторий системы (2.43). Пусть $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (2.43). Пусть $\hat{v}_0 \in \mathbf{R}^4$ — вектор в касательном пространстве к точке $\hat{\sigma}(0) = (x_0, \psi_0)$. Величины x_0, ψ_0 являются двумерными векторами-столбцами. Эволюция \hat{v}_0 вдоль траектории $\hat{\sigma}(t)$ описывается уравнением в вариациях для системы (2.43)

$$\dot{\hat{v}}(t) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{\psi})}{\partial(x, \psi)} \hat{v}(t).$$

В других терминах, $\hat{v}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{v}(0)$, где $\mathbf{A}(t)$ — оператор переноса касательных векторов. Он подчиняется уравнению

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{\psi})}{\partial(x, \psi)}(t)\mathbf{A}(t), \quad \mathbf{A}(0) = E_4.$$

Мы вычислим действие матрицы $\mathbf{A}(t)$ на векторах некоторого базиса касательного пространства к точке (x_0, ψ_0) .

Пусть $\bar{r} = \sqrt{x_0^2 + \psi_0^2}$ — радиус в пространстве T^*X . Правая часть системы (2.43) принадлежит классу C^2 , поэтому

$$\frac{\partial(\dot{x}, \dot{\psi})}{\partial(x, \psi)}(x, \psi) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{\psi})}{\partial(x, \psi)}(0, 0) + \theta(\bar{r}).$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{A}(t) = \exp \left[\frac{\partial(\dot{x}, \dot{\psi})}{\partial(x, \psi)}(0, 0) t \right] + \theta(\bar{r}) = \mathbf{A}_0(t) + \theta(\bar{r}),$$

где $\mathbf{A}_0(t)$ — оператор переноса касательных векторов для линеаризации системы (2.43) в точке $(x, \psi) = (0, 0)$.

Пусть $\Phi(t)$ — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, порождаемое системой (2.43), а $\Phi_0(t)$ — соответствующее семейство для линеаризованной в точке $(0, 0)$ системы. $\Phi_0(t)$, с одной стороны, служит линеаризацией $\Phi(t)$ в $(0, 0)$ и, с другой стороны, совпадает с $\mathbf{A}_0(t)$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.17. Пусть $x_0 \in U$, пусть (x_0, ψ_0) — любое поднятие точки x_0 в T^*X . Пусть $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (2.43), проходящая через точку $(x_0, \psi_0) = \hat{\sigma}(0)$. Пусть $\hat{v}_0 \in \mathbf{R}^4$ — вектор в касательном пространстве к точке (x_0, ψ_0) , причём $\hat{v}_0 - (x_0, \psi_0)^T = \theta(\bar{r}^2)$.

Тогда для ограниченного t справедливо $\hat{v}(t) = \hat{\sigma}(t) + \theta(\bar{r}^2)$.

Доказательство: Имеем следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= \mathbf{A}(t)\hat{v}_0 = \mathbf{A}_0(t)\hat{v}_0 + \theta(\bar{r}^2) = \mathbf{A}_0(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \theta(\bar{r}^2) = \\ &= \Phi_0(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \theta(\bar{r}^2) = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \theta(\bar{r}^2) = \hat{\sigma}(t) + \theta(\bar{r}^2). \quad \square \end{aligned}$$

Допустим, что точка x_0 меняется в множестве \mathcal{K}_- . В силу уравнения (2.5) в множестве \mathcal{K}_- справедлива оценка $d_{AB} = -\Theta(r)$. Согласно утверждению 2.8 существует в точности одно поднятие (x_0, ψ_0) точки x_0 на \mathcal{M} . Оно задаётся уравнением (2.21). Вычислим главные члены функции (2.21) и её производных $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ в точке x_0 . Пусть φ — полярный угол точки x_0 . Так как $\varphi \in [\varphi_\alpha, \varphi_\beta]$, имеем $\cos \varphi \neq 0$. Находим

$$\psi = \frac{1}{d_{AB}} \begin{pmatrix} \theta(r^3) \\ -\frac{1}{2} \sin \phi x_1^2 + \frac{1}{2} \cos \phi x_2^2 + \theta(r^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(r^2) \\ -\frac{1}{2} \sin \phi x_1 + \frac{1}{2} \cos \phi \operatorname{tg} \varphi x_2 + \theta(r^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(B_2F - A_2G)}{d_{AB}} - \frac{(B_2F - A_2G)\frac{\partial}{\partial x_1}d_{AB}}{d_{AB}^2} = \\
&= \frac{\frac{\partial B_2}{\partial x_1}(\tilde{x})\left(\frac{1}{2}\sin\phi x_1^2 - \frac{1}{2}\cos\phi x_2^2\right) + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1}(\tilde{x})x_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(\tilde{x})x_2\right)\sin\phi x_1 + \theta(r^3)}{x_1 + \theta(r^2)} + \\
&+ \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}(\tilde{x})x_1^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}(\tilde{x})x_1x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}(\tilde{x})x_2^2\right) + x_1\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}x_1 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}x_2\right) + \theta(r^3)}{x_1 + \theta(r^2)} - \\
&- \frac{\left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1}(\tilde{x})x_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(\tilde{x})x_2\right)\left(\frac{1}{2}\sin\phi x_1^2 - \frac{1}{2}\cos\phi x_2^2\right) + \theta(r^4)}{x_1^2 + \theta(r^3)} + \\
&- x_1\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}(\tilde{x})x_1^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}(\tilde{x})x_1x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}(\tilde{x})x_2^2\right) + \theta(r^4)}{x_1^2 + \theta(r^3)} = \\
&= \frac{\partial B_2}{\partial x_1}\sin\phi x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial B_2}{\partial x_2}\left(\sin\phi x_2 + \cos\phi\frac{x_2^2}{x_1}\right) + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}x_1 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}x_2 + \theta(r^2), \\
\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}(B_2F - A_2G)}{d_{AB}} - \frac{(B_2F - A_2G)\frac{\partial}{\partial x_2}d_{AB}}{d_{AB}^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}(B_2F - A_2G)}{d_{AB}} + \theta(r^2) = \\
&= \frac{\frac{\partial B_2}{\partial x_2}(\tilde{x})\left(\frac{1}{2}\sin\phi x_1^2 - \frac{1}{2}\cos\phi x_2^2\right) - \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1}(\tilde{x})x_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(\tilde{x})x_2\right)\cos\phi x_2 + \theta(r^3)}{x_1 + \theta(r^2)} + \\
&+ \frac{x_1\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}(\tilde{x})x_1 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}(\tilde{x})x_2\right) + \theta(r^3)}{x_1 + \theta(r^2)} + \theta(r^2) = \\
&= -\frac{\partial B_2}{\partial x_1}\cos\phi x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial B_2}{\partial x_2}\left(\sin\phi x_1 - 3\cos\phi\frac{x_2^2}{x_1}\right) + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial x_2}x_1 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}x_2 + \theta(r^2), \\
\frac{\partial\psi_2}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}d_{AB} - F\frac{\partial}{\partial x}d_{AB}}{d_{AB}^2}B_1 - \frac{F}{d_{AB}}\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\frac{\partial G}{\partial x}d_{AB} - G\frac{\partial}{\partial x}d_{AB}}{d_{AB}^2}A_1 + \frac{G}{d_{AB}}\frac{\partial A_1}{\partial x} = \\
&= -\left(\left(\frac{\sin\phi x_1}{d_{AB}}, \frac{-\cos\phi x_2}{d_{AB}}\right) - \frac{\partial d_{AB}}{\partial x}\frac{\frac{1}{2}\sin\phi x_1^2 - \frac{1}{2}\cos\phi x_2^2}{d_{AB}^2} + \theta(r)\right)B_1 + \theta(r) = \\
&= (-\sin\phi, \cos\phi\operatorname{tg}\varphi) + (1, 0)\left(\frac{1}{2}\sin\phi - \frac{1}{2}\cos\phi\operatorname{tg}^2\varphi\right) + \theta(r) = \\
&= \left(-\frac{1}{2}\sin\phi - \frac{1}{2}\cos\phi\operatorname{tg}^2\varphi, \cos\phi\operatorname{tg}\varphi\right) + \theta(r). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} x &= \begin{pmatrix} \theta(r) & \theta(r) \\ -\frac{1}{2} \sin \phi - \frac{1}{2} \cos \phi \operatorname{tg}^2 \varphi & \cos \phi \operatorname{tg} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \theta(r^2) \\ -\frac{1}{2} \sin \phi x_1 - \frac{1}{2} \cos \phi \operatorname{tg} \varphi r \sin \varphi + \cos \phi \operatorname{tg} \varphi x_2 + \theta(r^2) \end{pmatrix} = \psi + \theta(r^2). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Пусть $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (2.43), проходящая в момент $t = 0$ через (x_0, ψ_0) . Пусть $v_0 = x_0 \in T_{x_0} X$ — касательный вектор в точке x_0 , компоненты которого совпадают с компонентами x_0 . Дифференциал поднятия $\pi_X^{-1} : \mathcal{K}_- \rightarrow \mathcal{M}$ отображает касательный вектор v_0 к X на некоторый касательный вектор \hat{v}_0 к T^*X . Пусть $\hat{v}_0(t)$ — результат переноса вектора \hat{v}_0 вдоль траектории $\hat{\sigma}(t)$ в силу системы (2.43).

Утверждение 2.18. *Для ограниченного t справедливо $\hat{v}_0(t) = \hat{\sigma}(t) + \theta(r^2)$.*

Доказательство: Покажем, что выполнены условия утверждения 2.17. Первая компонента вектора \hat{v}_0 совпадает с x_0 , а вторая равна $\frac{\partial \psi}{\partial x} x_0$, где $\psi(x)$ — уравнение (2.21), задающее многообразие \mathcal{M} . В силу уравнения (2.51) имеем $\frac{\partial \psi}{\partial x} x_0 = \psi_0 + \theta(r^2)$. Далее $\psi = \theta(r)$, отсюда $\bar{r} = \Theta(r)$. Применение утверждения 2.17 завершает доказательство. \square

Утверждение 2.19. $dH_1(\hat{v}_0(t)) = H_1(\hat{\sigma}(t)) + \theta(r^2)$.

Доказательство: Используя предыдущее утверждение, получаем

$$\begin{aligned} dH_1(\hat{v}_0(t)) &= \frac{\partial H_1}{\partial \psi}(t)(\psi(t) + \theta(r^2)) + \frac{\partial H_1}{\partial x}(t)(x(t) + \theta(r^2)) = \\ &= \langle B(t), \psi(t) \rangle + \theta(r^2) + \theta(r) \theta(r) = H_1(t) + \theta(r^2). \quad \square \end{aligned}$$

Пусть \hat{v}_1 — касательный вектор к T^*X в точке $(x_0, \psi_0) \in \mathcal{M}$, для которого $dx(\hat{v}_1) = dH_0(\hat{v}_1) = 0$, $dH_1(\hat{v}_1) = 1$. Иными словами, \hat{v}_1 касается слоя $x = x_0$ и уровня $H_0 = 0$, но трансверсален уровню $H_1 = 0$. Пусть $\hat{v}_1(t)$ — результат переноса вектора \hat{v}_1 вдоль траектории $\hat{\sigma}$ в силу системы (2.43).

Утверждение 2.20. *Для любого t справедливо $dx(\hat{v}_1(t)) = dH_0(\hat{v}_1(t)) = 0$.*

Доказательство: Система (2.43) переводит слой в слой, т.е. $x(t) = \pi_X(\hat{\sigma}(t))$ зависит только от x_0 . Отсюда находим $dx(\hat{v}_1(t)) = \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} dx(\hat{v}_1) = 0$. Функция H_0 является первым интегралом системы (2.43). Следовательно, $dH_0(\hat{v}_1(t)) = dH_0(\hat{v}_1) = 0$. \square

Для вычисления $dH_1(\hat{v}_1(t))$ воспользуемся уравнением (2.44). Имеем

$$\begin{aligned} dH_1(\hat{v}_1(t)) &= \frac{\partial H_1(t)}{\partial H_1(0)} dH_1(\hat{v}_1) = \frac{\partial H_1(t)}{\partial f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial f(0)} \left(\frac{\partial H_1(0)}{\partial f(0)} \right)^{-1} = \\ &= d_{AB}(t) \exp\left(-\int_0^t \langle \nabla, A \rangle d\tau\right) d_{AB}^{-1}(0). \end{aligned}$$

Построим с помощью \hat{v}_1 касательный вектор \hat{v}_2 к \mathcal{M} в точке (x_0, ψ_0) , линейно независимый от \hat{v}_0 . Рассмотрим касательный к траектории $\hat{\sigma}$ вектор фазовой скорости $\dot{\hat{\sigma}}(0)$. Оператор $\mathbf{A}(t)$ переводит $\dot{\hat{\sigma}}(0)$ в вектор $\dot{\hat{\sigma}}(t)$. Исследуем линейную комбинацию $\hat{v}_2 = \dot{\hat{\sigma}}(0) - \dot{H}_1(0)\hat{v}_1$. Имеем $dH_1(\hat{v}_2) = \dot{H}_1(0) - \dot{H}_1(0) = 0$, $dH_0(\hat{v}_2) = 0 - 0 = 0$. Следовательно, \hat{v}_2 касателен к \mathcal{M} . Покажем, что \hat{v}_0 и \hat{v}_2 линейно независимы. Вычислим проекцию v_2 вектора \hat{v}_2 на касательное пространство к фазовой плоскости. Имеем $dx(\hat{v}_0) = v_0 = x_0$, $dx(\hat{v}_2) = \dot{x} - \dot{H}_1(0)dx(\hat{v}_1) = \dot{x} = A(x_0)$. Но векторы $A(x)$ и x линейно зависимы только при $x = \tilde{x}$, потому что A в \tilde{x} имеет особенность типа фокуса или центра. Обозначим $\mathbf{A}(t)\hat{v}_2 = \dot{\hat{\sigma}}(t) - \dot{H}_1(0)\hat{v}_1(t)$ через $\hat{v}_2(t)$. Тогда имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dH_0(\hat{v}_2(t)) &= dH_0(\hat{v}_2) = 0, \\ dH_1(\hat{v}_2(t)) &= \dot{H}_1(t) - \dot{H}_1(0)dH_1(\hat{v}_1(t)) = \\ &= \dot{H}_1(t) - \dot{H}_1(0)d_{AB}(t) \exp\left(-\int_0^t \langle \nabla, A \rangle d\tau\right) d_{AB}^{-1}(0). \quad (2.52) \end{aligned}$$

Пусть $H_1(\hat{\sigma}(\bar{t})) = 0$ для некоторого момента времени \bar{t} . Тогда $\hat{\sigma}(\bar{t}) \in \mathcal{M}$. Допустим, что $C(\hat{\sigma}(\bar{t})) \neq 0$. Тогда $dH_1(\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})) = \dot{H}_1(\bar{t}) = \frac{C}{d_{AB}} \neq 0$, и вектор фазовой скорости $\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})$ не касается многообразия \mathcal{M} . Следовательно, он дополняет базис пространства $T_{\hat{\sigma}(\bar{t})}\mathcal{M}$ до базиса касательного пространства к уровню $H_0 = 0$ в точке $\hat{\sigma}(\bar{t})$. Любой вектор, касательный к уровню $H_0 = 0$, разлагается в линейную комбинацию вектора, касательного к \mathcal{M} и вектора $\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})$. Поэтому векторы $\hat{v}_0(\bar{t})$ и $\hat{v}_2(\bar{t})$, касательные к уровню $H_0 = 0$, можно спроектировать вдоль вектора $\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})$ на касательное пространство к многообразию \mathcal{M} . Используя (2.52),

получаем для проекций $\hat{v}'_0(\bar{t}), \hat{v}'_2(\bar{t})$

$$\begin{aligned}\hat{v}'_0(\bar{t}) &= \hat{v}_0(\bar{t}) - \frac{dH_1(\hat{v}_0(\bar{t}))}{\dot{H}_1(\bar{t})} \dot{\hat{\sigma}}(\bar{t}), \\ \hat{v}'_2(\bar{t}) &= \hat{v}_2(\bar{t}) - \frac{dH_1(\hat{v}_2(\bar{t}))}{\dot{H}_1(\bar{t})} \dot{\hat{\sigma}}(\bar{t}) = \\ &= \dot{\hat{\sigma}}(\bar{t}) - \dot{H}_1(0) \hat{v}_1(\bar{t}) - \dot{\hat{\sigma}}(\bar{t}) + \frac{\dot{H}_1(0) d_{AB}(\bar{t}) \exp(-\int_0^{\bar{t}} \langle \nabla, A \rangle d\tau)}{d_{AB}(0) \dot{H}_1(\bar{t})} \dot{\hat{\sigma}}(\bar{t}) = \\ &= \dot{H}_1(0) \left(-\hat{v}_1(\bar{t}) + \frac{d_{AB}(\bar{t})}{d_{AB}(0)} \exp\left(-\int_0^{\bar{t}} \langle \nabla, A \rangle d\tau\right) \frac{\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})}{\dot{H}_1(\bar{t})} \right).\end{aligned}$$

Коэффициенты при $\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})$ определяются, соответственно, двумя уравнениями $dH_1(\hat{v}'_0(\bar{t})) = 0$ и $dH_1(\hat{v}'_2(\bar{t})) = 0$. Вычислим первые две компоненты этих векторов. В точках $\hat{\sigma}(0), \hat{\sigma}(\bar{t})$ имеем $H_1 = 0$, откуда $\dot{H}_1 = \frac{C}{d_{AB}}$. Для вычисления первых компонент вектора $\hat{v}'_0(\bar{t})$ используем утверждения 2.18 и 2.19. Для вычисления $dx(\hat{v}'_2(\bar{t}))$ используем утверждение 2.20.

$$\begin{aligned}dx(\hat{v}'_0(\bar{t})) &= dx(\hat{\sigma}(\bar{t})) + \theta(r^2) - \frac{(H_1(\hat{\sigma}(\bar{t})) + \theta(r^2)) d_{AB}(\hat{\sigma}(\bar{t}))}{C(\hat{\sigma}(\bar{t}))} dx(\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})) = \\ &= x(\bar{t}) + \theta(r^2) - \frac{\theta(r^4)}{C(\bar{t})}, \\ dx(\hat{v}'_2(\bar{t})) &= \frac{C(x_0)}{d_{AB}(x_0)} \left(-dx(\hat{v}_1) + \frac{d_{AB}(\bar{t})}{d_{AB}(0)} \exp\left(-\int_0^{\bar{t}} \langle \nabla, A \rangle d\tau\right) \frac{d_{AB}(\bar{t})}{C(\bar{t})} dx(\dot{\hat{\sigma}}(\bar{t})) \right) \\ &= \frac{C(0)}{C(\bar{t})} \frac{d_{AB}^2(\bar{t})}{d_{AB}^2(0)} \exp\left(-\int_0^{\bar{t}} \langle \nabla, A \rangle d\tau\right) A(\bar{t}).\end{aligned}$$

Обозначим проекцию $\pi_X \circ \hat{\sigma}$ траектории $\hat{\sigma}$ через σ . Если варьировать исходную точку x_0 , то момент времени \bar{t} пересечения траекторией $\hat{\sigma}$ многообразия \mathcal{M} и точка $\sigma(\bar{t})$ также будут меняться.

Отображение Пуанкаре \mathbf{P}_0 переводит точку $x_0 = \sigma(0) \in U$ в точку $\sigma(\bar{t}) \in U$. Его дифференциал переводит векторы $dx(\hat{v}_0) = x_0, dx(\hat{v}_2) = A(x_0) \in T_{x_0}X$ в векторы $dx(\hat{v}'_0(\bar{t})), dx(\hat{v}'_2(\bar{t})) \in T_{\sigma(\bar{t})}X$. Следовательно, его можно представить как произведение матрицы, составленной из векторов $dx(\hat{v}'_0(\bar{t})), dx(\hat{v}'_2(\bar{t}))$, на обратную от матрицы, составленной из векторов $x_0, A(x_0)$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.21. Пусть на \mathcal{K}_- справедлива оценка $C(\sigma(\bar{t})) = -\Theta(r^2)$. Тогда производная отображения \mathbf{P}_0 в точке $\sigma(0)$ задаётся уравнением

$$\frac{\partial x(\bar{t})}{\partial x_0} = \frac{1}{x_1(0)A_2(0) - A_1(0)x_2(0)} \begin{pmatrix} x_1(\bar{t}) + \theta(r^2) & kA_1(\bar{t}) \\ x_2(\bar{t}) + \theta(r^2) & kA_2(\bar{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(0) & -A_1(0) \\ -x_2(0) & x_1(0) \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

где через k обозначена величина $\frac{C(\sigma(0))}{C(\sigma(\bar{t}))} \frac{d_{AB}^2(\sigma(\bar{t}))}{d_{AB}^2(\sigma(0))} \exp\left(-\int_0^{\bar{t}} \langle \nabla, A \rangle d\tau\right)$. \square

Утверждение 2.22. Если $C(\sigma(\bar{t})) \neq 0$, то $x(\bar{t})$ в точке x_0 дважды непрерывно дифференцируемо по x_0 .

Доказательство: Правая часть уравнения (2.21) принадлежит классу C^3 по x . Поэтому ψ_0 является класса C^3 по x_0 . Правая часть системы (2.43) принадлежит классу C^2 по x, ψ . Следовательно, по теореме о непрерывной дифференцируемости решений дифференциального уравнения от начальных данных, переменные x, ψ на этих решениях дважды непрерывно дифференцируемо зависят от времени t и начальных данных x_0, ψ_0 , и, таким образом, от t и x_0 . То же справедливо для функции H_1 на этих решениях, поскольку $H_1(x, \psi) \in C^3$. Момент времени \bar{t} пересечения многообразия \mathcal{M} задаётся уравнением $H_1(t, x_0) = 0$. В силу условий утверждения имеем $\frac{\partial H_1}{\partial t}(\bar{t}) = \dot{H}_1(\bar{t}) = \frac{C}{d_{AB}}(\bar{t}) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции \bar{t} дважды непрерывно дифференцируемо по x_0 . Следовательно, $x(\bar{t}(x_0), x_0)$ также принадлежит классу C^2 по x_0 . \square

2.5.3 Поведение системы при $u = 1$

В этом параграфе мы исследуем гамильтонову систему

$$\dot{x} = A + B, \quad \dot{\psi} = \nabla(F + G) - \sum_{\mu} (\psi_{\mu} \nabla(A_{\mu} + B_{\mu})) \quad (2.54)$$

с гамильтонианом $H_0 + H_1$, которая получается из системы (2.1), (2.17) подстановкой $u = 1$.

Пусть \hat{p} — точка на многообразии \mathcal{M}_- , $\hat{\sigma}$ — траектория системы (2.54), проходящая через \hat{p} в момент времени $t = 0$, $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ — её проекция на фазовую плоскость.

Утверждение 2.23. Пусть при всех таких $t < 0$, что $\sigma(t) \in U$, выполняется неравенство $C(\sigma(t)) > 0$. Тогда траектория $\hat{\sigma}$ при всех таких $t \leq 0$, что $\sigma(t) \in U$, удовлетворяет принципу максимума (2.15).

Доказательство: При всех таких $t \leq 0$, что $\sigma(t) \in U$, на траектории σ имеем $d_{AB} < 0$. Следовательно, уравнение (2.28) не имеет особенностей при

$t \leq 0$, и функция $H_1(t)$ на $\hat{\sigma}$ задаётся уравнением (2.29), в которое подставлено $H_1(t_0) = 0, t_0 = 0$. В силу условий утверждения при $t < 0$ имеем $\frac{C}{d_{AB}}(\sigma(t)) < 0$. Поэтому выражение (2.29) положительно при $t < 0$, и управление $u = 1$ на траектории $\hat{\sigma}$ оптимально в соответствии с (2.15). \square

Исследуем траектории $\hat{\sigma}$ системы (2.54), проходящие через точки множества $\hat{\mathcal{K}}$, определённого в параграфе 2.4, в момент времени $t = 0$. Параметризуем их совокупность значениями переменных x_1, ζ в точках $\hat{\sigma}(0)$. Эти траектории лежат на нулевом уровне функции $H_0 + H_1$ и параметризованы временем t . В силу теоремы о дифференцируемой зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных и утверждения 2.9 переменные x, ψ на гиперповерхности, образованной совокупностью этих траекторий, являются функциями класса C^2 от переменных x_1, ζ, t . Следовательно, H_1 как функция от x_1, ζ, t на совокупности этих траекторий также принадлежит классу C^2 . Определим функцию $\tilde{H}_1(x_1, \zeta, t)$ следующим образом: $\tilde{H}_1 = \frac{H_1}{t}$ при $t \neq 0$ и $\tilde{H}_1 = \dot{H}_1$ при $t = 0$. Точки $\hat{\sigma}(0)$ лежат на многообразии \mathcal{M} . Таким образом, $H_1 = 0$ при $t = 0$, и по лемме Адамара функция \tilde{H}_1 принадлежит классу C^1 по совокупности переменных x_1, ζ, t .

Допустим, что $\sin \phi \neq 0$. Пусть $\zeta_* \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$ произвольно. Вычислим частные производные от функции \tilde{H}_1 в точке $(x_1, \zeta, t) = (0, \zeta_*, 0)$. Эта точка в системе переменных x, ψ соответствует началу координат. В силу утверждения 2.10 в ней справедливо $\tilde{H}_1 = \dot{H}_1 = 0$. С учётом (2.5), (2.26) и (2.30) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_1} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\dot{H}_1}{x_1}(x_1, \zeta_*, 0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{C}{x_1 d_{AB}}(x_1, \zeta_*, 0) = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2)}{x_1^2}(x_1, \zeta_*, 0) = \frac{1}{2}(\sin \phi + \cos \phi \zeta_*^2), \\ \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \zeta} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \ddot{H}_1 = \frac{1}{2} \sin \phi \neq 0. \end{aligned}$$

По теореме о неявной функции справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.24. *Допустим, что $\sin \phi \neq 0$. Тогда в окрестности точки $(x_1, \zeta) = (0, \zeta_*)$ существует единственная функция $t_*(x_1, \zeta)$, такая, что справедливо тождество $\tilde{H}_1(x_1, \zeta, t_*(x_1, \zeta)) \equiv 0$ и $t_*(0, \zeta_*) = 0$. Эта функция принадлежит классу C^1 . Её производные имеют вид*

$$\frac{\partial t_*}{\partial x_1}(0, \zeta_*) = -1 - \operatorname{ctg} \phi \zeta_*^2, \quad \frac{\partial t_*}{\partial \zeta}(0, \zeta_*) = 0. \quad \square \quad (2.55)$$

Следовательно, мы можем выбрать окрестность U настолько малой, чтобы не существовало таких значений x_1, ζ, t , что $t \neq t_*(x_1, \zeta), \tilde{H}_1(x_1, \zeta, t) = 0$, и точка

$\sigma(t)$ лежит в окрестности U , где σ — проекция траектории $\hat{\sigma}$, соответствующей значениям x_1, ζ .

Рассмотрим произвольную точку $p \in \mathcal{K}$ с координатами $x_1(p), \zeta(p)$. Обозначим траекторию системы (2.54), проходящую через поднятие \hat{p} точки p на $\hat{\mathcal{K}}$ в момент времени $t = 0$, через $\hat{\sigma}$, а её проекцию на фазовую плоскость — через σ .

Утверждение 2.25. Пусть существует такое число $\varepsilon > 0$, что при всех $t \in (-\varepsilon, 0)$ справедливо неравенство $\frac{C}{d_{AB}}(\sigma(t)) < 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $t_*(x_1(p), \zeta(p)) > 0$, то на траектории $\hat{\sigma}$ принцип максимума (2.15) удовлетворён при всех $t \leq 0$, таких, что $\sigma(t)$ лежит в окрестности U .

2. Если $t_*(x_1(p), \zeta(p)) < 0$, то на траектории $\hat{\sigma}$ принцип максимума (2.15) удовлетворён при всех $t \in [t_*, 0]$.

Доказательство: Пусть $t_* \neq 0$. Тогда точка p не совпадает с \tilde{x} . Отсюда следует $d_{AB}(\sigma(t)) \neq 0$ для всех $t \in (-\varepsilon, 0]$, и уравнение (2.28) не имеет особенностей на этом интервале. Поэтому его решение даётся выражением (2.29) при $t_0 = 0$, $H_1(t_0) = 0$. Это выражение в силу условий утверждения положительно при $t \in (-\varepsilon, 0)$. Таким образом, $H_1(t) > 0$ при $t \in (-\varepsilon, 0)$.

В случае $t_*(x_1(p), \zeta(p)) > 0$ функция $H_1(t)$ на траектории $\hat{\sigma}$ при $t < 0$ обращается в нуль, если $\sigma(t) \in U$. Значит, она во всех этих точках имеет тот же знак, что и на интервале $t \in (-\varepsilon, 0)$, т.е. положительна.

В случае $t_*(x_1(p), \zeta(p)) < 0$ функция $H_1(t)$ на траектории $\hat{\sigma}$ не обращается в нуль при $t \in (t_*, 0)$. Значит, она в этих точках имеет положительный знак.

В соответствии с принципом максимума управление $u = 1$ на рассмотренных интервалах оптимально. \square

Из утверждения 2.24 находим следующую оценку функции t_* на множестве \mathcal{K} :

$$t_*(x_1, \zeta) = x_1(-1 - \operatorname{ctg}\phi \zeta^2) + \tau(x_1, \zeta) = -\frac{2C}{d_{AB} \sin \phi} + \theta(x_1^2) + \tau(x_1, \zeta) = \theta(r), \quad (2.56)$$

где $\tau \in C^1$, и отношение $\frac{\tau}{x_1}$ равномерно стремится к нулю при $x_1 \rightarrow 0$.

Исследуем зависимость $t_*(x_1, \zeta)$, исходя из уравнения (2.28).

Утверждение 2.26. Допустим, что $\phi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, и пусть $\zeta_\alpha, \zeta_\beta$ имеют один и тот же знак. Тогда на множестве $\mathcal{K}_- \cup \mathcal{K}_+$ справедливы оценки

$$-\operatorname{ctg}\phi \zeta(0)\zeta(t_*) = 1 + \theta(r(0)), \quad x_2(t_*) = x_2(0) + \theta(x_1^2(0)).$$

Доказательство: Имеем $\operatorname{ctg}\phi > 0$, поэтому $t_* = -\Theta(x_1(0)) = \pm\Theta(r(0))$. Далее, $\dot{r} = \theta(1)$, поэтому на интервале $t \in [0, t_*]$ справедлива оценка $r(t) =$

$\theta(r(0)) = \theta(x_1(0))$. В силу условий утверждения справедлива оценка $\zeta(0) = \pm\Theta(1)$.

Первое доказываемое уравнение справедливо в силу

$$x_2(t_*) = x_2(0) + \int_0^{t_*} \dot{x}_2 dt = x_2(0) + \theta(r(0))t_* = x_2(0) + \theta(x_1^2(0)).$$

Далее, в силу (2.56) имеем

$$\begin{aligned} x_1(t_*) &= x_1(0) + \int_0^{t_*} (1 + \theta(r))d\tau = x_1(0) + t_* + \theta(r^2(0)) = \\ &= -x_1(0)\operatorname{ctg}\phi\zeta^2(0) + \tau(x_1(0), \zeta(0)) + \theta(r^2(0)) = \pm\Theta(r(0)), \\ x_1(t_*) - x_1(0) &= t_* + \theta(r^2(0)) = \pm\Theta(r(0)), \end{aligned}$$

в зависимости от знака $x_1(0)$. Отсюда следует оценка $d_{AB}(t_*) = \pm\Theta(r(0))$.

Подставим в уравнение (2.37) значение $V = e_1 = (1, 0)^T$. Это допустимо, так как $\langle Q, V \rangle = A_1 + B_1 = 1 + \theta(r) \neq 0$. Функция H_1 представится в виде $H_1 = \frac{B_1F - A_1G}{A_1 + B_1} + d_{AB}f = F + \theta(r^3) + d_{AB}f$. При $t = 0$ и $t = t_*$ имеем $H_1(t) = 0$, $d_{AB}(t) = \pm\Theta(r(0))$, поэтому $f(0) = -\frac{F}{d_{AB}} + \theta(r^2) = \frac{-\sin\phi x_1^2(0) + \cos\phi x_2^2(0)}{2x_1(0)} + \theta(r^2) = \theta(r)$, $f(t_*) = \frac{-\sin\phi x_1^2(t_*) + \cos\phi x_2^2(t_*)}{2x_1(t_*)} + \theta(r^2)$.

Уравнение (2.42) принимает вид

$$e^{\int_0^t \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} d\tau} \left(\dot{f} + \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} f \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} d\tau} f \right) = e^{\int_0^t \operatorname{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} d\tau} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{F + G}{A_1 + B_1} \right) = \theta(r).$$

Отсюда получаем оценку

$$e^{\int_0^{t_*} \theta(1)d\tau} f(t_*) = f(0) + \theta(r(0))t_* \quad \Rightarrow \quad f(t_*) = f(0) + \theta(r^2(0)).$$

Подставляя выражения для $f(0)$ и $f(t_*)$ и используя уже доказанное первое уравнение утверждения и оценку $x_1(t_*) - x_1(0) = \pm\Theta(r(0))$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\sin\phi x_1^2(0) - \cos\phi x_2^2(0)}{x_1(0)} &= \frac{\sin\phi x_1^2(t_*) - \cos\phi x_2^2(t_*)}{x_1(t_*)} + \theta(r^2), \\ \cos\phi x_2^2(0) \left(\frac{1}{x_1(t_*)} - \frac{1}{x_1(0)} \right) &= \sin\phi (x_1(t_*) - x_1(0)) + \theta(r^2), \\ -\operatorname{ctg}\phi \frac{x_2(0)x_2(t_*)}{x_1(0)x_1(t_*)} &= 1 + \theta(r). \quad \square \end{aligned}$$

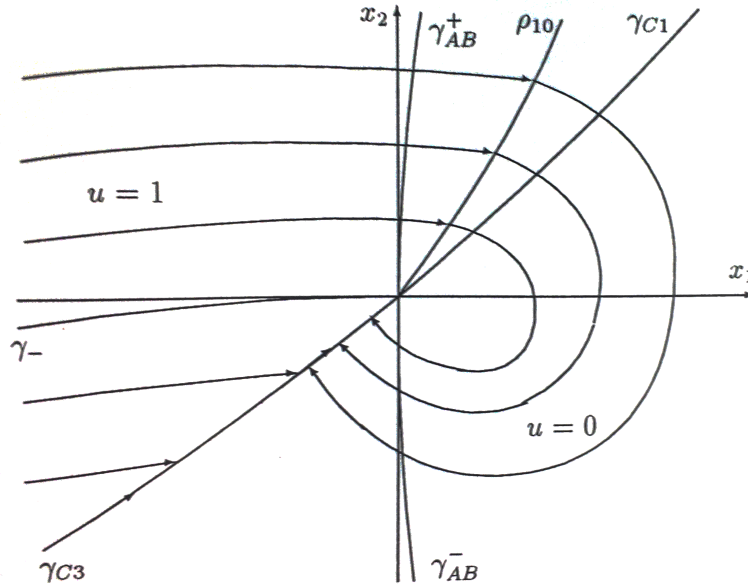


Рис. 1: Синтез с особым режимом

2.6 Случай $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Теорема 2.2. Пусть $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Тогда оптимальный синтез для задачи (2.1), (2.2) существует в окрестности точки \tilde{x} и имеет следующую структуру. В третьем ортанте имеется особый режим первого порядка, в первом же — кривая переключения с $u = 1$ на $u = 0$. Обе кривые расположены трансверсально к осям и стыкуются в точке \tilde{x} , которая также является особым режимом первого порядка. Существует в точности одна траектория γ_- , прямо попадающая в терминальную точку \tilde{x} за конечное время. Все другие траектории за конечное время попадают на особый режим и по нему асимптотически приближаются к \tilde{x} (см. рис. 2.6).

Построим лагранжево сечение расслоения T^*X , являющееся интегральным многообразием системы (2.1), (2.17). В параграфе 2.4 было доказано, что в случае $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ на множестве \mathcal{M} существуют особые режимы $\hat{\gamma}_{C3}$, $\hat{\gamma}_{C4}$. По проекции γ_{C3} первого из них фазовая точка приближается к \tilde{x} , по γ_{C4} — удаляется. Построим интегральное многообразие, исходя из особого режима $\hat{\gamma}_{C3}$. Покажем, что совокупность неособых траекторий системы (2.1), (2.17), выходящих на особый режим $\hat{\gamma}_{C3}$, образует сечение.

Утверждение 2.27. Пусть $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Траектории системы (2.54), выходящие на $\hat{\gamma}_{C3}$ в момент времени $t = 0$, при $t \leq 0$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина, пока их проекции находятся в окрестности U .

Доказательство: Проекция рассматриваемых траекторий на фазовую плоскость при $t \leq 0$ заметают область между кривой γ_{C3} и траекторией γ_- системы

$\dot{x} = A + B$, проходящей через точку \tilde{x} (см. рис. 2.6). В этой области в силу утверждения 2.11 справедливо неравенство $C > 0$. Следовательно, удовлетворены условия утверждения 2.23, которое завершает доказательство. \square

Покажем, что проекции траекторий системы (2.43), выходящих на $\hat{\gamma}_{C3}$, закрывают остальную часть окрестности U . Пусть \hat{p} — точка на $\hat{\gamma}_{C3}$, а $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (2.43), проходящая через \hat{p} в момент времени $t = 0$. Проекция $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ этой траектории в момент $t = 0$ проходит через проекцию p точки \hat{p} и оборачивается вокруг точки \tilde{x} , так как \tilde{x} — фокус или центр. В силу соотношений (2.3) вращение происходит по часовой стрелке. Проследим $\sigma(t)$ для $t < 0$. Определим $t_- = \max\{t < 0 \mid \sigma(t) \in \gamma_{AB}^-\}$, $t_+ = \max\{t < 0 \mid \sigma(t) \in \gamma_{AB}^+\}$, $\bar{t} = \sup\{t < t_- \mid H_1(t) \geq 0\}$. В силу следствия 3.1 имеем $\bar{t} \in (t_+, t_-)$. Следующее утверждение следует из утверждений 2.11 и 2.15.

Следствие 2.4. *Траектория $\hat{\sigma}$ на интервале $t \in [\bar{t}, 0]$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. \square*

Допустим, что $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Исследуем H_1 как функцию от времени на траектории $\hat{\sigma}$. Эволюция функции H_1 в силу системы (2.43) на нулевом уровне гамильтониана H_0 описывается уравнением (2.46). Подставляя $t_0 = 0$, $H_1(t_0) = 0$, $H_1(\bar{t}) = 0$ в (2.46) и учитывая $F = \frac{1}{2}(\sin \phi x_1^2 - \cos \phi x_2^2) + \theta(r^3) = \Theta(r^2)$, $t_- = -\Theta(1)$, $\frac{x_2}{d_{AB}}(\sigma(0)) = \Theta(1)$ и $d_{AB} = x_1 + \theta(r^2)$, получим

$$0 = -\Theta(r^{-2})\{-x_2(\bar{t})\Theta(r^2) + x_1(\bar{t})\Theta(r^2)\} + \theta(r^2) \Rightarrow x_2(\bar{t}) = \Theta(1)x_1(\bar{t}). \quad (2.57)$$

Таким образом, точка $\sigma(\bar{t})$ лежит в первом ортанте.

Пусть проекция $\sigma(t)$ траектории $\hat{\sigma}$ пересекает кривые γ_{C1} и γ_{C4} в моменты времени t_1, t_4 соответственно, $t_+ < t_1 < t_4 < t_-$.

Утверждение 2.28. *Для $t \in [t_1, t_4]$ имеем $H_1(t) = -\Theta(r)$.*

Доказательство: На γ_{C4} имеем $x_2 = -\Theta(r)$, $x_1 = \Theta(r)$. Подставляя эти соотношения в (2.46) и полагая $t_0 = 0, t = t_4$, получим

$$H_1(t_4) = \frac{1}{-\Theta(r^2)} \{ \Theta(r^3) + \Theta(r) [\Theta(r^2) + \Theta(r^2)] \} + \theta(r^2) = -\Theta(r).$$

Пусть $t \in [t_1, t_4)$. На интервале $[t_1, t_4]$ уравнение (2.28) не имеет особенностей, и $H_1(t)$ определяется выражением (2.29):

$$H_1(t) = e^{\int_{t_4}^t \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\tau} \left[- \int_t^{t_4} e^{-\int_{t_4}^{\tau} \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\sigma} \frac{C}{d_{AB}} d\tau + H_1(t_4) \right].$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в экспоненте. Подставляя $Q = A$ и учитывая, что на интервале $[t, t_4]$ справедливо $d_{AB} = x_1 + \theta(r^2) = \Theta(r)$, находим $\frac{\dot{d}_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-\dot{A}_2 B_1 + \theta(r^2)}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_1 + \theta(r^2)}{x_1} - \frac{\alpha x_1 + \theta(r^2)}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \theta(r) = \theta(1)$. Далее, на интервале $[t, t_4]$ имеем $C \geq 0$. Поэтому интеграл в угловых скобках положительный и имеет порядок $\theta(r)$. Так как $H_1(t_4) = -\Theta(r)$, то сами угловые скобки, и, следовательно, $H_1(t)$, имеют порядок $-\Theta(r)$. \square

Утверждение 2.29. $C(\bar{t}) = -\Theta(r^2)$.

Доказательство: В силу (2.57) точка $\sigma(\bar{t})$ лежит в первом ортанте, и найдутся такие отрицательные числа $\zeta_\alpha, \zeta_\beta$, независимые от начальной точки $p \in \gamma_{C3}$ траектории σ , что значения $\zeta(\sigma(\bar{t}))$ лежат в интервале $[\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. Кроме того, имеем неравенство $\bar{t} < t_4$. Тогда из утверждения 2.28 следует, что $\bar{t} < t_1$, и $\int_{\bar{t}}^{t_1} \dot{H}_1(t) dt = H_1(t_1) = -\Theta(r)$. На траектории $\hat{\sigma}$ в силу утверждения 2.14 имеем $\psi = \theta(r)$. В силу (2.23) отсюда следует $\dot{H}_1 = \theta(r)$. Поэтому $t_1 - \bar{t} = \Theta(1)$. Отсюда $\varphi(\sigma(\bar{t})) = \varphi(\sigma(t_1)) + \Theta(1)$, и из (2.33) следует утверждение. \square

Утверждение 2.30. Если точка \hat{p} пробегает особый режим $\hat{\gamma}_{C3}$, то соответствующая точка $q(p) = \sigma(\bar{t})$ пробегает некоторую кривую ρ_{10} класса C^2 , расположенную в первом ортанте и стыкующуюся в точке \tilde{x} с кривой γ_{C3} . Существуют такие отрицательные числа $\zeta_\alpha, \zeta_\beta$, что для всех точек $q \in \rho_{10}$ справедливо $\zeta(q) \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$.

Доказательство: По утверждению 2.11 кривая γ_{C3} принадлежит классу C^2 . В силу утверждения 2.29 выполнены условия утверждения 2.22. Отсюда следует, что кривая ρ_{10} также принадлежит классу C^2 . В силу утверждения 2.13 для расстояний от начала координат имеем оценку $r(\sigma(\bar{t})) = \Theta(r(p))$. Следовательно, если точка p стремится к \tilde{x} , то $\sigma(\bar{t})$ также стремится к \tilde{x} . Существование $\zeta_\alpha, \zeta_\beta$ вытекает из (2.57). \square

Обозначим координаты точки $p \in \gamma_{C3}$ для краткости через x_{10}, x_{20} , а координаты соответствующей точки $q \in \rho_{10}$ — через x_{11}, x_{21} .

Утверждение 2.31. Наклон $\frac{dx_{21}}{dx_{11}}$ кривой ρ_{10} имеет предел при $x \rightarrow \tilde{x}$.

Доказательство: Параметризуем кривую γ_{C3} переменной x_{10} . Тогда производная $\frac{dx_2}{dx_1}$ задаётся уравнением

$$\frac{dx_{21}}{dx_{11}} = \frac{dx_{21}}{dx_{10}} = \frac{\frac{\partial x_{21}}{\partial x_{10}} + \frac{\partial x_{21}}{\partial x_{20}} \frac{dx_{20}}{dx_{10}}}{\frac{\partial x_{11}}{\partial x_{10}} + \frac{\partial x_{11}}{\partial x_{20}} \frac{dx_{20}}{dx_{10}}}.$$

В силу утверждения 2.29 выполнены условия утверждения 2.21, и производные $\frac{\partial(x_{11}, x_{21})}{\partial(x_{10}, x_{20})}$ задаются уравнениями (2.53). Производная $\frac{dx_{20}}{dx_{10}}$ же задаётся уравнением (2.35). Подставляя эти значения в уравнение для $\frac{dx_2}{dx_1}$, получим

$$\frac{dx_{21}}{dx_{11}} = \frac{\frac{\partial x_{21}}{\partial x_{10}} x_{10} + \frac{\partial x_{21}}{\partial x_{20}} x_{20} + \theta(r^2)}{\frac{\partial x_{11}}{\partial x_{10}} x_{10} + \frac{\partial x_{11}}{\partial x_{20}} x_{20} + \theta(r^2)} = \frac{x_{21} + \theta(r^2)}{x_{11} + \theta(r^2)} = \frac{x_{21}}{x_{11}} + \theta(r) = \Theta(1). \quad (2.58)$$

Следовательно, кривая ρ_{10} удовлетворяет условиям утверждения 2.6, применение которого завершает доказательство. \square

Утверждение 2.32. *Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, выходящих из точек кривой ρ_{10} , и поток траекторий системы $\dot{x} = A+B$, входящих в точки кривой ρ_{10} , не пересекаются друг с другом. Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, входящих в точки кривой γ_{C3} , и поток траекторий системы $\dot{x} = A+B$, входящих в точки кривой γ_{C3} , не пересекаются друг с другом.*

Доказательство: В силу утверждений 2.11 и 2.31 кривые γ_{C3} и ρ_{10} удовлетворяют условиям утверждения 2.7, применение которого даёт требуемое. \square

Утверждение 2.32 гарантирует, что траектории подходят к кривой ρ_{10} слева с управлением $u = 1$, переключают на ней управление и уходят направо с управлением $u = 0$. Затем они справа примыкают к кривой γ_{C3} , и по ней движутся дальше с особым управлением. Слева к γ_{C3} подходят траектории с управлением $u = 1$.

Таким образом, кривые γ_{C3} , ρ_{10} и точка \tilde{x} делят окрестность U на две области (см. рис. 2.6). Мы показали, что в правой области применяется управление $u = 0$, и движение происходит от ρ_{10} к особой траектории. Покажем, что в левой области принцип максимума приводит к управлению $u = 1$. Для области снизу от кривой γ_- это гарантируется утверждением 2.27.

Исследуем область сверху от кривой γ_- . В силу утверждения 2.8 кривая переключения ρ_{10} имеет поднятие $\hat{\rho}_{10}$ на \mathcal{M}_+ . Пусть $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Тогда $\sin \phi > 0$. На кривой ρ_{10} имеем $C = -\Theta(r^2)$, $d_{AB} = \Theta(r)$. Следовательно, $\frac{C}{d_{AB}} = -\Theta(r) < 0$, $-\frac{2C}{d_{AB} \sin \phi} = \Theta(r) = \Theta(x_1)$. Поэтому выражение (2.56) положительно, и выполнены условия утверждения 2.25.

Следствие 2.5. *Пусть $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Траектории системы (2.54), выходящие на $\hat{\rho}_{10}$ в момент времени $t = 0$, при $t \leq 0$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина, пока их проекции находятся в окрестности U . \square*

В точке $(x, \psi) = (0, 0)$ согласно уравнению (2.26) справедливо неравенство $\ddot{H}_1 = \sin \phi > 0$.

Следствие 2.6. Пусть $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Траектория $\hat{\gamma}_-$ системы (2.54), выходящая в начало координат $(x, \psi) = (0, 0)$ в момент времени $t = 0$, при $t \leq 0$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, если выбрать окрестность U достаточно малой. \square

Рассмотрим в пространстве T^*X множество точек \mathcal{N} , состоящее из точек траекторий системы (2.43), соединяющих кривые $\hat{\rho}_{10}, \hat{\gamma}_{C3}$, траекторий системы (2.54), выходящих на кривые $\hat{\rho}_{10}, \hat{\gamma}_{C3}$, траектории $\hat{\gamma}_-$ и точки $(x, \psi) = (0, 0)$.

Утверждение 2.32 гарантирует, что проекция π_X взаимно-однозначно отображает множество \mathcal{N} на окрестность U , т.е. задаёт некоторую функцию $\psi(x)$.

Утверждение 2.33. Функция $\psi(x)$ непрерывна в окрестности U и непрерывно дифференцируема всюду, кроме на кривых γ_{C3} , γ_- , ρ_{10} и в точке \tilde{x} . На кривых γ_{C3} , γ_- и ρ_{10} имеют место разрывы производных первого рода.

Доказательство: Рассмотрим кривую γ_* на фазовой плоскости, состоящую из веток γ_{C3} , ρ_{10} и точки \tilde{x} . В силу утверждений 2.11 и 2.31 кривая γ_* принадлежит классу PC^1 с разрывом производных в точке \tilde{x} . В системе координат (x_1, ζ) она задаётся функцией $\zeta(x_1)$.

В силу (2.35) и (2.58) функция $\zeta(x_1)$ является липшицевой при $x_1 \neq 0$, а при $x_1 = 0$ имеет разрыв первого рода. В силу утверждений 2.11 и 2.30 она при $x_1 \neq 0$ принадлежит классу C^2 .

Рассмотрим поднятие $\hat{\gamma}_*$ кривой γ_* на \mathcal{M} , состоящее из веток $\hat{\gamma}_{C3}$, $\hat{\rho}_{10}$ и точки $(x = 0, \psi = 0)$. Кривая $\hat{\gamma}_*$ задаётся уравнениями (2.21) и в силу утверждения 2.9 непрерывна. Рассмотрим ограничение функции ψ на γ_* : $\psi(x_1) = \psi(x_1, \zeta(x_1))$. Имеем $\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{dx_1}$. В силу утверждения 2.9 производная $\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$ непрерывна и равна нулю при $x_1 = 0$. Отсюда и из ограниченности производной $\frac{d\zeta}{dx_1}$ следует равенство $\lim_{x_1 \rightarrow \pm 0} \frac{d\psi}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pm 0} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}$. Эти два односторонних предела существуют, поскольку существуют пределы $\lim_{x_1 \rightarrow \pm 0} \zeta(x_1)$, но они не совпадают.

Мы доказали, что кривая $\hat{\gamma}_*$ принадлежит классу PC^1 с разрывом производных в точке $(x, \psi) = (0, 0)$. Исследуемая функция $\psi(x)$ задаётся траекториями систем (2.43), (2.54), проходящими через точки $\hat{\gamma}_*$. Доказательство завершает теорема о дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных. \square

Утверждение 2.34. Пусть \mathcal{N}' — двумерное непрерывно дифференцируемое интегральное многообразие гамильтоновой системы с некоторым гамильтонианом H' , заданном в пространстве T^*X . Пусть \mathcal{N}' является локальным сечением кокасательного расслоения над некоторой областью $U' \subset U$. Тогда функция $\psi(x)$, задающая \mathcal{N}' , имеет потенциал $\omega(x) \in C^2(U')$.

Доказательство: Покажем лагранжевость сечения \mathcal{N}' , т.е. замкнутость формы ψdx . Вычислим значение дифференциала формы ψdx на паре касательных к \mathcal{N}' векторов в случае, если один из них равен вектору фазовой скорости $\frac{\partial}{\partial t}$. Пусть v — произвольный касательный вектор.

$$\begin{aligned} d(\psi dx) \left(\frac{\partial}{\partial t}, v \right) &= \sum_{\mu} (d\psi_{\mu} \wedge dx_{\mu}) \left(\frac{\partial}{\partial t}, v \right) = \sum_{\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial t} v(x_{\mu}) - v(\psi_{\mu}) \frac{\partial x_{\mu}}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\frac{\partial H'}{\partial x_{\mu}} v(x_{\mu}) + v(\psi_{\mu}) \frac{\partial H'}{\partial \psi_{\mu}} \right) = -\frac{1}{2} v(H') = 0, \end{aligned}$$

поскольку H' — первый интеграл. Но тогда форма $d(\psi dx)$ равна нулю на любой паре векторов, потому что \mathcal{N}' двумерно. Следовательно, в области U' существует такая функция $\omega \in C^2$, что $d\omega = \psi dx$. \square

В силу утверждения 2.33 множество \mathcal{N} является сечением расслоения T^*X . Соответствующая функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию Кэлли [46] на особом режиме, а в силу утверждения 2.27 и следствий 2.6 и 2.5 — принципу максимума.

Утверждение 2.35. Пусть $\psi(x)$ — непрерывная функция на U , удовлетворяющая принципу максимума. Пусть окрестность U разделена конечным числом непрерывно дифференцируемых кривых, стыкующихся в точке \tilde{x} , на конечное число областей U_i , в каждой из которых функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема. Пусть производные функции $\psi(x)$ терпят на этих кривых разрыв первого рода. Тогда $\psi(x)$ имеет потенциал $\omega(x)$ класса C^1 .

Доказательство: В силу утверждения 2.34 функция $\psi(x)$ имеет потенциалы ω_i во всех областях дифференцируемости. Отнормируем их так, что $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \omega_i = 0$. В силу непрерывности $\psi(x)$ функции ω_i тогда совпадают на кривых, разделяющих области дифференцируемости и образуют одну функцию $\omega \in C^1(U)$. \square

В силу утверждения 2.33 функция $\psi(x)$, определяемая сечением \mathcal{N} , удовлетворяет условиям утверждения 2.35 и имеет потенциал $\omega(x)$. Функция $\omega(x)$ удовлетворяет в окрестности U уравнению Беллмана. Поэтому построенный синтез оптимален. Фазовая точка приходит по особому режиму в точку \tilde{x} только за бесконечное время, так как на нём $\dot{x}_2 = \theta(x_2)$. Теорема 2.2 доказана.

2.7 Случай $\phi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi]$

Для формулировки доказываемых теорем нам понадобится вспомогательная функция $\tilde{\phi}(\alpha)$. Определим $\tilde{\phi} : (-2, 2) \rightarrow (\pi, \frac{5}{4}\pi)$ следующими неявными уравне-

ниями:

$$\frac{\sqrt{(1 - \operatorname{ctg}\tilde{\phi})^2 + \alpha^2 \operatorname{ctg}\tilde{\phi}} + \alpha\sqrt{\operatorname{ctg}\tilde{\phi}}}{\sqrt{(1 - \operatorname{ctg}\tilde{\phi})^2 + \alpha^2 \operatorname{ctg}\tilde{\phi}} - \alpha\sqrt{\operatorname{ctg}\tilde{\phi}}} - e^{\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{(1-\operatorname{ctg}\tilde{\phi})^2 + \alpha^2 \operatorname{ctg}\tilde{\phi}}}{\sqrt{4-\alpha^2}\sqrt{\operatorname{ctg}\tilde{\phi}}} \right)} = 0 \quad \text{при } \alpha \neq 0;$$

$$2 \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\tilde{\phi}}}{\operatorname{ctg}\tilde{\phi} - 1} - \pi - \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{ctg}\tilde{\phi} - 1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}\tilde{\phi}}} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0.$$

Здесь $\operatorname{arccctg}$ принимает значения в интервале $(0, \pi)$. Уравнения задают $\tilde{\phi}$ как однозначную и непрерывную функцию от α .

Теорема 2.3. Пусть дана задача (2.1), (2.2).

1. Если $\phi \in (\tilde{\phi}(\alpha), \frac{3}{2}\pi]$, то $\inf J = -\infty$ и оптимального синтеза не существует.

2. Если $\phi \in (\pi, \tilde{\phi}(\alpha))$, то оптимальный синтез в окрестности точки \tilde{x} существует и имеет следующую структуру. Во втором ортанте имеется кривая переключения с $u = 0$ на $u = 1$, а в первом — кривая переключения с $u = 1$ на $u = 0$. Обе кривые расположены трансверсально к осям и стыкуются в точке \tilde{x} , которая является особым режимом первого порядка. Траектории оборачиваются вокруг \tilde{x} , попеременно пересекая кривые переключения и чередуя управления 0 и 1. Расстояние от \tilde{x} и длина интервалов времени, на которых применяется управление 1, с каждым оборотом убывают со скоростью асимптотически геометрической прогрессии, т.е. отношение двух последующих интервалов стремится к фиксированной величине. Длина интервалов времени, на которых применяется управление 0, стремится к фиксированной положительной величине.

Мы покажем, что при выполнении условий первой части теоремы 2.3 применима лемма 1, а при выполнении условий второй части построим интегральное лагранжево сечение расслоения T^*X и функцию Беллмана.

2.7.1 Построение отображения Пуанкаре

Пусть $\phi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Тогда, в силу утверждения 2.11, имеем $C = -\Theta(r^2)$. Пусть $\zeta_\alpha, \zeta_\beta \in \mathbf{R}$. Применим конструкцию, описанную в параграфе 2.4. Обозначим множество \mathcal{K}_- , построенное с помощью чисел $\zeta_\alpha, \zeta_\beta$, через \mathcal{K}_2 . В силу утверждения 2.8 множество \mathcal{K}_2 имеет поднятие $\hat{\mathcal{K}}_2$ на многообразии \mathcal{M}_- . Переменные x_1, ζ на \mathcal{K}_2 и $\hat{\mathcal{K}}_2$ обозначим через x_{12}, ζ_2 .

На множестве \mathcal{K}_2 определено отображение \mathbf{P}_0 . Следующее утверждение является следствием утверждений 2.4 и 2.16.

Следствие 2.7. *Отображение \mathbf{P}_0 можно непрерывно дифференцируемо продолжить на множество $\{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. \square*

Следствие 2.8. *Существуют такие числа $\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta \in \mathbf{R}$, что образ $\mathbf{P}_0[\mathcal{K}_2]$ содержится в множестве $\{x \in U \mid x_1 > 0, \zeta(x) \in [\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta]\}$, если окрестность U достаточно маленькая.*

Доказательство: Выберем $\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta$ таким образом, что выполняется включение $[\zeta(\mathbf{P}_0(0, \zeta_\alpha)), \zeta(\mathbf{P}_0(0, \zeta_\beta))] \subset (\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta)$. Уменьшением окрестности U получаем требуемое. \square

Обозначим множество $\{x \in U \mid x_1 > 0, \zeta(x) \in [\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta]\}$ через \mathcal{K}_1 , а переменные x_1, ζ на нём — через x_{11}, ζ_1 . В силу утверждения 2.8 множество \mathcal{K}_1 обладает поднятием $\hat{\mathcal{K}}_1$ на многообразии \mathcal{M}_+ .

Пусть p_2 — точка на \mathcal{K}_2 , $\hat{p}_2 \in \hat{\mathcal{K}}_2$ — её поднятие на \mathcal{M}_- , $\hat{\sigma}$ — траектория системы (2.43), проходящая через \hat{p}_2 в момент времени $t = 0$, $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ — проекция этой траектории на фазовую плоскость. Тогда траектория σ , по определению, в момент времени $\bar{t} = \max\{t < 0 \mid \hat{\sigma}(t) \in \mathcal{M}_+\}$ проходит через образ $p_1 = \mathbf{P}_0(p_2)$ точки p_2 . Следующее утверждение является следствием утверждения 2.15 и оценки $C = -\Theta(r^2)$.

Следствие 2.9. *На отрезках $t \in [\bar{t}, 0]$ траекторий системы (2.43), проходящих через множество $\hat{\mathcal{K}}_2$ и соединяющих $\hat{\mathcal{K}}_1$ и $\hat{\mathcal{K}}_2$, удовлетворяется принцип максимума.*

Вычислим производные отображения \mathbf{P}_0 . Пусть p_2 — точка на \mathcal{K}_2 , а $p_1 \in \mathcal{K}_1$ — её образ. Имеем $C = -\Theta(r^2)$, и условия утверждения 2.21 выполнены. Следовательно, производные $\frac{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}{\partial(x_1(p_2), x_2(p_2))}$ задаются уравнением (2.53).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_{11}, \zeta_1)}{\partial(x_{12}, \zeta_2)} &= \frac{\partial(x_{11}, \zeta_1)}{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))} \frac{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}{\partial(x_1(p_2), x_2(p_2))} \frac{\partial(x_1(p_2), x_2(p_2))}{\partial(x_{12}, \zeta_2)} = \\ &= \left(\begin{array}{c} 1 + \theta(r)\theta(r) \\ \frac{x_2(p_1)}{x_1^2(p_1)} - \frac{1}{x_1(p_1)} \end{array} \right) \frac{1}{x_1(p_2)A_2(p_2) - A_1(p_2)x_2(p_2)} \left(\begin{array}{c} x_1(p_1) + \theta(r^2)kA_1(p_1) \\ x_2(p_1) + \theta(r^2)kA_2(p_1) \end{array} \right) * \\ &\quad * \left(\begin{array}{c} A_2(p_2) - A_1(p_2) \\ -x_2(p_2)x_1(p_2) \end{array} \right) \frac{1}{x_1(p_2) + \theta(r^2)} \left(\begin{array}{c} x_1(p_2)\theta(r^3) \\ x_2(p_2) - x_1^2(p_2) + \theta(r^3) \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c} x_1(p_1) + \theta(r^2)kA_1(p_1) + \theta(r^2) \\ \theta(r)k\frac{A_1x_2 - A_2x_1}{x_1^2}(p_1) \end{array} \right) \left[\left(\begin{array}{c} 1(A_1 + \theta(r^2))\frac{x_1^2}{-A_1x_2 + A_2x_1} \\ 0(-x_1 + \theta(r^2))\frac{x_1^2}{-A_1x_2 + A_2x_1} \end{array} \right) \frac{1}{x_1 + \theta(r^2)} \right] (p_2) \\ &= \left(\begin{array}{c} \frac{x_1(p_1) + \theta(r^2)}{x_1(p_2) + \theta(r^2) - A_1x_2 + A_2x_1}(p_2)(x_1(p_1)A_1(p_2) - kA_1(p_1)x_1(p_2) + \theta(r^3)) \\ \theta(1)\frac{x_1 + \theta(r^2)}{-A_1x_2 + A_2x_1}(p_2)(\theta(r^2) + k\frac{A_1x_2 - A_2x_1}{x_1^2}(p_1)(-x_1(p_2) + \theta(r^2))) \end{array} \right), \end{aligned}$$

где k обозначает величину $\frac{C(p_2)}{C(p_1)} \frac{d_{AB}^2(p_1)}{d_{AB}^2(p_2)} e^{-\int_0^{\bar{t}} \langle \nabla, A \rangle d\tau} = \frac{C(p_2)}{C(p_1)} \frac{x_1^2(p_1)}{x_1^2(p_2)} \frac{(-A_1x_2 + A_2x_1)(p_2)}{(-A_1x_2 + A_2x_1)(p_1)} + \theta(r) = \theta(1)$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial(x_{11}, \zeta_1)}{\partial(x_{12}, \zeta_2)} = \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r) & \theta(r) \\ \theta(1) & \frac{C(p_2)}{C(p_1)} + \theta(r) \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

В силу оценки $C = -\Theta(r^2)$ и утверждения 2.13 имеем $\frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_2} = \Theta(1)$.

Следствие 2.10. *Функция $\zeta_1(0, \zeta_2)$ строго монотонно растёт, обратима, и справедливы соотношения $\lim_{\zeta_2 \rightarrow \pm\infty} \zeta_1(0, \zeta_2) = \pm\infty$. Существует в точности одно значение $\zeta_2 = \zeta_{2max}$, такое, что $\zeta_1(0, \zeta_{2max}) = 0$. \square*

Выберем $\zeta_\beta < \zeta_{2max}$. Тогда мы можем, может предварительно уменьшив окрестность U , выбрать $\zeta'_\alpha < \zeta'_\beta < 0$. Следовательно, $\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta$ удовлетворяют условиям утверждения 2.26. Множество \mathcal{K}_1 при таком выборе ζ'_β лежит в первом ортанте.

На множестве \mathcal{K}_1 определена функция t_* , введённая в параграфе 2.5.3. В силу (2.56) и неравенства $\text{ctg}\phi > 0$ справедлива оценка $t_* = -\Theta(x_{11}) = -\Theta(r)$. Пусть p_1 — точка на \mathcal{K}_1 , \hat{p}_1 — её поднятие на $\hat{\mathcal{K}}_1$, $\hat{\sigma}$ — траектория системы (2.54), проходящая в момент времени $t = 0$ через точку \hat{p}_1 , $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ — проекция этой траектории на фазовую плоскость. Обозначим точку $\sigma(t_*(p_1))$ через p_0 , а отображение, переводящее p_1 в p_0 — через \mathbf{P}_1 .

В силу утверждения 2.26 имеем

$$x_2(p_0) = x_2(p_1) + \theta(x_{11}^2), \quad -\text{ctg}\phi \zeta(p_1)\zeta(p_0) = 1 + \theta(x_{11}). \quad (2.60)$$

В частности, из оценки $\zeta_1 = -\Theta(1)$ следует оценка $\zeta_0 = \Theta(1)$. Другими словами, найдутся такие положительные числа $\zeta''_\alpha, \zeta''_\beta$, что образ $\mathbf{P}_1[\mathcal{K}_1]$ содержится в множестве $\{x \in U \mid x_1 < 0, \zeta(x) \in [\zeta''_\alpha, \zeta''_\beta]\}$. Обозначим это множество через \mathcal{K}_0 , а координаты x_1, ζ на нём — через x_{10}, ζ_0 . Так как $x_2(p_1) = \Theta(x_{11})$, то в силу (2.60) также $x_2(p_0) = \Theta(x_{11}) = \Theta(r)$, и множество \mathcal{K}_0 лежит во втором ортанте. В силу утверждения 2.8 множество \mathcal{K}_0 имеет поднятие $\hat{\mathcal{K}}_0$ на многообразии \mathcal{M}_- .

Следствие 2.11. *Отображение \mathbf{P}_1 непрерывно продолжается на $\{0\} \times [\zeta'_\alpha, \zeta'_\beta]$.*

Доказательство: В силу $x_{10} = \frac{x_2(p_0)}{x_2(p_1)} \frac{\zeta_1}{\zeta_0} x_{11} = -\Theta(x_{11})$ функцию x_{10} можно продолжить нулём. Функцию $\zeta_0(x_{11}, \zeta_1)$ в силу второго уравнения (2.60) можно продолжить значением $\zeta_0(0, \zeta_1) = -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta_1}$. \square

На поверхности \mathcal{K}_1 имеем $\frac{C}{d_{AB}} < 0$, поэтому в силу утверждения 2.25 справедливо следующее утверждение.

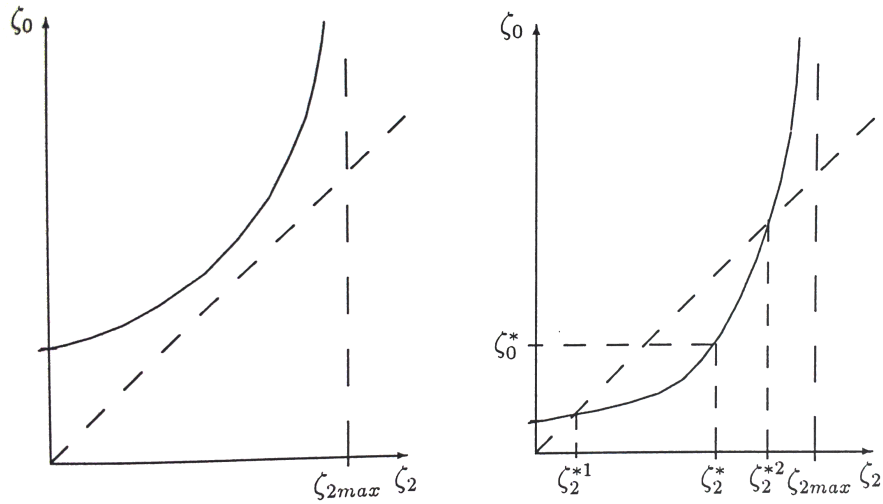


Рис. 2: Функция $\zeta_0(0, \zeta_2)$

Следствие 2.12. На отрезках $t \in [t_*, 0]$ траекторий системы (2.54), проходящих через множество \hat{K}_1 и соединяющих \hat{K}_0 и \hat{K}_1 , удовлетворяется принцип максимума.

Мы построили отображение Пуанкаре $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_0 : (x_{12}, \zeta_2) \mapsto (x_{10}, \zeta_0)$. из \mathcal{K}_2 в \mathcal{K}_0 . Из следствий 2.7, 2.11 находим следующее утверждение.

Утверждение 2.36. Отображение \mathbf{P} непрерывно продолжается на $\{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. \square

В силу $x_{10} = -\Theta(x_{11}) = \Theta(x_{12})$ имеем $x_{10}(0, \zeta_2) = 0$.

Утверждение 2.37. Функция $\zeta_0(0, \zeta_2)$ строго монотонно растёт, обратима, справедливы равенства $\lim_{\zeta_2 \rightarrow \zeta_{2max}} \zeta_0(0, \zeta_2) = +\infty$, $\lim_{\zeta_2 \rightarrow -\infty} \zeta_0(0, \zeta_2) = 0$ (см. рис. 2.7.1).

Доказательство: Имеем $\zeta_0(0, \zeta_1) = -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta_1}$, отсюда $\lim_{\zeta_1 \rightarrow 0} \zeta_0(0, \zeta_1) = +\infty$, $\lim_{\zeta_1 \rightarrow -\infty} \zeta_0(0, \zeta_1) = 0$. Комбинируя со следствием 2.10, находим требуемые соотношения. Далее, $\frac{d\zeta_0(0, \zeta_1)}{d\zeta_1} = \frac{\text{tg}\phi}{\zeta_1^2} > 0$, отсюда вследствие $\frac{d\zeta_1(0, \zeta_2)}{d\zeta_2} > 0$ находим $\frac{d\zeta_0(0, \zeta_2)}{d\zeta_2} > 0$. Следовательно, функция $\zeta_0(0, \zeta_2)$ строго монотонно растёт и обратима. \square

Необходимым условием существования синтеза, описанного во второй части теоремы 2.3, является наличие инвариантной кривой у отображения Пуанкаре \mathbf{P} . Это, в свою очередь, влечёт за собой существование неподвижной точки ζ_* у функции $\zeta_2 \mapsto \zeta_0(0, \zeta_2)$. В этом случае точка $(0, \zeta_*)$ — неподвижная точка отображения \mathbf{P} .

Если график функции $\zeta_0(0, \zeta_2)$ целиком лежит над графиком $\zeta_0 = \zeta_2$ (см. рис. 2.7.1 слева), то равенство $\zeta_0 = (0, \zeta_2)$ не выполняется нигде. Если имеется такая точка ζ_2^* , что $\zeta_0^* = \zeta_0(0, \zeta_2^*) < \zeta_2^*$, то существуют как минимум два решения уравнения $\zeta_0 = (0, \zeta_2)$ (см. рис. 2.7.1 справа). Покажем, что они являются гиперболическими неподвижными точками отображения \mathbf{P} , и их инвариантные усы индуцируют сечения расслоения T^*X . Для этого вычислим производные отображения \mathbf{P} .

2.7.2 Производные отображения Пуанкаре

Вычислим частные производные $\frac{\partial(x_{10}, \zeta_0)}{\partial(x_{11}, \zeta_1)}$. Для этого воспользуемся техникой, представленной в параграфе 2.5.2.

Пусть $v_1 \in T_{p_1}X$ — произвольный касательный вектор в точке p_1 . Дифференциал поднятия $\pi_X^{-1} : \mathcal{K}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{K}}_1$ отображает касательный вектор v_1 на некоторый касательный вектор $\hat{v}_1 \in T_{\hat{p}_1}\hat{\mathcal{K}}_1$. Пространство $T_{\hat{p}_1}\hat{\mathcal{K}}_1$ является двумерным подпространством касательного пространства к T^*X в точке \hat{p}_1 . Оно определяется уравнениями $dH_0(\hat{v}_1) = dH_1(\hat{v}_1) = 0$.

Многообразию $\hat{\mathcal{K}}_1$ задаётся уравнениями (2.21). Поэтому первые две компоненты вектора \hat{v}_1 совпадают с v_1 , а последние две равны $\frac{\partial\psi}{\partial x}v_1$, где $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ — производная выражений (2.21), вычисленная в уравнениях (2.50).

Пусть $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (2.54), проходящая в момент $t = 0$ через точку \hat{p}_1 . Пусть $\hat{v}_1(t)$ — результат переноса вектора \hat{v}_1 вдоль траектории $\hat{\sigma}(t)$ в силу системы (2.54). Он подчиняется уравнению в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_1(t) &= \frac{\partial(\dot{x}, \dot{\psi})}{\partial(x, \psi)} \hat{v}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(A+B)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial^2(F+G)}{\partial x^2} - \sum_{\mu} \left(\psi_{\mu} \frac{\partial^2(A_{\mu}+B_{\mu})}{\partial x^2} \right) & - \left(\frac{\partial(A+B)}{\partial x} \right)^T \end{pmatrix} \hat{v}_1(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(A+B)}{\partial x}(\tilde{x}) + \theta(r) & 0 \\ \frac{\partial^2(F+G)}{\partial x^2}(\tilde{x}) + \theta(r) & - \left(\frac{\partial(A+B)}{\partial x}(\tilde{x}) \right)^T + \theta(r) \end{pmatrix} \hat{v}_1(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что $t_* = x_1(p_0) - x_1(p_1) + \theta(r^2) = -\Theta(r)$, откуда получаем

$$\hat{v}_1(t_*) = \left(E_4 + \begin{pmatrix} \frac{\partial(A+B)}{\partial x}(\tilde{x}) & 0 \\ \frac{\partial^2(F+G)}{\partial x^2}(\tilde{x}) & - \left(\frac{\partial(A+B)}{\partial x}(\tilde{x}) \right)^T \end{pmatrix} (x_1(p_0) - x_1(p_1)) + \theta(r^2) \right) \hat{v}_1.$$

Проекция касательного вектора $\hat{v}_1(t_*)$ вдоль вектора фазовой скорости $\frac{\partial}{\partial t}$ на подпространство $T_{\hat{p}_0}\hat{\mathcal{K}}_0$ касательного пространства к T^*X имеет вид $\hat{v}'_0(t_*) =$

$\hat{v}_1(t_*) - c \frac{\partial}{\partial t}$, где число c определяется из уравнения $dH_1(\hat{v}'_0(t_*)) = 0$. Находим

$$dH_1(\hat{v}'_0(t_*)) = \frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \hat{v}_1(t_*) - c \dot{H}_1(p_0). \quad (2.61)$$

Для вычисления выражения $\frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \hat{v}_1(t_*)$ воспользуемся следующим обстоятельством. Рассмотрим вектор $v_0 \in T_{p_0}X$, компоненты которого совпадают с компонентами вектора v_1 . Дифференциал поднятия $\pi_X^{-1} : \mathcal{K}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{K}}_0$ отображает v_0 на касательный вектор $\hat{v}_0 \in T_{\hat{p}_0}\hat{\mathcal{K}}_0$, имеющий вид

$$\hat{v}_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(p_0)v_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь производные $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ определяются из (2.50). Вектор \hat{v}_0 касателен к многообразию \mathcal{M} , поэтому

$$dH_1(\hat{v}_0) = \frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(p_0)v_1 \end{pmatrix} = 0.$$

С учётом (2.50) и (2.60) отсюда следует

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \hat{v}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(p_1) v_1 \end{pmatrix} = \frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(p_1) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(p_0) \right) v_1 \end{pmatrix} \\
&= (B(p_0))^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(p_1) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(p_0) \right) v_1 = \\
&= \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(p_1) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(p_0) + B_2(p_0) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}(p_1) - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(p_0) \right) + \theta(r^2) \right) v_1 = \\
&= \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} \sin \phi (x_1(p_1) - x_1(p_0)) + \frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \cos \phi \left(\frac{x_2^3}{x_1^2}(p_1) - \frac{x_2^3}{x_1^2}(p_0) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} (x_1(p_1) - x_1(p_0)) - \frac{1}{2} \cos \phi B_2(p_0) \left(\frac{x_2^2}{x_1^2}(p_1) - \frac{x_2^2}{x_1^2}(p_0) \right) + \theta(r^2) \right), \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \left(\sin \phi (x_1(p_1) - x_1(p_0)) - 3 \cos \phi \left(\frac{x_2^2}{x_1}(p_1) - \frac{x_2^2}{x_1}(p_0) \right) \right) + \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1(p_1) - x_1(p_0)) + \cos \phi B_2(p_0) \left(\frac{x_2}{x_1}(p_1) - \frac{x_2}{x_1}(p_0) \right) + \theta(r^2) \right) v_1 = \\
&= (x_1(p_1) - x_1(p_0)) \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \left(\sin \phi + \frac{1}{2} \cos \phi \frac{x_2(p_1)x_2(p_0)}{x_1(p_1)x_1(p_0)} \frac{x_1(p_1) + x_1(p_0)}{x_1(p_1)} \right) + \theta(r) \right), \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \left(\sin \phi + \cos \phi \frac{x_2(p_1)x_2(p_0)}{x_1(p_1)x_1(p_0)} \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \cos \phi \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \Big) v_1 = \\
&= (x_1(p_1) - x_1(p_0)) \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \sin \phi \frac{x_1(p_1) - x_1(p_0)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right), \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \cos \phi \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1.
\end{aligned}$$

С помощью оценки $\frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)} = (0, 0, 1, 0) + \theta(r)$ находим далее

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial(x, \psi)}(p_0) \hat{v}_1(t_*) &= (x_1(p_1) - x_1(p_0)) \left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \sin \phi \frac{x_1(p_1) - x_1(p_0)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \cos \phi \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1 - \left((0, 0, 1, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial(A+B)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial^2(F+G)}{\partial x^2} & - \left(\frac{\partial(A+B)}{\partial x} \right)^T \end{pmatrix} (\tilde{x}) + \theta(r) \right) \hat{v}_1 \Big] \\
&= (x_1(p_1) - x_1(p_0)) \left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \sin \phi \frac{x_1(p_1) - x_1(p_0)}{x_1(p_1)} \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \cos \phi \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} \right) - \frac{\partial^2(F+G)}{\partial x_1 \partial x} + \frac{\partial(A_2 + B_2)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(p_1) + \theta(r) \Big] v_1 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1(p_1) - x_1(p_0)) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \sin \phi \frac{x_1(p_1) - x_1(p_0)}{x_1(p_1)} - \sin \phi + \right. \\
&+ \left. \left(-1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right) \left(-\frac{1}{2} \sin \phi - \frac{1}{2} \cos \phi \frac{x_2^2(p_1)}{x_1^2(p_1)} \right) + \theta(r), -\cos \phi \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1 \\
&= (x_1(p_1) - x_1(p_0)) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \left(\sin \phi \frac{x_1(p_0)}{x_1(p_1)} + \cos \phi \frac{x_2^2(p_1)}{x_1^2(p_1)} \right) - \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2} \sin \phi + \frac{1}{2} \cos \phi \frac{x_2^2(p_1)}{x_1^2(p_1)} + \theta(r), -\cos \phi \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1 = \\
&= \left(\frac{1}{2} \sin \phi \frac{x_1^2(p_0) - x_1^2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r), x_2 \cos \phi \frac{x_1(p_0) - x_1(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1.
\end{aligned}$$

Из уравнения (2.61) вытекает

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\frac{\partial H_1}{\partial(x,\psi)}(p_0) \hat{v}_1(t_*)}{\dot{H}_1(p_0)} = \\
&= \frac{x_{10}}{C(p_0)} \left(\frac{1}{2} \sin \phi \frac{x_1^2(p_0) - x_1^2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r), x_2 \cos \phi \frac{x_1(p_0) - x_1(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1 = \\
&= \left(\frac{x_1(p_0)(x_1^2(p_0) - x_1^2(p_1))}{(x_1^2(p_0) + \operatorname{ctg} \phi x_2^2(p_0))x_1(p_1)} + \theta(r), 2 \frac{x_1(p_0)x_2(p_0)(x_1(p_0) - x_1(p_1))}{(\operatorname{tg} \phi x_1^2(p_0) + x_2^2(p_0))x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1 \\
&= \left(\frac{x_1(p_0)(x_1^2(p_0) - x_1^2(p_1))}{(x_1^2(p_0) - x_1(p_1)x_1(p_0))x_1(p_1)} + \theta(r), \right. \\
&\quad \left. 2 \frac{x_1(p_0)x_2(p_0)(x_1(p_0) - x_1(p_1))}{\left(-\frac{x_2(p_1)x_2(p_0)}{x_1(p_1)} x_1(p_0) + x_2^2(p_0) \right) x_1(p_1)} + \theta(r) \right) v_1 \\
&= \left(\frac{x_1(p_0) + x_1(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r), -2 \frac{x_1(p_0)}{x_2(p_0)} + \theta(r) \right) v_1.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
dx(\hat{v}'_0(t_*)) &= dx(\hat{v}_1(t_*)) - c dx\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = (E_2 + \theta(r)) v_1 - c \dot{x} = \\
&= \left(E_2 - \dot{x} \left(\frac{x_1(p_0) + x_1(p_1)}{x_1(p_1)}, -2 \frac{x_1(p_0)}{x_2(p_0)} \right) + \theta(r) \right) v_1 = \\
&= \left(1 - \frac{x_1(p_0) + x_1(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r), \frac{2 \frac{x_1(p_0)}{x_2(p_0)} + \theta(r)}{1 + \theta(r)} \right) v_1.
\end{aligned}$$

Матрица задаёт производную $\frac{\partial(x_1(p_0), x_2(p_0))}{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}$. Принимая во внимание, что в силу

(2.60) справедливо

$$\begin{aligned}
-\frac{x_1(p_1)}{x_1(p_0)} &= -\frac{\zeta_0}{\zeta_1} + \theta(r) = \frac{\frac{\zeta_0(\zeta_0 - \zeta_1)}{\zeta_0^2 \zeta_1^2}}{\frac{\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)}{\zeta_0^2 \zeta_1^2}} + \theta(r) = \frac{\frac{1}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_0}}{\frac{1}{\zeta_0^2} - \frac{1}{\zeta_1 \zeta_0}} + \theta(r) = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \sin \phi x_2^2(p_1) \left(\frac{1}{\zeta_1^2 + \text{ctg} \phi} \right)}{\frac{1}{2} \sin \phi x_2^2(p_0) \left(\frac{1}{\zeta_0^2 + \text{ctg} \phi} \right)} + \theta(r) = \frac{\frac{1}{2} \sin \phi x_1^2(p_1) + \frac{1}{2} \cos \phi x_2^2(p_1)}{\frac{1}{2} \sin \phi x_1^2(p_0) + \frac{1}{2} \cos \phi x_2^2(p_0)} + \theta(r) = \\
&= \frac{C(p_1)}{C(p_0)} + \theta(r),
\end{aligned}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x_{10}, \zeta_0)}{\partial(x_{11}, \zeta_1)} &= \frac{\partial(x_{10}, \zeta_0)}{\partial(x_1(p_0), x_2(p_0))} \frac{\partial(x_1(p_0), x_2(p_0))}{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))} \frac{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}{\partial(x_{11}, \zeta_1)} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x_2(p_0)}{x_1^2(p_0)} & -\frac{1}{x_1(p_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{x_1(p_0)}{x_1(p_1)} + \theta(r) & 2\frac{x_1(p_0)}{x_2(p_0)} + \theta(r) \\ \theta(r) & 1 + \theta(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} & -x_1(p_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_0)}{x_1(p_1)} + \theta(r) & -2\frac{x_1(p_0)x_1(p_1)}{x_2(p_0)} + \theta(r^2) \\ \theta(1) & \frac{C(p_1)}{C(p_0)} + \theta(r) \end{pmatrix}. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Перемножая с (2.59), находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x_{10}, \zeta_0)}{\partial(x_{12}, \zeta_2)} &= \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_0)}{x_1(p_1)} + \theta(r) & \theta(r) \\ \theta(1) & \frac{C(p_1)}{C(p_0)} + \theta(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r) & \theta(r) \\ \theta(1) & \frac{C(p_2)}{C(p_1)} + \theta(r) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_0)}{x_1(p_2)} + \theta(r) & \theta(r) \\ \theta(1) & \frac{C(p_2)}{C(p_0)} + \theta(r) \end{pmatrix}. \tag{2.63}
\end{aligned}$$

2.7.3 Определяющий существование синтеза цикл

Рассмотрим функцию $A_2(x)$. Её градиент в точке \tilde{x} в силу (2.3) равен $-e_1 = (-1, 0)$. Поэтому нулевой уровень функции A_2 представляет собой некоторую кривую γ_{A_2} класса C^3 , проходящую через точку \tilde{x} и касающуюся в ней оси Ox_2 . Параметризуем кривую γ_{A_2} переменной x_2 . Пусть s — точка в нижней полуплоскости, лежащая на γ_{A_2} , т.е. $x_2(s) < 0$. Рассмотрим траекторию ρ системы $\dot{x} = A$, проходящую через s в момент времени $t = 0$. В силу (2.3) траектория ρ оборачивается вокруг точки \tilde{x} по часовой стрелке. Исследуем переменную x_2 на ρ как функцию от t . Имеем $\dot{x}_2(0) = A_2(s) = 0$, и $x_2(0) = x_{2,min}$ является локальным минимумом. Определим $t^+ = \min\{t > 0 \mid A_2(\rho(t)) = 0\}$, $t^- = \max\{t <$

$0 \mid A_2(\rho(t)) = 0\}$, $x_{2,max} = \min(x_2(t^+), x_2(t^-))$. Очевидно, $x_{2,max} > 0 > x_{2,min}$, и для каждого $\hat{x}_2 \in (x_{2,min}, x_{2,max})$ существуют единственные $\tau^+ \in (0, t^+)$, $\tau^- \in (t^-, 0)$, такие, что $x_2(\tau^+) = x_2(\tau^-) = \hat{x}_2$. Введём обозначения $x_1^+ = x_1(\rho(\tau^+))$, $x_1^- = x_1(\rho(\tau^-))$.

Рассмотрим интеграл $I(\hat{x}_2) = \int_{\tau^-}^{\tau^+} F(\rho(t)) dt$ по траектории ρ как функцию от \hat{x}_2 . Имеем $I(x_{2,min}) = 0$. Производная по \hat{x}_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\hat{x}_2} &= \frac{d\tau^+}{d\hat{x}_2} F(\tau^+) - \frac{d\tau^-}{d\hat{x}_2} F(\tau^-) = \frac{F}{A_2}(\tau^+) - \frac{F}{A_2}(\tau^-) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \phi (x_1^+)^2 - \cos \phi \hat{x}_2^2 + \theta(r^3)}{-x_1^+ + \theta(r^2)} - \frac{\sin \phi (x_1^-)^2 - \cos \phi \hat{x}_2^2 + \theta(r^3)}{-x_1^- + \theta(r^2)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos \phi \left(-\operatorname{tg} \phi x_1^+ + \frac{\hat{x}_2^2}{x_1^+} + \operatorname{tg} \phi x_1^- - \frac{\hat{x}_2^2}{x_1^-} + \theta(r^2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos \phi (x_1^- - x_1^+) \left(\operatorname{tg} \phi + \frac{\hat{x}_2^2}{x_1^- x_1^+} + \theta(r) \right). \end{aligned}$$

Вторая производная функции F вдоль кривой γ_{A_2} в точке \tilde{x} равна $\frac{d^2 F}{dx_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\tilde{x}) = -\cos \phi > 0$. Поэтому на γ_{A_2} справедлива оценка $F = \Theta(r^2)$. Отсюда

$$\lim_{\hat{x}_2 \rightarrow x_{2,min}} \frac{dI}{d\hat{x}_2} = \lim_{\hat{x}_2 \rightarrow x_{2,max}} \frac{dI}{d\hat{x}_2} = +\infty.$$

При $\hat{x}_2 = 0$ имеем $\frac{dI}{d\hat{x}_2} = \frac{1}{2} \sin \phi (x_1^- - x_1^+ + \theta(r^2)) = -\Theta(r) < 0$. По непрерывности производной $\frac{dI}{d\hat{x}_2}$ функция $I(\hat{x}_2)$ на отрезке $(x_{2,min}, 0)$ принимает локальный максимум, а на отрезке $(0, x_{2,max})$ — локальный минимум. Значение \hat{x}_2 в этом минимуме определяется из уравнения $\frac{dI}{d\hat{x}_2} = \frac{F}{A_2}(\tau^+) - \frac{F}{A_2}(\tau^-) = 0$. Поэтому для него справедлива оценка

$$-\operatorname{tg} \phi = \frac{\hat{x}_2}{x_1^-} \frac{\hat{x}_2}{x_1^+} + \theta(r). \quad (2.64)$$

Отсюда, в частности, выводим оценки $\hat{x}_2 = \Theta(r)$, $x_1^+ = -\Theta(r)$, $x_1^- = \Theta(r)$.

Обозначим значение интеграла $I(\hat{x}_2)$ в точке минимума через I_{min} . Во избежание лишних обозначений мы далее будем считать, что переменная \hat{x}_2 принимает положительное значение, в котором интеграл I имеет локальный минимум. Покажем, что знак главной части I_{min} определяет, существует оптимальный синтез или нет.

Утверждение: Если $I_{min} = -\Theta(r^2)$, то выполнены условия леммы 1.

Доказательство: Пусть $I(\hat{x}_2) = I_{min} = -\Theta(r^2)$. Предъявим такой замкнутый контур l , который можно обойти за конечное время, соответственно подобрав управление, что $\oint_l (F + uG) dt < 0$. Рассмотрим траекторию ρ_1 системы

$\dot{x} = A + B$, проходящую через точку $\rho(\tau^+)$. Стартовав в этой точке с управлением $u = 1$ и пройдя время $\bar{t} = \Theta(r)$ по этой траектории, мы вновь пересечём траекторию ρ в некоторой точке $\rho(\bar{\tau}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Вследствие $\dot{x}_2 = A_2 + B_2 = \theta(r)$ интегрированием вдоль ρ_1 находим $\bar{x}_2 = \hat{x}_2 + \int_0^{\bar{t}} (A_2 + B_2) dt = \hat{x}_2 + \theta(r^2)$. С другой стороны, интегрированием вдоль траектории ρ получаем $\bar{x}_2 - \hat{x}_2 = \int_{\tau^-}^{\bar{\tau}} A_2 dt = \theta(r^2)$. Имеем $x_1^- = \Theta(r)$, поэтому $A_2(\rho(\tau^-)) = -\Theta(r)$. Следовательно, $\bar{\tau} - \tau^- = \theta(r)$. Отсюда находим $\bar{x}_1 = x_1^- + \int_{\tau^-}^{\bar{\tau}} A_1 dt = x_1^- + \theta(r^2)$. В точке (\bar{x}_1, \bar{x}_2) переключимся на $u = 0$ и вернёмся по траектории ρ в точку $\rho(\tau^+)$. Имеем для интеграла по этому контуру:

$$\begin{aligned} \oint (F + uG) dt &= \int_0^{\bar{t}} (F(\rho_1(t)) + G(\rho_1(t))) dt + \int_{\bar{\tau}}^{\tau^-} F(\rho(t)) dt + \int_{\tau^-}^{\tau^+} F(\rho(t)) dt \\ &= \Theta(r)\theta(r^2) + \theta(r)\theta(r^2) + I_{min} = -\Theta(r^2) < 0. \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $I_{min} = -\Theta(r^2)$ оптимального синтеза не существует.

Утверждение 2.38. *Если $I_{min} = +\Theta(r^2)$, то существует такое число $\zeta_2^* > 0$, что $\zeta_0^* = \zeta_0(0, \zeta_2^*) < \zeta_2^*$.*

Доказательство: Пусть $I(\hat{x}_2) = I_{min} = +\Theta(r^2)$. Из соотношения (2.64) следует оценка $-\frac{\hat{x}_2}{x_1^+} = \Theta(1)$. Поэтому существуют такие числа $\zeta_\alpha, \zeta_\beta > 0$, что точку $\rho(\tau^+)$ можно включить в соответствующее множество \mathcal{K}_- независимо от выбора точки s на γ_{A_2} . Исследуем, как действует отображение \mathbf{P} на точку $p_2 = \rho(\tau^+)$.

Проведём траекторию $\hat{\rho}$ системы (2.43) через поднятие \hat{p}_2 точки p_2 на \mathcal{M}_- . Траектория $\hat{\rho}$ является поднятием траектории ρ в расширенное фазовое пространство T^*X . Зададим параметризацию на $\hat{\rho}$ так, чтобы она была согласована с параметризацией траектории ρ . Точка p_1 лежит на траектории ρ . Обозначим соответствующий ей момент времени через \bar{t} .

Функция H_1 на траектории $\hat{\rho}$ задаётся уравнением (2.46). Учитывая, что в точках $\rho(\tau^+), \rho(\tau^-)$ справедливо $x_1 = A_2 + \theta(r^2) = d_{AB} + \theta(r^2) = \pm\Theta(r)$, из уравнений $\frac{dI}{d\hat{x}_2} = \frac{F}{A_2}(\rho(\tau^+)) - \frac{F}{A_2}(\rho(\tau^-)) = 0$ и $x_2(\tau^+) = \hat{x}_2 = x_2(\tau^-)$ находим

$\frac{Fx_2}{d_{AB}}(\rho(\tau^+)) - \frac{Fx_2}{d_{AB}}(\rho(\tau^-)) = \theta(r^3)$. Положим в (2.46) $t_0 = \tau^+$, $H_1(t_0) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} H_1(\tau^-) &= \frac{1}{-A_1x_2 + A_2x_1} \left\{ -Fx_2(\tau^-) + d_{AB}(\tau^-) \left[-\int_{\tau^+}^{\tau^-} 2F dt + \frac{Fx_2}{d_{AB}}(\tau^+) \right] \right\} + \theta(r^2) \\ &= \frac{1}{-\Theta(r^2)} \left\{ d_{AB}(\tau^-) \left[\int_{\tau^-}^{\tau^+} 2F(t) dt + \theta(r^3) \right] \right\} + \theta(r^2) = \\ &= \frac{1}{-\Theta(r^2)} \{ \Theta(r) [2I_{min} + \theta(r^3)] \} + \theta(r^2) = -\Theta(r). \end{aligned}$$

Вычислим $H_1(\tau^+)$ ещё другим путём. В точке $p_1 = \rho(\bar{t})$ имеем $H_1 = 0$. На интервале $t \in [\bar{t}, \tau^-]$ уравнение (2.28) не имеет особенностей, и функция $H_1(t)$ задаётся уравнением (2.29). Подставляя $t_0 = \bar{t}$, $H_1(\bar{t}) = 0$ и учитывая, что $d_{AB} = \Theta(r)$, $\dot{\zeta} = \frac{A_1x_2 - A_2x_1}{x_1^2} = \Theta(1)$ на интервале $t \in [\bar{t}, \tau^-]$, находим

$$\begin{aligned} H_1(\tau^-) &= -e^{\int_{\bar{t}}^{\tau^-} \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial A}{\partial x} \right) d\tau} \int_{\zeta(\tau^-)}^{\zeta(\bar{t})} e^{-\int_{\bar{t}}^{\tau} \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial A}{\partial x} \right) d\sigma} \frac{C}{d_{AB}} \frac{1}{\dot{\zeta}} d\zeta = \\ &= -\Theta(1) \int_{\zeta(\tau^-)}^{\zeta(\bar{t})} -\Theta(r) d\zeta = \Theta(r)(\zeta(\bar{t}) - \zeta(\tau^-)). \end{aligned}$$

Сравнивая оба полученные для $H_1(\tau^-)$ выражения, находим

$$\zeta(\bar{t}) - \zeta(\tau^-) = \zeta_1 - \zeta(\tau^-) = \zeta(p_1) - \zeta(\tau^-) = -\Theta(1). \quad (2.65)$$

Из второго уравнения (2.60) и уравнения (2.64) следует $\zeta_0 = -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta_1} + \theta(r)$, $\zeta_2 = \zeta(\tau^+) = -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta(\tau^-)} + \theta(r)$. Комбинируя эти результаты, получаем

$$\zeta_0(x_{12}, \zeta_2) = \zeta_2 - \Theta(1). \quad (2.66)$$

Точка $p_2 = \rho(\tau^+)$ зависит от исходной точки s на кривой γ_{A_2} . Если устремить s к \tilde{x} , то $\rho(\tau^+)$ также стремится к \tilde{x} : $\lim_{x_2(s) \rightarrow 0} x_1(p_2) = 0$. Значение $\zeta(p_2)$ меняется в интервале $[\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. Таким образом, точки p_2 при $s \rightarrow \tilde{x}$ имеет некоторую точку накопления $(x_1, \zeta) = (0, \zeta_2^*)$, где $\zeta_2^* \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. Так как отображение \mathbf{P} непрерывно продолжается на линию $x_{12} = 0$, из соотношения (2.66) получаем $\zeta_0^* = \zeta_0(0, \zeta_2^*) < \zeta_2^*$. Утверждение 2.38 доказано. \square

Ниже будет показано, что точка накопления ζ_2^* однозначно определяется параметрами α, ϕ , и что $\zeta(p_2) = \zeta_2^* + \theta(r)$.

2.7.4 Связь между функцией $\tilde{\phi}$ и интегралом I_{min}

Предметом этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Утверждение 2.39. *Если ϕ лежит в интервале $(\tilde{\phi}(\alpha), \frac{3}{2}\pi)$, то справедливо $I_{min} = -\Theta(r^2)$. Если ϕ лежит в интервале $(\pi, \tilde{\phi}(\alpha))$, то $I_{min} = +\Theta(r^2)$.*

Вычислим значение I_{min} . Рассмотрим случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$ по отдельности.

Пусть $\alpha = 0$. Рассмотрим производную по времени вдоль траектории ρ от следующего выражения:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} [(\cos \phi - \sin \phi)(x_1^2 + x_2^2)t + (\cos \phi + \sin \phi)x_1x_2] = \\ & = -\frac{1}{4} [(\cos \phi - \sin \phi)(x_1^2 + x_2^2 + 2t(x_1A_1 + x_2A_2)) + (\cos \phi + \sin \phi)(A_1x_2 + x_1A_2)] \\ & = -\frac{1}{4} [(\cos \phi - \sin \phi)(x_1^2 + x_2^2 + 2t(x_1x_2 - x_2x_1)) + (\cos \phi + \sin \phi)(x_2^2 - x_1^2) + \theta(r^3)] \\ & = -\frac{1}{2} [-\sin \phi x_1^2 + \cos \phi x_2^2 + \theta(r^3)] = F + \theta(r^3). \end{aligned}$$

Имеем $\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2(A_1x_1 + A_2x_2) = \theta(r^3)$, из этого следует $(x_1^2 + x_2^2)(\tau^+) = (x_1^2 + x_2^2)(\tau^-) + \theta(r^3)$. С учётом того, что $x_2(\tau^+) = x_2(\tau^-) = \hat{x}_2$, находим $x_1(\tau^+) = x_1(\tau^-) + \theta(r^2)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau^-}^{\tau^+} F(\rho(t)) dt & = -\frac{1}{4} [(\cos \phi - \sin \phi)(x_1^2 + x_2^2)t + (\cos \phi + \sin \phi)x_1x_2]_{\tau^-}^{\tau^+} + \theta(r^3) = \\ & = (\cos \phi - \sin \phi)((x_1^-)^2 + \hat{x}_2^2) \frac{\tau^- - \tau^+}{4} - \frac{\cos \phi + \sin \phi}{4} \hat{x}_2(x_1^+ - x_1^-) + \theta(r^3) = \\ & = -(\cos \phi - \sin \phi) \frac{x_1^+ - x_1^-}{2} \hat{x}_2 \frac{(x_1^-)^2 + \hat{x}_2^2}{x_1^- \hat{x}_2} \frac{\tau^- - \tau^+}{4} - \frac{\cos \phi + \sin \phi}{4} \hat{x}_2(x_1^+ - x_1^-) + \theta(r^3) \\ & = \cos \phi \frac{x_1^+ - x_1^-}{2} \hat{x}_2 \left\{ (\operatorname{tg} \phi - 1) \left[\left(\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + \frac{\hat{x}_2}{x_1^-} \right) \frac{\tau^- - \tau^+}{4} - \frac{1}{2} \right] - 1 + \theta(r) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\alpha} \frac{d}{dt} [\sin \phi(x_1^2 + x_2^2) - \cos \phi(x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 + (1 + \alpha^2)x_2^2)] = \\ & = \frac{1}{4\alpha} [2 \sin \phi(A_1x_1 + A_2x_2) - 2 \cos \phi(A_1x_1 + \alpha A_1x_2 + \alpha x_1A_2 + (1 + \alpha^2)A_2x_2)] \\ & = \frac{1}{2\alpha} [\sin \phi(\alpha x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_1) - \\ & \quad - \cos \phi(\alpha x_1^2 + x_1x_2 + \alpha^2 x_1x_2 + \alpha x_2^2 - \alpha x_1^2 - (1 + \alpha^2)x_1x_2)] + \theta(r^3) = \\ & = \frac{1}{2} [\sin \phi x_1^2 - \cos \phi x_2^2] + \theta(r^3) = F + \theta(r^3). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
\int_{\tau^-}^{\tau^+} F(\rho(t)) dt &= \frac{1}{4\alpha} \left[\sin \phi (x_1^2 + x_2^2) - \cos \phi (x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + (1 + \alpha^2) x_2^2) \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \theta(r^3) \\
&= \frac{1}{4\alpha} (x_1^+ - x_1^-) \left[\sin \phi (x_1^+ + x_1^-) - \cos \phi (x_1^+ + x_1^- + 2\alpha \hat{x}_2) \right] + \theta(r^3) \\
&= \cos \phi \frac{x_1^+ - x_1^-}{2} \hat{x}_2 \left[(\operatorname{tg} \phi - 1) \frac{x_1^+ + x_1^-}{2\alpha \hat{x}_2} - 1 + \theta(r) \right].
\end{aligned}$$

Обозначим множитель при $\operatorname{tg} \phi - 1$ через Λ :

$$\Lambda = \begin{cases} \left(\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + \frac{\hat{x}_2}{x_1^-} \right) \frac{\tau^- - \tau^+}{4} - \frac{1}{2}, & \text{если } \alpha = 0; \\ \frac{x_1^+ + x_1^-}{2\alpha \hat{x}_2}, & \text{если } \alpha \neq 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

Таким образом, имеем

$$I_{min} = \cos \phi \frac{x_1^+ - x_1^-}{2} \hat{x}_2 [(\operatorname{tg} \phi - 1)\Lambda - 1 + \theta(r)]. \quad (2.68)$$

В случае $\alpha = 0$ имеем $x_1^+ = x_1^- + \theta(r^2)$, поэтому из (2.64) следует $\sqrt{\operatorname{tg} \phi} = \frac{\hat{x}_2}{x_1^-} + \theta(r)$, т.е.

$$-\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} = -\sqrt{\operatorname{ctg} \phi} + \theta(r), \quad -\frac{x_1^+}{\hat{x}_2} = \sqrt{\operatorname{ctg} \phi} + \theta(r). \quad (2.69)$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Подставляя уравнение $\frac{x_1^- x_1^+}{\hat{x}_2^2} = 2\alpha\Lambda$ в (2.64), находим

$$-\operatorname{ctg} \phi = \frac{x_1^-}{\hat{x}_2} \left(2\alpha\Lambda - \frac{x_1^-}{\hat{x}_2} \right) + \theta(r), \quad \Rightarrow \quad -\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} = -\alpha\Lambda \pm \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi + \theta(r)}.$$

Так как $-\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} < 0$, здесь нужно выбрать знак $-$. Если разрешать относительно $-\frac{x_1^+}{\hat{x}_2}$, получим

$$-\frac{x_1^+}{\hat{x}_2} = -\alpha\Lambda \pm \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi + \theta(r)}.$$

Так как $-\frac{x_1^+}{\hat{x}_2} > 0$, нужно выбрать знак $+$. Таким образом, находим

$$-\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} = -\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi + \theta(r)}, \quad -\frac{x_1^+}{\hat{x}_2} = -\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi + \theta(r)}. \quad (2.70)$$

Сравнивая с (2.69), мы видим, что эти соотношения при $\alpha = 0$ остаются в силе.

Обозначим время перехода $\tau^+ - \tau^-$ через T . Выразим его через Λ . Имеем в силу разложений (2.3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \theta(r^2) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^+ \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T} \begin{pmatrix} x_1^- \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \theta(r^2) = \\ &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \omega e^{\frac{\alpha}{2}T} \cos \omega T + \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T & e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T \\ -e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T & \omega e^{\frac{\alpha}{2}T} \cos \omega T - \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^- \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \theta(r^2) \\ &= \begin{pmatrix} x_1^- & \frac{\alpha}{2\omega} x_1^- + \frac{1}{\omega} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 & -\frac{1}{\omega} x_1^- - \frac{\alpha}{2\omega} \hat{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{2}T} \cos \omega T \\ e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T \end{pmatrix} + \theta(r^2), \end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}$. Поделим на \hat{x}_2 и умножим на обратную матрицу. Находим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{2}T} \cos \omega T \\ e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T \end{pmatrix} &= \frac{1}{\frac{1}{\omega} \left(\frac{(x_1^-)^2}{\hat{x}_2^2} + \alpha \frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + 1 \right)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \left(\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + \frac{\alpha}{2} \right) & \frac{1}{\omega} \left(\frac{\alpha x_1^-}{2 \hat{x}_2} + 1 \right) \\ 1 & -\frac{x_1^-}{\hat{x}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1^+}{\hat{x}_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \theta(r) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + \frac{(x_1^-)^2}{\hat{x}_2^2}} \begin{pmatrix} \frac{x_1^- x_1^+}{\hat{x}_2^2} + \frac{\alpha x_1^- + x_1^+}{2 \hat{x}_2} + 1 \\ \omega \frac{x_1^+ - x_1^-}{\hat{x}_2} \end{pmatrix} + \theta(r). \end{aligned}$$

С учётом (2.64) и (2.70) отсюда следует

$$\omega \text{ctg} \omega T = \frac{-\text{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \text{ctg} \phi}} + \theta(r). \quad (2.71)$$

Разрешим это уравнение относительно T . Учитывая, что $\omega T \in (\pi, 2\pi)$, получаем

$$T = \frac{1}{\omega} \left(\pi + \text{arccctg} \frac{-\text{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \text{ctg} \phi}} \right) + \theta(r).$$

Значения arccctg здесь и далее предполагаются в интервале $(0, \pi)$.

Рассмотрим выражение для $e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin \omega T$. Используя (2.70) и учитывая, что $\sin \omega T < 0$, находим

$$e^{-\frac{\alpha}{2}T} \frac{1}{\sin \omega T} = -e^{-\frac{\alpha}{2}T} \sqrt{1 + \text{ctg}^2 \omega T} = \frac{1 + \alpha \frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + \frac{(x_1^-)^2}{\hat{x}_2^2}}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \text{ctg} \phi}} + \theta(r).$$

Умножая на знаменатель и подставляя (2.71), получаем

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{\alpha}{2}T} \sqrt{4\omega^2(\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi) + (-\text{ctg}\phi + \alpha^2\Lambda + 1)^2} = \\
& = e^{-\frac{\alpha}{2}T} \sqrt{4(\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi) - \alpha^2\text{ctg}\phi + (1 - \text{ctg}\phi)^2 + 2(1 - \text{ctg}\phi)\alpha^2\Lambda} = \\
& = e^{-\frac{\alpha}{2}T} \sqrt{(1 + \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2(2\Lambda + 1)(2\Lambda - \text{ctg}\phi)} = \\
& = 1 + \alpha \frac{x_1^-}{\hat{x}_2} + \frac{(x_1^-)^2}{\hat{x}_2^2} + \theta(r) = \\
& = 1 + \alpha \left(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right) + \left(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right)^2 + \theta(r) = \\
& = 1 + \alpha \left(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right) + \alpha^2\Lambda^2 + 2\alpha\Lambda\sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} + \alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi + \theta(r) \\
& = 1 + \text{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1) \left(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right) + \theta(r). \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Рассмотрим два выражения $1 + \text{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1) \left(\alpha\Lambda \pm \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right)$. Их сумма и произведение являются квадратными трёхчленами в Λ . Покажем, что эти трёхчлены имеют отрицательные дискриминанты.

Произведение имеет вид

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \text{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1) \left(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right) \right) * \\
& \quad * \left(1 + \text{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1) \left(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \text{ctg}\phi} \right) \right) = \\
& = (1 + \text{ctg}\phi)^2 + (1 + \text{ctg}\phi)\alpha(2\Lambda + 1)2\alpha\Lambda + \alpha^2(2\Lambda + 1)^2(-\text{ctg}\phi) = \\
& = (1 + \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2(2\Lambda + 1)(2\Lambda - \text{ctg}\phi). \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Дискриминант этого трёхчлена имеет вид

$$\begin{aligned}
& (2\alpha^2(1 - \text{ctg}\phi))^2 - 4(4\alpha^2)((1 + \text{ctg}\phi)^2 - \alpha^2\text{ctg}\phi) = \\
& = 4\alpha^2 (\alpha^2(1 - \text{ctg}\phi)^2 - 4(1 + \text{ctg}\phi)^2 + 4\alpha^2\text{ctg}\phi) = 4\alpha^2(\alpha^2 - 4)(1 + \text{ctg}\phi)^2 < 0,
\end{aligned}$$

если $\alpha \neq 0$. Если же $\alpha = 0$, то трёхчлен (2.73) вырождается в положительную константу. Таким образом, произведение (2.73) положительно при всех $\Lambda \in \mathbf{R}$.

Сумма исследуемых выражений имеет вид

$$2(1 + \text{ctg}\phi) + \alpha(2\Lambda + 1)2\alpha\Lambda.$$

При $\alpha = 0$ она также является положительной константой, а при $\alpha \neq 0$ её дискриминант равен

$$4\alpha^4 - 4(4\alpha^2)2(1 + \text{ctg}\phi) = 4\alpha^2(\alpha^2 - 8 - 8\text{ctg}\phi) < 0.$$

Поэтому сумма также положительна при всех $\Lambda \in \mathbf{R}$.

Следовательно, оба выражения $1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1) \left(\alpha\Lambda \pm \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi} \right)$ положительны при всех $\Lambda \in \mathbf{R}$.

Вернёмся к уравнению (2.72). Подставляя значение для T , в силу (2.73) находим

$$\sqrt{\frac{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi})}{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi})}} = e^{\frac{\alpha}{2\omega} \left(\pi + \operatorname{arcctg} \frac{-\operatorname{ctg}\phi + \alpha^2\Lambda + 1}{-2\sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} \right) + \theta(r)}.$$

При $\alpha = 0$ это уравнение не даёт никакой информации, поэтому вычислим Λ , подставляя T и (2.69) непосредственно в выражение для Λ . Находим

$$2\Lambda + 1 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\operatorname{ctg}\phi} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}\phi}} \right) \left(\pi + \operatorname{arcctg} \frac{1 - \operatorname{ctg}\phi}{-2\sqrt{\operatorname{ctg}\phi}} \right) + \theta(r).$$

Таким образом, следующая функция имеет порядок $\theta(r)$:

$$F(\alpha, \operatorname{ctg}\phi; \Lambda) = \frac{\frac{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi})}{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi})} - e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arcctg} \left(\frac{-\operatorname{ctg}\phi + \alpha^2\Lambda + 1}{-2\omega\sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} \right) \right)}}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$F(\alpha, \operatorname{ctg}\phi; \Lambda) = -2 \frac{(2\Lambda + 1)\sqrt{\operatorname{ctg}\phi}}{1 + \operatorname{ctg}\phi} - \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1 - \operatorname{ctg}\phi}{-2\sqrt{\operatorname{ctg}\phi}}, \quad \alpha = 0.$$

Нетрудно видеть, что дифференцирование числителя в выражении для $\alpha \neq 0$ по α и подстановка $\alpha = 0$ приводит к выражению для $\alpha = 0$. Отсюда следует, что функция F непрерывна.

Утверждение 2.40. При фиксированных $\alpha, \operatorname{ctg}\phi$ функция F имеет в точности один корень Λ^* по Λ , и $\Lambda^* < -\frac{1}{2}$.

Доказательство: Для $\alpha = 0$ утверждение очевидно.

Пусть $\alpha \neq 0$. Нетрудно видеть, что множество корней инвариантно относительно замены $\alpha \rightarrow -\alpha$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\alpha > 0$. Тогда выражение, стоящее в экспоненте — положительное, и если Λ^* — некоторый корень, то

$$\frac{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda^* + 1)\alpha\Lambda^* - \alpha(2\Lambda^* + 1)\sqrt{\alpha^2(\Lambda^*)^2 + \operatorname{ctg}\phi}}{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda^* + 1)\alpha\Lambda^* + \alpha(2\Lambda^* + 1)\sqrt{\alpha^2(\Lambda^*)^2 + \operatorname{ctg}\phi}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^* < -\frac{1}{2}.$$

Значит, корни могут лежать только в интервале $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Вычислим функцию F на концах этого интервала.

$$F(\alpha, \operatorname{ctg}\phi; -\frac{1}{2}) = \frac{1 - e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arcctg} \left(\frac{-\operatorname{ctg}\phi - \frac{\alpha^2}{2} + 1}{-2\omega\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \operatorname{ctg}\phi}} \right) \right)}}{\alpha} < 0,$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} F(\alpha, \operatorname{ctg} \phi; \Lambda) = \\
&= \frac{\frac{1+\operatorname{ctg} \phi}{\alpha} + \lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} (2\Lambda+1) \left(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi} \right)}{1 + \operatorname{ctg} \phi + \alpha \lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} \frac{(2\Lambda+1)\alpha\Lambda}{\Lambda^2} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg} \phi}{\alpha^2 \Lambda^2}}}{\frac{1}{\Lambda^2}}} - \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} \operatorname{arccctg} \frac{-\operatorname{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}} \right)}}{\alpha} \\
&= \frac{\frac{1+\operatorname{ctg} \phi}{\alpha} + \lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} (2\Lambda+1) \left(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi} \right)}{1 + \operatorname{ctg} \phi + 2\alpha^2 \left(-\frac{\operatorname{ctg} \phi}{2\alpha^2} \right)} - \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \frac{\alpha^2}{2\omega \sqrt{\alpha^2}} \right)}}{\alpha} = \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(1 + \operatorname{ctg} \phi + \alpha \lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} (2\Lambda+1) \left(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi} \right) - e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \frac{\alpha}{2\omega} \right)} \right) = +\infty.
\end{aligned}$$

Значит, в данном интервале корень существует. Покажем его единственность. Достаточно показать, что из $F = 0$ следует $\frac{\partial F}{\partial \Lambda} < 0$. Находим для производной $\frac{\partial F}{\partial \Lambda} |_{F=0}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{-2\alpha(2\Lambda+1)(\sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi})}{1 + \operatorname{ctg} \phi + \alpha(2\Lambda+1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi})} - \frac{\alpha}{\omega} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \operatorname{arccctg} \left(\frac{-\operatorname{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}} \right) e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \left(\frac{-\operatorname{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}} \right) \right)}}{\alpha} \\
&= \frac{-2\alpha \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left((2\Lambda+1)(\sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}) \right) (1 + \operatorname{ctg} \phi + \alpha(2\Lambda+1)\alpha\Lambda) + 2\alpha(2\Lambda+1)(\sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}) \frac{\partial}{\partial \Lambda} (1 + \operatorname{ctg} \phi + \alpha(2\Lambda+1)\alpha\Lambda)}{\left(1 + \operatorname{ctg} \phi + \alpha(2\Lambda+1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}) \right)^2} - \frac{\alpha}{\omega} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \operatorname{arccctg} \left(\frac{-\operatorname{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}} \right) e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \left(\frac{-\operatorname{ctg} \phi + \alpha^2 \Lambda + 1}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \Lambda^2 + \operatorname{ctg} \phi}} \right) \right)}}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{-\operatorname{ctg}\phi + \alpha^2\Lambda + 1}{-2\omega\sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} \right)^2} \frac{\partial}{\partial\Lambda} \left(\frac{-\operatorname{ctg}\phi + \alpha^2\Lambda + 1}{-2\omega\sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} \right) \frac{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda - \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi})}{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi})} \\
& + \frac{\alpha}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2 \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} = \\
& = -2 \frac{(2(\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi) + (2\Lambda + 1)\alpha^2\Lambda) (1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha^2(2\Lambda + 1)\Lambda)}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2 \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} + \\
& + 2 \frac{(2\Lambda + 1)(\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi)\alpha^2(4\Lambda + 1)}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2 \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} + \\
& + 2 \frac{-\alpha^2(\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi) + (\alpha^2\Lambda + 1 - \operatorname{ctg}\phi)\alpha^2\Lambda}{\left((2\Lambda + 1 - \operatorname{ctg}\phi)^2 + (4 - \alpha^2)(\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi) \right) \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} * \\
& * \frac{(1 + \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha^2(2\Lambda + 1)(2\Lambda - \operatorname{ctg}\phi)}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2} = \\
& = \frac{2}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2 \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} * \\
& \left(-(\alpha^2(4\Lambda^2 + \Lambda) + 2\operatorname{ctg}\phi)(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha^2(2\Lambda^2 + \Lambda)) + \alpha^2(2\Lambda + 1)(4\Lambda + 1)(\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi) \right. \\
& \left. + \frac{\left((1 + \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha^2(2\Lambda + 1)(2\Lambda - \operatorname{ctg}\phi) \right) \alpha^2(-\operatorname{ctg}\phi + (1 - \operatorname{ctg}\phi)\Lambda)}{\left(\alpha^4\Lambda^2 + 2\alpha^2\Lambda(1 - \operatorname{ctg}\phi) + (1 - \operatorname{ctg}\phi)^2 + 4\operatorname{ctg}\phi + 4\alpha^2\Lambda^2 - \alpha^2(\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi) \right)} \right) = \\
& = \frac{2}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2 \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} \left(-2\operatorname{ctg}\phi(1 + \operatorname{ctg}\phi) \right. \\
& \left. + \alpha^2 \left(-(4\Lambda^2 + \Lambda)(1 + \operatorname{ctg}\phi) - 2\operatorname{ctg}\phi(2\Lambda^2 + \Lambda) + (2\Lambda + 1)(4\Lambda + 1)\operatorname{ctg}\phi \right) \right. \\
& \left. + \frac{\left((1 + \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha^2(2\Lambda + 1)(2\Lambda - \operatorname{ctg}\phi) \right) \alpha^2(-\operatorname{ctg}\phi + (1 - \operatorname{ctg}\phi)\Lambda)}{\left((1 + \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha^2(2\Lambda - 2\Lambda\operatorname{ctg}\phi + 4\Lambda^2 - \operatorname{ctg}\phi) \right)} \right) = \\
& = \frac{2 \left(-2\operatorname{ctg}\phi(1 + \operatorname{ctg}\phi) + \alpha^2 \left(-4\Lambda^2 + 2\Lambda\operatorname{ctg}\phi \right) \right)}{\left(1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha(2\Lambda + 1)(\alpha\Lambda + \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}) \right)^2 \sqrt{\alpha^2\Lambda^2 + \operatorname{ctg}\phi}} < 0.
\end{aligned}$$

Подставляя $\alpha = 0$ убеждаемся в том, что эта формула верна и для $\alpha = 0$. Утверждение 2.40 доказано. \square

Так как производная $\frac{\partial F}{\partial\Lambda}(\Lambda^*)$ не равна нулю, то величина Λ , определяющаяся из уравнений (2.67), удовлетворяет оценке $\Lambda = \Lambda^* + \theta(r)$. Значение Λ^* в силу утверждения 2.40 однозначно определяется из α и ϕ .

Вернёмся к уравнению (2.68). Имеем

$$I_{min} = \Theta(r^2) [(\Lambda^* + \theta(r))(\operatorname{tg}\phi - 1) - 1 + \theta(r)].$$

Если $\operatorname{tg}\phi \geq 1$, то $I_{min} = -\Theta(r^2)$. В случае $\phi = \frac{3}{2}\pi$ имеем $F = -\frac{1}{2}x_1^2 + \theta(r^3)$. Ясно, что в этом случае найдётся замкнутый контур, удовлетворяющий условиям леммы 1. Исследуем случай $\operatorname{tg}\phi < 1$, или $\operatorname{ctg}\phi > 1$. Тогда

$$I_{min} = \Theta(r^2) \left[-\Lambda^* - \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\phi} + \theta(r) \right] = \Theta(r^2) \left[-\Lambda^* + \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} + \theta(r) \right].$$

В силу того, что $\frac{\partial F}{\partial \Lambda}|_{F=0} < 0$, имеем

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}F \left(\frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right) &= \operatorname{sgn} \left(F(\Lambda^*) - F \left(\frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right) \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} - \Lambda^* \right), \\ \Rightarrow I_{min} &= -\operatorname{sgn}F \left(\frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right) \Theta(r^2) + \theta(r^3). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Таким образом, задача нахождения знака квадратической части интеграла I_{min} сведена к определению знака числа $F \left(\frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right)$. Подстановка даёт

$$\begin{aligned} F \left(\alpha, \operatorname{ctg}\phi; \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right) &= \\ &= \frac{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha \frac{1 + \operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \left(\alpha \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} - \sqrt{\alpha^2 \frac{\operatorname{ctg}^2\phi}{(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2} + \operatorname{ctg}\phi} \right)}{1 + \operatorname{ctg}\phi + \alpha \frac{1 + \operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \left(\alpha \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} + \sqrt{\alpha^2 \frac{\operatorname{ctg}^2\phi}{(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2} + \operatorname{ctg}\phi} \right)} - e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \frac{-\operatorname{ctg}\phi + \alpha^2 \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} + 1}{-2\omega \sqrt{\alpha^2 \frac{\operatorname{ctg}^2\phi}{(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2} + \operatorname{ctg}\phi}} \right)} \\ &= \frac{\alpha}{(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha \left(\alpha \operatorname{ctg}\phi + \sqrt{\alpha^2 \operatorname{ctg}^2\phi + \operatorname{ctg}\phi(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2} \right)} - e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \frac{\alpha^2 \operatorname{ctg}\phi + (1 - \operatorname{ctg}\phi)^2}{2\omega \sqrt{\alpha^2 \operatorname{ctg}^2\phi + \operatorname{ctg}\phi(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2}} \right)} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \operatorname{ctg}\phi} + \alpha \sqrt{\operatorname{ctg}\phi}}{\sqrt{(1 - \operatorname{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \operatorname{ctg}\phi} - \alpha \sqrt{\operatorname{ctg}\phi}}} - e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{ctg}\phi + (1 - \operatorname{ctg}\phi)^2}}{2\omega \sqrt{\operatorname{ctg}\phi}} \right)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha}, \quad \text{если } \alpha \neq 0; \end{aligned}$$

$$F \left(0, \operatorname{ctg}\phi; \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right) = \frac{2\sqrt{\operatorname{ctg}\phi}}{\operatorname{ctg}\phi - 1} - \pi - \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{ctg}\phi - 1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}\phi}}.$$

Заметим, что выражение $\bar{F}(\alpha, \phi) = F \left(\alpha, \operatorname{ctg}\phi; \frac{\operatorname{ctg}\phi}{1 - \operatorname{ctg}\phi} \right)$, рассматриваемое как функция переменных α, ϕ , совпадает с функцией $\tilde{\phi}$, определённой в начале параграфа.

Утверждение 2.41. Для каждого фиксированного $\alpha \in (-2, 2)$ существует в точности один корень $\tilde{\phi} \in (\pi, \frac{5}{4}\pi)$ функции $\bar{F}(\alpha, \phi)$ по ϕ . Если $\phi \in (\pi, \tilde{\phi})$, то $\bar{F}(\alpha, \phi) < 0$. Если $\phi \in (\tilde{\phi}, \frac{5}{4}\pi)$, то $\bar{F}(\alpha, \phi) > 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 2.40.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Вычислим функцию \bar{F} на концах интервала $(\pi, \frac{5}{4}\pi)$.

$$\lim_{\text{ctg}\phi \rightarrow 1} \bar{F}(0, \phi) = +\infty, \quad \lim_{\text{ctg}\phi \rightarrow +\infty} \bar{F}(0, \phi) = -\pi < 0.$$

Таким образом, существует по крайней мере один корень. Покажем единственность. Для этого вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \text{ctg}\phi} &= \frac{\frac{\text{ctg}\phi - 1}{\sqrt{\text{ctg}\phi}} - 2\sqrt{\text{ctg}\phi}}{(\text{ctg}\phi - 1)^2} + \frac{1}{1 + \frac{(\text{ctg}\phi - 1)^2}{4\text{ctg}\phi}} \frac{2\sqrt{\text{ctg}\phi} - (\text{ctg}\phi - 1)\frac{1}{\sqrt{\text{ctg}\phi}}}{4\text{ctg}\phi} = \\ &= \frac{-1 - \text{ctg}\phi}{\sqrt{\text{ctg}\phi}(\text{ctg}\phi - 1)^2} + \frac{\text{ctg}\phi + 1}{(\text{ctg}\phi + 1)^2\sqrt{\text{ctg}\phi}} = \\ &= \frac{-(\text{ctg}\phi + 1)^2 + (\text{ctg}\phi - 1)^2}{\sqrt{\text{ctg}\phi}(\text{ctg}\phi - 1)^2(\text{ctg}\phi + 1)} = -\frac{4\sqrt{\text{ctg}\phi}}{(\text{ctg}\phi - 1)^2(\text{ctg}\phi + 1)} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi} > 0$, и функция $\bar{F}(0, \phi)$ строго монотонна. Поэтому она может иметь только один корень.

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Заметим, что множество корней инвариантно относительно замены $\alpha \rightarrow -\alpha$. Поэтому достаточно показать существование корня при $\alpha < 0$. Вычислим в предположении $\alpha < 0$ пределы

$$\lim_{\text{ctg}\phi \rightarrow 1} \bar{F}(\alpha, \phi) = \frac{1}{\alpha} \left(-e^{\frac{\alpha}{\omega}(\pi + \text{arccctg} \frac{-\alpha}{2\omega})} \right) > 0,$$

$$\lim_{\text{ctg}\phi \rightarrow +\infty} \bar{F}(\alpha, \phi) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{\frac{\alpha}{\omega}(\pi + \text{arccctg}(+\infty))} \right) < 0.$$

Покажем единственность корня. Вычислим производную $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \text{ctg}\phi} |_{\bar{F}=0}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} \left\{ 2 \frac{-\frac{\partial}{\partial \text{ctg}\phi} (\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \text{ctg}\phi}) \alpha \sqrt{\text{ctg}\phi} + \frac{\partial}{\partial \text{ctg}\phi} (\alpha \sqrt{\text{ctg}\phi}) \sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \text{ctg}\phi}}{\left(\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \text{ctg}\phi} - \alpha \sqrt{\text{ctg}\phi} \right)^2} \right. \\ &\left. - \frac{\alpha}{\omega} \left(-\frac{1}{1 + \frac{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \text{ctg}\phi}{(4 - \alpha^2) \text{ctg}\phi}} \right) \frac{\partial}{\partial \text{ctg}\phi} \frac{\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \text{ctg}\phi}}{2\omega \sqrt{\text{ctg}\phi}} e^{\frac{\alpha}{\omega} \left(\pi + \text{arccctg} \frac{\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2 \text{ctg}\phi}}{2\omega \sqrt{\text{ctg}\phi}} \right)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{(2 - 2\text{ctg}\phi - \alpha^2)\alpha\text{ctg}\phi + \alpha((1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi)}{\sqrt{\text{ctg}\phi}\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} \left(\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} - \alpha\sqrt{\text{ctg}\phi} \right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{\omega} \frac{(-2 + 2\text{ctg}\phi + \alpha^2)\omega\text{ctg}\phi - ((1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi)\omega}{((4 - \alpha^2)\text{ctg}\phi + (1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi)\sqrt{\text{ctg}\phi}\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi}} \right. \\
&\quad \left. * \frac{\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} + \alpha\sqrt{\text{ctg}\phi}}{\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} - \alpha\sqrt{\text{ctg}\phi}} \right\} = \\
&= \frac{1 - \text{ctg}^2\phi}{\sqrt{\text{ctg}\phi}\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} \left(\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} - \alpha\sqrt{\text{ctg}\phi} \right)^2} + \\
&\quad + \frac{-1 + \text{ctg}^2\phi}{(1 + \text{ctg}\phi)^2 \sqrt{\text{ctg}\phi}\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} \left(\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} - \alpha\sqrt{\text{ctg}\phi} \right)^2} \\
&= \frac{(1 - \text{ctg}^2\phi) 4\text{ctg}\phi}{\sqrt{\text{ctg}\phi}\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} \left(\sqrt{(1 - \text{ctg}\phi)^2 + \alpha^2\text{ctg}\phi} - \alpha\sqrt{\text{ctg}\phi} \right)^2 (1 + \text{ctg}\phi)^2} < 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi} > 0$. Таким образом, при $\alpha \neq 0$ корень также единственен. Из неравенства $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi} > 0$ следует, что при $\phi < \tilde{\phi}$ справедливо $\bar{F} < 0$, а при $\phi > \tilde{\phi} - \bar{F} > 0$. Утверждение 2.41 доказано. \square

Утверждение 2.39 теперь следует из утверждения 2.41 и соотношения (2.74).

\square

Таким образом, исчезновение решения уравнения $\zeta_0(0, \zeta_2) = \zeta_2$ при изменении параметра ϕ сопряжено с возникновением замкнутого контура, удовлетворяющего условиям леммы 1.

2.7.5 Построение оптимального синтеза

Вернёмся к конструкции из параграфа 2.7.3. Из уравнения (2.70) следует, что в точках $\rho(\tau^+)$ справедливо $\zeta_2 = \frac{1}{-\alpha\Lambda^* - \sqrt{\alpha^2(\Lambda^*)^2 + \text{ctg}\phi}} + \theta(r)$, где значение Λ^* зависит только от α и ϕ . Корректность определения последнего доказана в утверждении 2.40. Таким образом, если точка s стремится к \tilde{x} по кривой γ_{A_2} , то величина ζ_2 стремится к значению $\zeta_2^* = \frac{1}{-\alpha\Lambda^* - \sqrt{\alpha^2(\Lambda^*)^2 + \text{ctg}\phi}}$. В параграфе 2.7.3 было показано, что для точек $\rho(\tau^+)$ справедливо $\zeta_0(x_{12}, \zeta_2) = \zeta_2 - \Theta(1)$, и, следовательно, $\zeta_0^* = \zeta_0(0, \zeta_2^*) < \zeta_2^*$.

В силу утверждения 2.37 существуют решения $\zeta_2^{*1}, \zeta_2^{*2}$ уравнения $\zeta_0(0, \zeta_2) = \zeta_2$, удовлетворяющие $0 < \zeta_2^{*1} < \zeta_0^* < \zeta_2^* < \zeta_2^{*2}$ (см. рис. 2.7.1). Точки $(0, \zeta_2^{*1})$ и

$(0, \zeta_2^{*2})$ являются неподвижными точками отображения \mathbf{P} . Расширим интервал $[\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$, задающий множество \mathcal{K}_2 , настолько, чтобы он содержал точки $\zeta_2^{*1}, \zeta_2^{*2}$ в своей внутренности.

Рассмотрим луч $\zeta = \zeta_2^{*1} = \text{const}$ во втором ортанте. Он пересекает траекторию ρ в некоторой точке q_2 с координатами $(x_1, \zeta) = (x_1(q_2), \zeta_2^{*1})$. Рассмотрим точки $q_1 = \mathbf{P}_0(q_2), q_0 = \mathbf{P}_1(q_1)$. Имеем

$$\begin{aligned}\zeta(p_0) &= \zeta_0^* + \int_0^{x_1(p_2)} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x_{12}}(x_1, \zeta_2^*) dx_1 + \int_{\zeta_2^*}^{\zeta(p_2)} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2}(x_1(p_2), \zeta) d\zeta = \\ &= \zeta_0^* + \theta(x_1(p_2)) + \theta(\zeta(p_2) - \zeta_2^*) = \zeta_0^* + \theta(r), \\ \zeta(p_1) &= -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta(q_1)} + \theta(r) = -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta_0^*} + \theta(r), \\ \zeta(q_0) &= \zeta_2^{*1} + \int_0^{x_1(q_2)} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_{10}}(x_1, \zeta_2^{*1}) dx_1 = \zeta_2^{*1} + \theta(r), \\ \zeta(q_1) &= -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta(q_0)} + \theta(r) = -\frac{\text{tg}\phi}{\zeta_2^{*1}} + \theta(r).\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\zeta(q_0) - \zeta(p_0) &= \zeta_2^{*1} - \zeta_0^* + \theta(r) = -\Theta(1), \\ \zeta(q_1) - \zeta(p_1) &= -\text{tg}\phi \left(\frac{1}{\zeta_2^{*1}} - \frac{1}{\zeta_0^*} \right) + \theta(r) = -\Theta(1), \\ \zeta(q_2) - \zeta(p_2) &= \zeta_2^{*1} - \zeta_2^* + \theta(r) = -\Theta(1).\end{aligned}\tag{2.75}$$

Так как q_2 лежит на траектории ρ , то q_1 также лежит на ρ . На траектории ρ между точками q_2 и p_2 справедливо $\zeta = \Theta(1)$, и, таким образом, $x_1 = -\Theta(r)$, а между точками $\rho(\tau^-)$ и q_1 справедливо $\zeta = -\Theta(1)$ и $x_1 = \Theta(r)$. Учитывая далее, что на ρ имеем $\zeta = \Theta(1)$, и принимая во внимание соотношения (2.65) и (2.75), находим

$$\begin{aligned}x_2(p_2) &= x_2(q_2) + \int_{\zeta(q_2)}^{\zeta(p_2)} \frac{\dot{x}_2}{\dot{\zeta}} d\zeta = x_2(q_2) + \int_{\zeta(q_2)}^{\zeta(p_2)} \frac{-x_1 + \theta(r^2)}{\dot{\zeta}} d\zeta = \\ &= x_2(q_2) + \Theta(r)(\zeta(p_2) - \zeta(q_2)) = x_2(q_2) + \Theta(r), \\ x_2(q_1) &= x_2(\tau^-) + \int_{\zeta(\tau^-)}^{\zeta(q_1)} \frac{-x_1 + \theta(r^2)}{\dot{\zeta}} d\zeta = \\ &= x_2(\tau^-) - \Theta(r)(\zeta(q_1) - \zeta(p_1) + \zeta(p_1) - \zeta(\tau^-)) = x_2(\tau^-) + \Theta(r), \\ x_2(q_0) &= x_2(q_1) + \theta(r^2).\end{aligned}$$

Складывая эти равенства и учитывая $x_2(p_2) = x_2(\tau_-)$, находим $x_2(q_0) = x_2(q_2) + \Theta(r)$. Отсюда следует

$$x_1(q_0) = -\frac{x_2(q_0)}{\zeta(q_0)} = -\frac{x_2(q_2) + \Theta(r)}{\zeta(q_2) + \theta(r)} = x_1(q_2) - \Theta(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1(q_2)}{x_1(q_0)} = 1 - \Theta(1). \quad (2.76)$$

Утверждение 2.42. Соотношение $\frac{x_{12}}{x_{10}}$ является липшицевым на множестве \mathcal{K}_2 .

Доказательство: Вычислим производные этого выражения с помощью производных (2.63):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{x_{12}}{x_{10}}}{\partial x_{12}} &= \frac{x_{10} - x_{12}(\frac{x_{10}}{x_{12}} + \theta(r))}{x_{10}^2} = \theta(1), \\ \frac{\partial \frac{x_{12}}{x_{10}}}{\partial \zeta_2} &= -\frac{x_{12}\theta(r)}{x_{10}^2} = -\theta(1). \quad \square \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение $\frac{x_{12}}{x_{10}}$ непрерывно продолжается на множество $(x_{12}, \zeta_2) \in \{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. В силу (2.76) имеем $\frac{x_{12}}{x_{10}}(0, \zeta_2^{*1}) < 1$, так как $x_1(q_2) \rightarrow 0$, если точка $s \in \gamma_{A_2}$ стремится к \tilde{x} . Отсюда следует следующее утверждение.

Следствие 2.13. Существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $c' < 1$, что, если точка p_2 меняется в множестве $\{\zeta_2 \in [\zeta_2^{*1} - \varepsilon, \zeta_2^{*1} + \varepsilon]\}$, то $\frac{x_1(p_2)}{x_1(p_0)} < c'$, если окрестность U достаточно малая. \square

Имеем $\frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2} = \frac{C(p_2)}{C(p_0)} + \theta(r) = \frac{\sin \phi x_1^2(p_2) + \cos \phi x_2^2(p_2)}{\sin \phi x_1^2(p_0) + \cos \phi x_2^2(p_0)} + \theta(r) = \left(\frac{x_1(p_2)}{x_1(p_0)}\right)^2 \frac{1 + \text{ctg} \phi \zeta_2^2}{1 + \text{ctg} \phi \zeta_0^2} + \theta(r)$, $\frac{\partial x_{10}}{\partial x_{12}} = \frac{x_1(p_0)}{x_1(p_2)} + \theta(r)$. Из липшицевости функции $\zeta_0(x_{12}, \zeta_2)$ следует оценка $\zeta_0 - \zeta_2^{*1} = \theta(r + |\zeta_2 - \zeta_2^{*1}|)$. Поэтому, если $|\zeta_2 - \zeta_2^{*1}| \leq \varepsilon$, то $\frac{C(p_2)}{C(p_0)} = \left(\frac{x_1(p_2)}{x_1(p_0)}\right)^2 + \theta(r + \varepsilon)$. В частности, отсюда следует, что $\frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2}(0, \zeta_2^{*1}) < 1$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2}(0, \zeta_2^{*2}) > 1$. Поэтому уравнение $\zeta_0(0, \zeta_2) = \zeta_2$ не имеет решений, кроме $\zeta_2^{*1}, \zeta_2^{*2}$. Мы доказали следующее утверждение, которое утверждает, что неподвижная точка $(0, \zeta_2^{*1})$ является в некотором смысле гиперболической.

Утверждение 2.43. Существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $c > 1$, что, если точка p_2 меняется в множестве $\{\zeta_2 \in [\zeta_2^{*1} - \varepsilon, \zeta_2^{*1} + \varepsilon]\}$, то $\frac{\partial x_{10}}{\partial x_{12}} > c$ и $\frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2} < \frac{1}{c}$, если окрестность U достаточно малая. \square

Отсюда следует, что отображение Пуанкаре \mathbf{P} удовлетворяет условиям леммы о гиперболической точке. Здесь x_1 играет роль координаты x , а ζ — координаты y . Зададим произвольную константу $L > 0$ и выберем окрестность U настолько малой, чтобы выполнялось неравенство $L\|\frac{\partial x_{10}}{\partial \zeta_2}\| < 1 - \frac{1}{c}$. Отсюда следует $1 - L\|\frac{\partial x_{10}}{\partial \zeta_2}\| - \|\frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2}\| > 0$. Теперь будем увеличивать L и одновременно уменьшать окрестность U таким образом, чтобы произведение $L\|\frac{\partial x_{10}}{\partial \zeta_2}\|$ оставалось постоянным, пока не будет выполнено неравенство $\|\frac{\partial \zeta_0}{\partial x_{12}}\| < Lc(1 - L\|\frac{\partial x_{10}}{\partial \zeta_2}\| - \|\frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_2}\|)$. Отсюда следует (2.10). Зафиксируем L и будем уменьшать U , пока не будет выполнено неравенство $c > 1 + L\|\frac{\partial x_{10}}{\partial \zeta_2}\|$. Отсюда следует (2.9).

В окрестности точки $(0, \zeta_2^{*1})$ существуют два инвариантных относительно отображения \mathbf{P} подмногообразия. Устойчивым усом является отрезок $\{0\} \times [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. Неустойчивый ус в силу леммы о гиперболической точке представляется функцией $\zeta = \zeta(x_1)$, непрерывно дифференцируемой при $x_1 < 0$. Ясно, что $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \zeta(x_1) = \zeta_2^{*1}$.

Таким образом, неустойчивый ус представляет собой непрерывно дифференцируемую, липшицевую кривую во втором ортанте фазовой плоскости, подходящую к точке \tilde{x} трансверсально координатным осям. Эта кривая инвариантна относительно отображения Пуанкаре \mathbf{P} и является кривой переключения управления с 0 на 1. Обозначим её через ρ_{01} , а её поднятие на \mathcal{M}_- — через $\hat{\rho}_{01}$. Если точка \hat{p}_2 пробегает кривую $\hat{\rho}_{01}$, то \hat{p}_1 пробегает некоторую кривую $\hat{\rho}_{10}$, а точка \hat{p}_0 — снова $\hat{\rho}_{01}$. Проекция ρ_{10} кривой $\hat{\rho}_{10}$ является кривой переключения управления с 1 на 0. Траектории $\hat{\sigma}$ систем (2.43), (2.54), соединяющие кривые $\hat{\rho}_{01}$ и $\hat{\rho}_{10}$, образуют в T^*X интегральное многообразие \mathcal{N}^* системы (2.1), (2.17). В силу гладкости правой части уравнений (2.21) и утверждения 2.16 кривые $\hat{\rho}_{01}$, $\hat{\rho}_{10}$ и ρ_{10} также принадлежат классу C^1 . В силу теоремы о непрерывной дифференцируемости решений дифференциального уравнения от начальных данных многообразие \mathcal{N}^* принадлежит классу PC^1 с разрывом производных на кривых $\hat{\rho}_{01}$ и $\hat{\rho}_{10}$.

Покажем, что производная функции $\zeta_1(x_{11})$, задающей кривую ρ_{10} , ограничена. Используя (2.62), находим

$$\frac{d\zeta_1}{dx_{11}} = \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_{12}} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_2} \frac{d\zeta_2}{dx_{12}}}{\frac{\partial x_{11}}{\partial x_{12}} + \frac{\partial x_{11}}{\partial \zeta_2} \frac{d\zeta_2}{dx_{12}}} = \frac{\theta(1) + \Theta(1)\theta(1)}{\Theta(1) + \theta(r)\theta(1)} = \theta(1). \quad (2.77)$$

Утверждение 2.44. Наклон $\frac{dx_2}{dx_1}$ кривых ρ_{01}, ρ_{10} имеет предел при подходе к точке \tilde{x} .

Доказательство: Используем оценку $\frac{d\zeta}{dx_1} = \theta(1)$.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dx_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dx_1}} = \frac{x_2}{x_1} - x_1 \frac{d\zeta}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} + \theta(r). \quad (2.78)$$

Доказательство завершается применением утверждения 2.6. \square

Следующее утверждение следует из утверждения 2.7.

Утверждение 2.45. *Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, входящих в точки кривой ρ_{01} , и поток траекторий системы $\dot{x} = A + B$, выходящих из точек кривой ρ_{01} , не пересекаются друг с другом. То же самое верно и для кривой ρ_{10} .* \square

Из утверждения 2.45 следует, что многообразие \mathcal{N}^* является поднятием проколотой окрестности точки \tilde{x} в кокасательное расслоение T^*X . Присоединив к этому многообразию точку $(x = 0, \psi = 0)$, получим сечение \mathcal{N} расслоения T^*X . Точка $(x = 0, \psi = 0)$ в силу следствия 2.13 является ω -предельной для траекторий на этом сечении.

Лагранжевость сечения \mathcal{N} и существование функции Беллмана следуют из утверждения 2.35. Таким образом, синтез, индуцированный сечением \mathcal{N} , оптимален. Свойства, перечисленные во второй части теоремы 2.3, теперь легко проверяются. Теорема 2.3 доказана.

Замечание: Совершенно аналогично можно построить лагранжево интегральное сечение для значения ζ_2^{*2} . В этом случае лемму о гиперболической точке надо применять не к \mathbf{P} , а к обратному отображению \mathbf{P}^{-1} . Это сечение соответствует другому синтезу, для траекторий которого точка \tilde{x} является α -предельной.

3 Аналитические нормальные формы

В этой главе мы изучим бифуркацию между системами, описанными в теореме 2.2 и теореме 2.3 часть 2. Эта бифуркация происходит, когда параметр ϕ проходит через значение π . В дальнейшем мы будем предполагать $\phi = \pi$. В предыдущей главе были изучены системы (0.1), (0.2), в которых функции A, B, F, G принадлежали классу C^3 . В этой главе мы ограничимся случаем, когда A, B, F, G аналитические, чтобы исключить патологии. Тогда выполнены условия утверждения 1.4, и можно ограничиться исследованием систем, которые вдобавок к условиям (1.5) удовлетворяют уравнениям (1.7). Таким образом, мы минимизируем функционал

$$J = \int_0^\infty F(x) dt \rightarrow \min \quad (3.1)$$

по траекториям системы

$$\dot{x} = (1 - u)A(x) + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $x \in U \subset \mathbf{R}^2$, $u \in [0, 1]$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \tilde{x} = (0, 0)$. Здесь $A, F \in C^\omega$, и выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $\alpha \in (-2, 2)$.

3.1 Предварительное исследование

В силу уравнений (3.2) функция Понтрягина запишется в виде $H = H_0 + uH_1$, где

$$H_0 = -F + \langle \psi, A \rangle, \quad H_1 = \langle \psi, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A \rangle = \psi_1 - \langle \psi, A \rangle. \quad (3.4)$$

Сопряжённые уравнения имеют вид

$$\dot{\psi} = \nabla F + (u - 1) \sum_{\mu} \psi_{\mu} \nabla A_{\mu}. \quad (3.5)$$

В силу уравнений (3.2) фазовая точка при управлении $u = 1$ движется с единичной скоростью вдоль координатных линий $x_2 = \text{const}$. В частности, ось Ox_1 является траекторией, проходящей через точку \tilde{x} . Обозначим эту траекторию через γ .

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\psi} = \nabla F \quad (3.6)$$

с гамильтонианом $H_0 + H_1 = -F + \psi_1$. При $u = 1$ она совпадает с системой (3.2),(3.5). Рассмотрим траекторию $\hat{\gamma}$ системы (3.6), проходящую через точку $(x = 0, \psi = 0)$ в момент времени $t = 0$. Обозначим ту её часть, которая соответствует временам $t < 0$, через $\hat{\gamma}_-$, а проекцию этой части на фазовую плоскость — через γ_- . Как было установлено в главе 2, ключевую роль в вопросе о наличии особых режимов играет поведение функции C . Следующее утверждение показывает, что поведение функции H_1 на траектории $\hat{\gamma}$ определяется поведением функции C на оси Ox_1 .

Утверждение 3.1. Пусть на γ для всех $k < n$ справедливо $\frac{d^k C}{dt^k} = 0$ в начале координат, где $n \geq 2$ — некоторое натуральное число. Тогда на траектории $\hat{\gamma}$ в начале координат выполнено $\frac{d^k H_1}{dt^k} = 0$ для всех $k < n$, и $\frac{d^n H_1}{dt^n} = \frac{1}{n-1} \frac{d^n C}{dt^n}$ в начале координат. Если $C \equiv 0$ на γ , то $H_1 \equiv 0$ на $\hat{\gamma}$.

Доказательство: Из уравнений (1.7) следует, что

$$d_{AB} = -A_2, \quad [A, B] = [A, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] = -\frac{\partial A}{\partial x_1}.$$

Подставляя $u = 1$ и первое из этих соотношений в уравнение (2.28), получим

$$C = d_{AB}\dot{H}_1 - d_{AB}H_1 = -A_2\dot{H}_1 + \dot{A}_2H_1.$$

Дифференцируя по t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^k C}{dt^k} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{d^i H_1}{dt^i} \frac{d^{k-i+1} A_2}{dt^{k-i+1}} - \frac{d^{i+1} H_1}{dt^{i+1}} \frac{d^{k-i} A_2}{dt^{k-i}} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\binom{k}{i} - \binom{k}{i-1} \right) \frac{d^i H_1}{dt^i} \frac{d^{k-i+1} A_2}{dt^{k-i+1}}. \end{aligned}$$

Здесь биномиальный коэффициент считается равным нулю, если он не определён. В начале координат имеем $A_2 = 0$, $H_1 = 0$, поэтому в этой точке

$$\frac{d^k C}{dt^k} = \sum_{i=1}^k \left(\binom{k}{i} - \binom{k}{i-1} \right) \frac{d^i H_1}{dt^i} \frac{d^{k-i+1} A_2}{dt^{k-i+1}}. \quad (3.7)$$

Докажем утверждение индукцией по k . Для $k = 1$ имеем $\frac{dH_1}{dt} = 0$ в силу (2.25). Допустим, что $k > 1$, и $\frac{d^i H_1}{dt^i} = 0$ для всех $1 \leq i < k$. Тогда в сумме (3.7) остаётся только член при $i = k$, т.е.

$$\frac{d^k C}{dt^k} = \left(\binom{k}{k} - \binom{k}{k-1} \right) \frac{d^k H_1}{dt^k} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = (k-1) \frac{d^k H_1}{dt^k}.$$

При $k < n$ в силу условий утверждения следует $\frac{d^k H_1}{dt^k} = 0$, а при $k = n$ имеем

$$\frac{1}{n-1} \frac{d^n C}{dt^n} = \frac{d^n H_1}{dt^n}.$$

В случае $C \equiv 0$ имеем $\frac{d^k C}{dt^k} = 0$ для всех k , отсюда $\frac{d^k H_1}{dt^k} = 0$ для всех k , и в силу аналитичности функции $H_1(t)$ следует $H_1 \equiv 0$. \square

Таким образом, главные члены в разложениях Тейлора в нуле функций C и H_1 на траектории $\hat{\gamma}$ совпадают с точностью до множителя $n-1$.

Утверждение 3.2. *Множество точек на фазовой плоскости, в которых $\frac{\partial C}{\partial x_2} = 0$, в окрестности точки \tilde{x} образует аналитическую кривую γ_{max} , проходящую через \tilde{x} и касающуюся оси Ox_1 в этой точке. Выше кривой γ_{max} имеем $\frac{\partial C}{\partial x_2} < 0$, ниже — $\frac{\partial C}{\partial x_2} > 0$.*

Доказательство: В силу утверждения 2.11 и условия $\phi = \pi$ имеем в точке \tilde{x} соотношения $\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{2} \neq 0$, $\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial x_2} = 0$. По теореме о неявной функции следует, что существует в точности одна функция $x_2 = \chi_{max}(x_1)$, для которой $\chi_{max}(0) = 0$ и $\frac{\partial C}{\partial x_2}(x_1, \chi_{max}(x_1)) \equiv 0$. Её производная в точке \tilde{x} равна $\frac{d\chi_{max}}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}} = 0$. Эта функция задаёт кривую γ_{max} . Далее, в окрестности точки \tilde{x} имеем $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial C}{\partial x_2} < 0$, поэтому выше кривой γ_{max} справедливо неравенство $\frac{\partial C}{\partial x_2} < 0$, ниже — неравенство $\frac{\partial C}{\partial x_2} > 0$. \square

Обозначим функцию, задающую кривую γ_{max} , через χ : $x_2 = \chi(x_1)$, а функцию $C(x_1, \chi(x_1))$ от переменной x_1 — через C_{max} . В силу утверждения 2.11 и соотношения $\phi = \pi$ имеем $\nabla C(\tilde{x}) = 0$, $\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2}(\tilde{x}) = 0$. Поэтому из равенства $\frac{d\chi(x_1)}{dx_1}(0) = 0$ следует, что $\frac{dC_{max}}{dx_1}(0) = \frac{d^2 C_{max}}{dx_1^2}(0) = 0$. Отсюда находим $C_{max} = \theta(x_1^3)$.

Рассмотрим ещё раз конструкцию, описанную в параграфе 2.5.3 главы 2. В силу аналитичности функций A и F функция $\tilde{H}_1(x_1, \zeta, t)$ также будет аналитичной. Равенство $\tilde{H}_1(0, \zeta_*, 0) = 0$ также выполнено для любого $\zeta_* \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. Уравнение $\tilde{H}_1 = 0$, однако, уже не определяет дифференцируемой функции $t =$

$t_*(x_1, \zeta)$, так как равна нулю производная $\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial t}(0, \zeta_*, 0) = \frac{1}{2} \sin \phi = 0$. В качестве зависимой переменной выберем x_1 , поскольку $\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_1}(0, \zeta_*, 0) = \frac{1}{2}(\sin \phi + \cos \phi \zeta_*^2) = -\frac{\zeta_*^2}{2} \neq 0$.

Итак, по теореме о неявной функции существует в точности одна функция $x_1 = x_{1*}(\zeta, t)$, такая, что $x_{1*}(\zeta, 0) = 0 \forall \zeta \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$ и $\tilde{H}_1(x_{1*}(\zeta, t), \zeta, t) \equiv 0$. Функция x_{1*} является аналитической.

Рассмотрим два случая. Следующее утверждение вытекает непосредственно из утверждения 3.1.

Утверждение 3.3. *Если функция C на траектории γ тождественно равна нулю, то $x_{1*}(\zeta, t) \equiv 0$. \square*

Если же $C \neq 0$ на γ , то существуют вещественное число $c \neq 0$ и натуральное число $n \geq 3$, такие, что $\frac{\partial^k C}{\partial x_1^k}(\tilde{x}) = 0$ для всех $k < n$, а $\frac{\partial^n C}{\partial x_1^n} = (-1)^n c$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.4. *Функция x_{1*} в окрестности линии $\{(\zeta, t) \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta] \times \{0\}\}$ удовлетворяет оценке $x_{1*}(\zeta, t) = -\frac{2c}{(n-1)n!\zeta^2}(-t)^{n-1} + \theta(t^n)$.*

Доказательство: В силу утверждения 3.1 производные функции H_1 на траектории $\hat{\gamma}$ в начале координат удовлетворяют следующим условиям. Для всех $k < n$ выполнено $\frac{d^k H_1}{dt^k} = 0$, и $\frac{d^n H_1}{dt^n} = \frac{(-1)^n c}{n-1}$. Ряд Тейлора по t функции \tilde{H}_1 на траектории $\hat{\gamma}$ равен ряду для функции H_1 , в котором все степени сокращены на единицу. Поэтому в нуле имеем $\frac{d^k \tilde{H}_1}{dt^k} = \frac{1}{k+1} \frac{d^{k+1} H_1}{dt^{k+1}}$ для всех k . Подставляя, находим $\frac{d^k \tilde{H}_1}{dt^k} = 0$ для всех $k < n-1$, и $\frac{d^{n-1} \tilde{H}_1}{dt^{n-1}} = \frac{(-1)^n c}{(n-1)n}$.

Производные по t вдоль траектории $\hat{\gamma}$ равны частным производным по t при $x_1 = 0$. Но $x_{1*}(\zeta_*, 0) = 0$ для любого $\zeta_* \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{1*}}{\partial t}(\zeta_*, 0) &= -\frac{\partial \tilde{H}_1 / \partial t}{\partial \tilde{H}_1 / \partial x_1} = 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial^{n-2} x_{1*}}{\partial t^{n-2}}(\zeta_*, 0) &= -\frac{\partial^{n-2} \tilde{H}_1 / \partial t^{n-2}}{\partial \tilde{H}_1 / \partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial^{n-1} x_{1*}}{\partial t^{n-1}}(\zeta_*, 0) &= -\frac{\partial^{n-1} \tilde{H}_1 / \partial t^{n-1}}{\partial \tilde{H}_1 / \partial x_1} = \frac{(-1)^n c}{(n-1)n} = \frac{2(-1)^n c}{(n-1)n\zeta_*^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения этих производных в ряд Тейлора функции x_{1*} , непосредственно получаем утверждение. \square

Следующее утверждение следует из утверждения 3.4 и аналитичности функции x_{1*} .

Утверждение 3.5. Пусть существуют вещественное число $c \neq 0$ и натуральное число $n \geq 3$, такие, что $\frac{\partial^k C}{\partial x_1^k}(\tilde{x}) = 0$ для всех $k < n$, а $\frac{\partial^n C}{\partial x_1^n} = (-1)^n c$. Если $c < 0$, то уравнение $x_1 = x_{1*}(\zeta, t)$ в области $x_1 \geq 0$, $t \leq 0$ в окрестности множества $\{(x_1, \zeta, t) \mid x_1 = 0, t = 0\}$ разрешимо по t и определяет непрерывную функцию

$$t = t_*(x_1, \zeta) = -\sqrt[n-1]{-\frac{(n-1)n!\zeta^2}{2c}x_1^{\frac{1}{n-1}} + \theta(x_1^{\frac{2}{n-1}})},$$

разлагающуюся в ряд по переменным $\sqrt[n-1]{x_1}$ и ζ . Если $c > 0$, то решения $x_1 = 0, t = 0$ являются единственными решениями уравнения $x_1 = x_{1*}(\zeta, t)$ в области $x_1 \geq 0$, $t \leq 0$ в окрестности множества $\{(x_1, \zeta, t) \mid x_1 = 0, t = 0\}$. \square

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A, \quad \dot{\psi} = \nabla F - \sum_{\mu} \psi_{\mu} \nabla A_{\mu} \quad (3.8)$$

с гамильтонианом $H_0 = -F + \langle \psi, A \rangle$. Уравнения (3.8) описывают движение системы (3.2), (3.5) при управлении $u = 0$.

Пусть K_1, K_2 некоторые числа, $K_1 < K_2$. Определим множество

$$\mathcal{K}_2 = \{(x_1, x_2) \in U \mid x_1 < 0, x_2 \in [K_1(-x_1)^{\frac{3}{2}}, K_2(-x_1)^{\frac{3}{2}}]\}.$$

В силу утверждения 2.8 оно обладает поднятием $\hat{\mathcal{K}}_2$ на многообразии переключения \mathcal{M}_- . Пусть p — точка на \mathcal{K}_2 , \hat{p} — её поднятие на $\hat{\mathcal{K}}_2$, а $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (3.8), проходящая через \hat{p} в момент времени $t = 0$. Обозначим через \bar{t} момент времени, в который проекция $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ проходит через точку $q = \mathbf{P}_0(p)$.

Эволюция функции H_1 в силу системы (3.8) на траектории $\hat{\sigma}$ описывается уравнением (2.46). Подставляя $t_0 = 0, t = \bar{t}$, $H_1(0) = H_1(\bar{t}) = 0$ в (2.46) и учитывая $F = \frac{x_2^2}{2} + \theta(r^3)$, $\bar{t} = -\Theta(1)$ и $\frac{Fx_2 + \theta(r^4)}{d_{AB}}(\sigma(0)) = \frac{(\frac{x_2^2}{2} + \theta(r^3))x_2 + \theta(r^4)}{x_1 + \theta(r^2)} = \theta((-x_1)^3)$, получим

$$0 = -\Theta(r^{-2}) \left\{ -\frac{x_2^3(\bar{t})}{2} + \theta(r^4) + (x_1(\bar{t}) + \theta(r^2))\Theta(r^2) \right\} + \theta(r^2),$$

$$\Rightarrow x_1(\bar{t})\Theta(r^2) - x_2^3(\bar{t}) = \theta(r^4).$$

Так как $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, отсюда следует $x_1(\bar{t}) = \Theta(1)x_2(\bar{t})$. Так как $d_{AB}(\bar{t}) = x_1(\bar{t}) + \theta(r^2) > 0$ находим $x_1(\bar{t}) = \Theta(r)$, $x_2(\bar{t}) = \Theta(r)$. Отсюда, в частности, следует $C(\sigma(\bar{t})) = -\Theta(r^2)$. Таким образом, точка $q = \sigma(\bar{t})$ лежит в первом ортанте.

Следствие 3.1. *Существуют такие числа $\zeta_\alpha < 0, \zeta_\beta < 0$, что множество $\mathbf{P}_0[\mathcal{K}_2]$ содержится в множестве $\mathcal{K}_1 = \{q \in U \mid x_1(q) > 0, \zeta(q) \in [\zeta_\alpha, \zeta_\beta]\}$. На множестве \mathcal{K}_1 справедлива оценка $C = -\Theta(r^2)$. \square*

3.2 Синтез с особым режимом

Целью данного параграфа является доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если*

а) существует такое натуральное число $n \geq 3$, что $\frac{\partial^k C}{\partial x_1^k}(\tilde{x}) = 0$ для всех $k < n$

и $\text{sgn} \frac{\partial^n C}{\partial x_1^n}(\tilde{x}) = (-1)^n$; или

б) $C \equiv 0$ на оси Ox_1 ;

то оптимальный синтез существует и имеет следующий вид.

В третьем ортанте имеется особый режим γ_n , по которому фазовая точка за конечное время попадает в начало координат. Касательной к γ_n является ось Ox_1 . В первом ортанте существует кривая переключения ρ_{10} с управления $u = 1$ на $u = 0$, расположенная трансверсально к осям координат и стыкующаяся с γ_n в начале координат. Траектории, исходящие из ρ_{10} , за конечное время попадают на γ_n . Оставшаяся часть окрестности U заполнена траекториями с управлением $u = 1$, которые попадают либо на кривую ρ_{10} , либо на γ_n , а одна траектория — в терминальную точку \tilde{x} (см. рис. 3.2 слева).

Если $C \equiv 0$ на оси Ox_1 , и существует окрестность точки \tilde{x} , в которой кривая γ_{max} не пересекается с внутренностью третьего ортанта, то кривая γ_n совпадает с осью Ox_1 .

Доказательство в целом проводится аналогично доказательству теоремы 2.2 из главы 2.

Исследуем поведение функции C в левой полуплоскости. В силу утверждения 3.2 функция C , ограниченная на вертикальную линию $\{x_1 = const\}$, принимает максимальное значение $C_{max}(x_1)$ в точке пересечения $(x_1, \chi(x_1))$ этой линии с кривой γ_{max} . Из условий теоремы вытекает, что в окрестности точки \tilde{x} справедливо $C_{max}(x_1) \geq 0$ для $x_1 \leq 0$.

Определим две функции χ_B, χ_H от x_1 при $x_1 \leq 0$.

$$\chi_B(x_1) = \inf\{x_2 \mid x_2 \geq \chi(x_1), C(x_1, x_2) \leq 0\},$$

$$\chi_H(x_1) = \sup\{x_2 \mid x_2 \leq \chi(x_1), C(x_1, x_2) \leq 0\}.$$

Если $C_{max} \geq 0$ для $x_1 \leq 0$, то $C = 0$ в точках $(x_1, \chi_B(x_1)), (x_1, \chi_H(x_1))$. В силу утверждения 3.2 на линии $\{x_1 = const\}$ больше не существует точек, кроме $(x_1, \chi_B(x_1))$ и $(x_1, \chi_H(x_1))$, в которых $C = 0$.

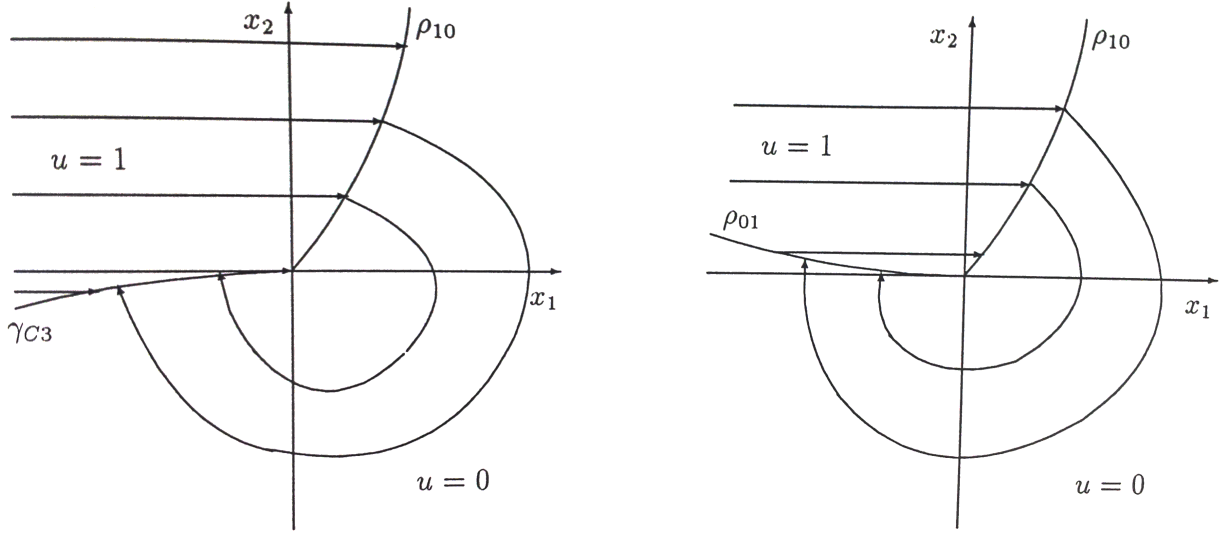


Рис. 3: Синтез с особым режимом и спиралевидный синтез

Вычислим функции χ_B, χ_H в случае $C_{max} \geq 0$. На кривой γ_{max} имеем $\frac{\partial C}{\partial x_2} = 0$, поэтому $-C_{max} = \int_{\chi(x_1)}^{\chi_B(x_1)} \int_{\chi(x_1)}^{\tau} \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}(x_1, \sigma) d\sigma d\tau = \int_{\chi(x_1)}^{\chi_H(x_1)} \int_{\chi(x_1)}^{\tau} \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}(x_1, \sigma) d\sigma d\tau$. Имеем

$$-C_{max}(x_1) = \int_{\chi(x_1)}^{\chi_B(x_1)} \int_{\chi(x_1)}^{\tau} (-1 + \theta(r)) d\sigma d\tau = (-1 + \theta(r)) \frac{1}{2} (\chi_B(x_1) - \chi(x_1))^2.$$

Аналогичное уравнение находим для χ_H . Отсюда следует

$$\chi_B(x_1) - \chi(x_1) = \sqrt{2C_{max}(x_1)(1 + \theta(r))}, \quad \chi(x_1) - \chi_H(x_1) = \sqrt{2C_{max}(x_1)(1 + \theta(r))}. \quad (3.9)$$

В силу $C_{max} = \theta(x_1^3)$ отсюда следуют оценки $\chi_B(x_1) - \chi(x_1) = \theta(|x_1|^{\frac{3}{2}})$, $\chi(x_1) - \chi_H(x_1) = \theta(|x_1|^{\frac{3}{2}})$. Так как $\chi(x_1) = \theta(x_1^2)$, то имеем

$$\chi_B(x_1) = \theta(|x_1|^{\frac{3}{2}}), \quad \chi_H(x_1) = \theta(|x_1|^{\frac{3}{2}}). \quad (3.10)$$

Утверждение 3.6. Пусть $C_{max}(x_1) \geq 0$ при $x_1 \leq 0$. Тогда функции χ_B, χ_H при $x_1 < 0$ аналитичны. В нуле они разлагаются в степенной ряд по степеням от $\sqrt{-x_1}$.

Доказательство: Рассмотрим два случая.

1. Функция C_{max} тождественно равна нулю. Тогда функции χ_B, χ_H совпадают с χ , и, следовательно, аналитичны.

2. $C_{max} > 0$ при $x_1 < 0$ в окрестности точки \tilde{x} . Тогда выполнены условия утверждения 2.2, где роль координат x, y играют $-x_1, x_2$. Его применение завершает доказательство. \square

В силу оценок (3.10) эти ряды могут начинаться только со степени $(-x_1)^{\frac{3}{2}}$, и первые производные $\frac{d\chi_H}{dx_1}, \frac{d\chi_B}{dx_1}$ стремятся к нулю при $x_1 \rightarrow 0$.

Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда $\chi_B(x_1) \geq 0$, $\chi_H(x_1) \leq 0$, и кривая, определённая функцией χ_H , лежит в третьем ортанте. Обозначим её через γ_H . В строящемся синтезе она будет выполнять ту же роль, что и кривая γ_{C3} из предыдущей главы.

Утверждение 3.7. *Кривая γ_H задаётся функцией $\varphi(r)$, которая раскладывается в ряд по степеням \sqrt{r} .*

Доказательство: В силу оценок (3.10) и утверждения 3.6 кривая γ_H задаётся функцией $\zeta = \zeta(x_1)$, раскладывающейся в нуле в ряд по степеням $\sqrt{-x_1}$. Утверждение теперь следует из утверждений 2.4 и 2.5. \square

В силу утверждения 2.8 кривая γ_H поднимается на многообразии \mathcal{M}_- . Обозначим это поднятие через $\hat{\gamma}_H$.

На многообразии \mathcal{M}_- имеем $\dot{H}_1 = \frac{C}{d_{AB}}$, поэтому на кривой $\hat{\gamma}_H$ в силу $C = 0$ справедливо $\dot{H}_1 = 0$. Таким образом, $\hat{\gamma}_H$ является особым режимом. Далее, из уравнения (2.36) следует, что на кривой $\hat{\gamma}_H$ справедливо $\ddot{H}_1 = \frac{\dot{C}}{d_{AB}} = -\frac{\dot{C}}{A_2}$.

Утверждение 3.8. *Пусть $\chi_H \leq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $C_{max} > 0$ при $x_1 < 0$, то на кривой $\hat{\gamma}_H$ справедливо $\ddot{H}_1 < 0$ в случае $u = 0$, и $\ddot{H}_1 \geq 0$ в случае $u = 1$. Равенство $\ddot{H}_1 = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда кривая γ_H совпадает с осью Ox_1 , т.е. $\chi_H \equiv 0$.*

2. *Если $C_{max} \equiv 0$, то $\ddot{H}_1 = 0$ независимо от управления.*

Доказательство: Рассмотрим сначала пункт 1. Градиент функции C ортогонален к касательной к γ_H . В силу того, что в точках γ_H выполнено $\frac{\partial C}{\partial x_2} > 0$, градиент пропорционален вектору $(-\frac{d\chi_H}{dx_1}, 1)$. Имеем оценки $\chi_H \leq 0$, $\chi_H = \theta((-x_1)^{\frac{3}{2}})$. В силу утверждения 3.6 отсюда вытекает $\frac{d\chi_H}{dx_1} \geq 0$ и $\frac{d\chi_H}{dx_1} = \theta(\sqrt{-x_1})$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \text{sgn}\ddot{H}_1|_{u=0} &= -\text{sgn}\dot{C} \text{sgn}A_2 = -\text{sgn}\langle \nabla C, A \rangle = -\text{sgn}\left(-\frac{d\chi_H}{dx_1}A_1 + A_2\right) = \\ &= -\text{sgn}(-x_1 + \theta(r^{\frac{3}{2}})) = -1 \\ \text{sgn}\ddot{H}_1|_{u=1} &= -\text{sgn}\dot{C} \text{sgn}A_2 = -\text{sgn}\frac{\partial C}{\partial x_1} = \text{sgn}\frac{d\chi_H}{dx_1} \geq 0. \end{aligned}$$

При этом равенство $\ddot{H}_1|_{u=1} = 0$ выполняется только при $\frac{d\chi_H}{dx_1} = 0$. В силу утверждения 3.6 это имеет место тогда и только тогда, когда $\chi_H \equiv 0$, т.е. γ_H совпадает с осью Ox_1 .

Перейдём к пункту 2. В этом случае все три кривые χ , χ_H , χ_V совпадают. Таким образом, с одной стороны, градиент ∇C коллинеарен вектору $(-\frac{d\chi_H}{dx_1}, 1)$, а с другой стороны, $\frac{\partial C}{\partial x_2} = 0$ на γ_H . Следовательно, градиент функции C равен нулю на γ_H , и $\ddot{H}_1 = 0$ независимо от управления. \square

Следствие 3.2. Пусть $\chi_H \leq 0$. В случае $C_{max} > 0$ кривая $\hat{\gamma}_H$ является особым режимом первого глобального порядка, и на ней выполнено необходимое условие Кэлли [46]. В случае $C_{max} \equiv 0$ особый режим имеет порядок, больший единицы, но он только локальный. \square

Утверждение 3.9. Пусть $\chi_H \leq 0$. Тогда управление, с которым фазовая точка движется по γ_H , лежит в интервале $(0, 1]$. При этом она достигает начала координат за конечное время. Значение $u = 1$ применяется только в случае $\chi_H \equiv 0$.

Доказательство: Фазовая скорость направлена по касательной к кривой γ_H , т.е.

$$\dot{x} = A + u \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A \right) = const \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d\chi_H}{dx_1} \end{pmatrix}.$$

Константа определяется из уравнения для первой компоненты. Из уравнения для второй компоненты находим

$$u = \frac{-\frac{d\chi_H}{dx_1} A_1 + A_2}{\frac{d\chi_H}{dx_1} (1 - A_1) + A_2} = 1 - \frac{\frac{d\chi_H}{dx_1}}{\frac{d\chi_H}{dx_1} (1 - A_1) + A_2}.$$

Имеем $A_2 > 0$, $\frac{d\chi_H}{dx_1} \geq 0$, $(1 - A_1) > 0$, поэтому знаменатель больше нуля. Для числителя находим $-\frac{d\chi_H}{dx_1} A_1 + A_2 = -x_1 + \theta(r^{\frac{3}{2}}) > 0$. Отсюда получаем оба неравенства $u > 0$, $u \leq 1$. Равенство $u = 1$ выполняется только в случае $\frac{d\chi_H}{dx_1} \equiv 0$, т.е. $\chi_H \equiv 0$.

Покажем, что фазовая точка, движущаяся по особому режиму γ_H , достигает начала координат за конечное время. Рассмотрим знаменатель. Если ряд, через который выражается функция χ_H , начинается со степени $(-x_1)^{\frac{3}{2}}$, то $\frac{d\chi_H}{dx_1} = \Theta(\sqrt{-x_1})$, и $\frac{d\chi_H}{dx_1} (1 - A_1) + A_2 = \Theta(\sqrt{-x_1})$. Но $-\frac{d\chi_H}{dx_1} A_1 + A_2 = \Theta(-x_1)$, следовательно, $u = \Theta(\sqrt{-x_1})$. Если же ряд функции χ_H начинается со степени x_1^2 или более высоких степеней, то знаменатель имеет порядок $\Theta(-x_1)$. В этом случае имеем оценку $u = \Theta(1)$. Имеем $\dot{x}_1 = A_1 + u(1 - A_1)$. Отсюда следует в первом случае $\dot{x}_1 = \Theta(\sqrt{-x_1})$, а во втором $-\dot{x}_1 = \Theta(1)$. Ясно, что в обоих случаях значение $x_1 = 0$ достигается за конечное время. \square

Следствие 3.3. Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, входящих в точки кривой γ_n , и поток траекторий системы $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0$, входящих в точки кривой γ_n , не пересекаются друг с другом. \square

Построим лагранжево интегральное многообразие в расширенном фазовом пространстве T^*X , исходя из особого режима $\hat{\gamma}_n$. В силу (3.10) кривую γ_n можно поместить в множество \mathcal{K}_2 , удовлетворяющее условиям следствия 3.1.

Пусть p — точка на γ_n , \hat{p} — её поднятие на $\hat{\gamma}_n$, а $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (3.8), проходящая через \hat{p} в момент времени $t = 0$. Обозначим через \bar{t} момент времени, в который проекция $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ проходит через точку $q = \mathbf{P}_0(p)$. В силу утверждения 2.15 справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.4. На интервале $[\bar{t}, 0]$ траектория $\hat{\sigma}$ удовлетворяет принципу максимума. \square

Утверждение 2.30а: Если точка p пробегает особый режим γ_n , то точка $q = \mathbf{P}_0(p)$ пробегает некоторую аналитическую кривую ρ_{10} , расположенную в первом ортанте трансверсально к осям и стыкующуюся в точке \tilde{x} с кривой γ_n .

Доказательство: Условия утверждения 2.16 в силу следствия 3.1 выполнены, полярные координаты точки q аналитически зависят от полярных координат точки p . При $r > 0$ замена координат $(x_1, x_2) \leftrightarrow (r, \varphi)$ невырождена, и координаты $x_1(q), x_2(q)$ аналитически зависят от $x_1(p), x_2(p)$. По утверждению 3.6 кривая γ_n аналитическая. Параметризуем её координатой $x_1 = x_1(p)$. Тогда координаты точки q аналитически зависят от $x_1(p)$, и эти точки образуют аналитическую кривую ρ_{10} .

В силу утверждения 2.13 имеем оценку $r(q) = \Theta(r(p))$. Следовательно, если p стремится к \tilde{x} , то q также стремится к этой точке. Трансверсальность координатным осям вытекает из следствия 3.1. \square

Утверждение 2.31а: Производная $\frac{dx_2}{dx_1}$ на кривых γ_n, ρ_{10} имеет предел при $x \rightarrow \tilde{x}$. Для обеих кривых имеет место оценка $\frac{d\zeta}{dx_1} = \theta(\sqrt{r})$.

Доказательство: В силу утверждения 3.6 и оценки (3.10) имеем $\frac{d\chi_H(x_1)}{dx_1} = \theta(\sqrt{r})$, и $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{d\chi_H(x_1)}{dx_1} = 0$. Имеем $\frac{d\chi_H(x_1)}{dx_1} - \frac{\chi_H(x_1)}{x_1} = \theta(\sqrt{-x_1}) - \theta(\sqrt{-x_1}) = \theta(\sqrt{-x_1})$, и кривая γ_n удовлетворяет условиям утверждения 2.6. Поэтому для производной на кривой ρ_{10} получаем

$$\frac{dx_2(q)}{dx_1(q)} = \frac{\frac{\partial x_2(q)}{\partial x_1(p)} + \frac{\partial x_2(q)}{\partial x_2(p)} \frac{d\chi_H}{dx_1}(p)}{\frac{\partial x_1(q)}{\partial x_1(p)} + \frac{\partial x_1(q)}{\partial x_2(p)} \frac{d\chi_H}{dx_1}(p)} = \frac{\frac{\partial x_2(q)}{\partial x_1(p)} x_1(p) + \frac{\partial x_2(q)}{\partial x_2(p)} (x_2(p) + \theta((-x_1(p))^{\frac{3}{2}}))}{\frac{\partial x_1(q)}{\partial x_1(p)} x_1(p) + \frac{\partial x_1(q)}{\partial x_2(p)} (x_2(p) + \theta((-x_1(p))^{\frac{3}{2}}))}.$$

В силу следствия 3.1 выполнены условия утверждения 2.21, и производные $\frac{\partial x(q)}{\partial x(p)}$ задаются уравнениями (2.53). Подставляя эти значения, получим

$$\frac{dx_2(q)}{dx_1(q)} = \frac{x_2(q) + \theta(r^{\frac{3}{2}})}{x_1(q) + \theta(r^{\frac{3}{2}})} = \frac{x_2(q)}{x_1(q)} + \theta(\sqrt{r}) = \Theta(1). \quad (3.11)$$

Следовательно, кривая ρ_{10} удовлетворяет условиям утверждения 2.6, применение которого завершает доказательство. \square

Следующее утверждение следует из утверждения 2.7.

Следствие 3.5. *Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, выходящих из точек кривой ρ_{10} , и поток траекторий системы $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = 0$, входящих в точки кривой ρ_{10} , не пересекаются друг с другом.* \square

Таким образом, кривые γ_n , ρ_{10} и точка \tilde{x} делят окрестность U на две области (см. рис. 3.2 слева). Покажем, что в левой области принцип максимума приводит к управлению $u = 1$. Рассмотрим верхнюю и нижнюю полуплоскость по отдельности.

Пусть \hat{p} — точка на особом режиме $\hat{\gamma}_n$, пусть $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (3.6), проходящая через \hat{p} в момент времени $t = 0$. Обозначим проекцию $\pi_X \circ \hat{\sigma}$ траектории $\hat{\sigma}$ на фазовую плоскость через σ . Следующее утверждение является следствием утверждения 2.23.

Утверждение 3.10. *Если $\chi_n < 0$, то принцип максимума Понтрягина на $\hat{\sigma}$ выполняется для всех таких $t \leq 0$, что точка $\sigma(\tau)$ лежит в окрестности U .* \square

На траектории $\hat{\gamma}_-$ системы (3.6), проходящей в момент $t = 0$ через точку $(x, \psi) = (0, 0)$, принцип максимума выполнен в силу утверждения 3.1 и условий теоремы.

Исследуем область в верхней полуплоскости слева от кривой переключения ρ_{10} . В силу утверждения 2.8 кривая ρ_{10} имеет поднятие $\hat{\rho}_{10}$ на \mathcal{M}_+ . Допустим, что $\hat{p} \in \hat{\rho}_{10} \cup \{(x, \psi) = (0, 0)\}$ и пусть $\hat{\sigma}(t)$ — траектория системы (3.6), такая, что $\hat{\sigma}(0) = \hat{p}$. Обозначим проекцию $\pi_X \circ \hat{\sigma}$ через σ , а проекцию точки \hat{p} через p . Исследуем H_1 как функцию от времени t на траектории $\hat{\sigma}$.

Утверждение 3.11. *Принцип максимума выполняется на $\hat{\sigma}$ при всех таких $t \leq 0$, что точка $\sigma(\tau)$ лежит в окрестности U .*

Доказательство: Рассмотрим два случая.

Если $C \equiv 0$ на оси Ox_1 , то в силу утверждения 3.3 на траектории $\hat{\sigma}$ не существует решений уравнения $\tilde{H}_1 = 0$.

Если $C \neq 0$ на Ox_1 , то в силу условий теоремы существуют вещественное число $c > 0$ и натуральное число $n \geq 3$, такие, что на траектории γ справедливо $\frac{d^k C}{dt^k}(0) = 0$ для всех $k < n$, и $\frac{d^n C}{dt^n}(0) = (-1)^n c$. Но тогда в силу утверждения 3.5 на траектории $\hat{\sigma}$ не существует решений уравнения $\tilde{H}_1 = 0$, если окрестность U достаточно маленькая.

Следовательно, функция H_1 обращается в нуль только при $t = 0$. В силу $\dot{H}_1(0) = -\frac{C(p)}{A_2(p)} = -\frac{-\Theta(r^2)}{-\Theta(r)} < 0$ имеем $H_1(t) > 0$ при $t < 0$. \square

Рассмотрим в пространстве T^*X множество точек \mathcal{N} , состоящее из точек траекторий системы (3.8), соединяющих кривые $\hat{\rho}_{10}, \hat{\gamma}_H$, траекторий системы (3.6), выходящих на кривые $\hat{\rho}_{10}, \hat{\gamma}_H$, траектории $\hat{\gamma}_-$ и точки $(x, \psi) = (0, 0)$.

Следствия 3.3, 3.5 гарантируют, что проекция π_X взаимно-однозначно отображает множество \mathcal{N} на окрестность U , т.е. задаёт некоторую функцию $\psi(x)$.

Утверждение 2.33а: *Функция $\psi(x)$ непрерывна в окрестности U и непрерывно дифференцируема всюду, кроме на кривых $\gamma_H, \gamma_-, \rho_{10}$ и в точке \tilde{x} . На кривых γ_H, γ_- и ρ_{10} имеют место разрывы производных первого рода.*

Доказательство: В силу утверждения 2.31а кривая γ_* , образованная из γ_H, ρ_{10} и точки \tilde{x} , кусочно-непрерывно дифференцируема с разрывом производных в \tilde{x} ; она задаётся некоторой кусочно-непрерывной функцией $\zeta(x_1)$, непрерывно дифференцируемой вне точки \tilde{x} , и удовлетворяющей оценке $\frac{d\zeta}{dx_1} = \theta(\sqrt{r})$. Функция ψ на поднятии $\hat{\gamma}_*$ кривой γ_* , состоящем из кривых $\hat{\gamma}_H, \hat{\rho}_{10}$ и точки $(x, \psi) = (0, 0)$, в силу утверждения 2.9 удовлетворяет оценкам $\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \theta(r)\theta(\sqrt{r}^{-1}) = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \theta(\sqrt{r})$. Следовательно, она принадлежит классу PC^1 . Доказательство завершает теорема о дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных. \square

Функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию Кэлли [46] на особом режиме и в силу утверждений 3.10 и 3.11 и следствия 3.4 — принципу максимума. В силу утверждения 2.33а она определяет сечение \mathcal{N} расслоения T^*X . Доказательство завершается применением утверждения 2.35. Теорема 3.1 доказана.

3.3 Синтез со спиралевидной структурой

С этого момента до конца главы мы будем предполагать, что существуют натуральное число $n \geq 3$ и вещественное число $b > 0$, такие, что в точке \tilde{x} справедливо $\frac{\partial^k C}{\partial x_1^k} = 0$ для всех $k < n$, и $\frac{\partial^n C}{\partial x_1^n} = -(-1)^n b$.

Целью следующих двух параграфов является расклассифицировать системы, удовлетворяющие этому условию.

Идея построения оптимального синтеза состоит в отыскании гиперболической неподвижной точки у отображения Пуанкаре. Однако, отображение \mathbf{P} в

случае $\phi = \pi$ более сильно вырождено. Эта особенность не разрешается использованием координат x_1, ζ , и необходимо найти более подходящую систему координат. Следующее утверждение позволит найти область, в которой можно определить нужную систему координат.

Утверждение 3.12. Пусть существуют натуральное число $n \geq 3$ и вещественное число $b > 0$, такие, что в точке \tilde{x} справедливо $\frac{\partial^k C}{\partial x_1^k} = 0$ для всех $k < n$, и $\frac{\partial^n C}{\partial x_1^n} = -(-1)^n b$. Пусть $K > 0$ — наперёд заданная положительная константа. Тогда в области $M_K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0, x_2 \in [0, K|x_1|^{n-1}]\}$ справедлива оценка $C = -\frac{b}{n!}|x_1|^n + \theta(x_1^{n+1})$.

Доказательство: Пусть $x = (x_1, x_2) \in M_K$, $x_1 < 0$, $x_2 = \kappa|x_1|^{n-1}$, $\kappa \in [0, K]$. Разложим функцию C в ряд Тейлора в начале координат:

$$C(x_1, x_2) = \frac{\partial^n C}{\partial x_1^n} \frac{x_1^n}{n!} + \theta(x_1^{n+1}) + \theta(x_1^2 x_2) + \theta(x_2^2).$$

Используя неравенство $n \geq 3$ и подставляя $x_2 = \kappa|x_1|^{n-1}$, получим

$$C = -\frac{b}{n!}|x_1|^n + \theta(x_1^{n+1}) + \theta(x_1^{n+1}) + \theta(x_1^{2n-2}) = -\frac{b}{n!}|x_1|^n + \theta(x_1^{n+1}). \quad \square$$

В качестве новых координат выберем переменную x_1 и величину $\kappa = \frac{x_2}{|x_1|^{n-1}}$. Предположим, что последняя меняется в интервале $[0, K]$, $K > 0$.

Рассмотрим точку p_2 с координатами x_{12}, κ_2 , где $x_{12} < 0$, $\kappa_2 \in [0, K]$. Обозначим множество точек в окрестности U , координаты которых лежат в этих интервалах, через \mathcal{K}_2 . В силу утверждения 2.8 существует поднятие $\hat{\mathcal{K}}_2$ множества \mathcal{K}_2 на \mathcal{M}_- . Обозначим поднятие точки p_2 через \hat{p}_2 .

Обозначим точку $\mathbf{P}_0(p_2)$ через p_1 . В силу неравенства $n \geq 3$ следствие 3.1 применимо на множество \mathcal{K}_2 , и точка p_1 меняется в некотором сегменте \mathcal{K}_1 , расположенном в первом ортанте. Согласно утверждению 2.8 множество \mathcal{K}_1 имеет поднятие $\hat{\mathcal{K}}_1$ на многообразии \mathcal{M}_+ .

Из утверждения 3.5 следует, что на множестве \mathcal{K}_1 определена отрицательная функция $t_*(x_1, \zeta) = -\sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2}{2b}} x_1^{\frac{1}{n-1}} + \theta(x_1^{\frac{2}{n-1}})$. Пусть $p_1 \in \mathcal{K}_1$ — произвольная точка. Рассмотрим траекторию $\hat{\sigma}$ системы (3.6), проходящую через поднятие \hat{p}_1 точки p_1 в момент времени $t = 0$. Обозначим точку $\hat{\sigma}(t_*(p_1))$ через \hat{p}_0 , а её проекцию на фазовую плоскость — через p_0 . отображение, переводящее p_1 в p_0 , обозначим через \mathbf{P}_1 , а композицию $\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_0$ — через \mathbf{P} .

На множестве \mathcal{K}_1 имеем $\frac{C}{d_{AB}} < 0$, и условия утверждения 2.25 выполнены. Из пункта 2 этого утверждения вытекает:

Следствие 3.6. На интервале $[t_*, 0]$ траектория $\hat{\sigma}$ удовлетворяет принципу максимума. \square

Имеем

$$\begin{aligned} x_1(p_0) &= x_1(p_1) + t_* = -\sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}}(x_1(p_1))^{\frac{1}{n-1}} + \theta((x_1(p_1))^{\frac{2}{n-1}}), \\ x_2(p_0) &= x_2(p_1) = -\zeta(p_1)x_1(p_1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \kappa(p_0) &= \frac{x_2(p_0)}{|x_1(p_0)|^{n-1}} = \frac{-\zeta(p_1)x_1(p_1)}{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}x_1(p_1) + \theta((x_1(p_1))^{\frac{2}{n-1}})} = \\ &= \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta(p_1)} + \theta((x_1(p_1))^{\frac{1}{n-1}}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Покажем, что координата κ точки p_0 при подходящем выборе константы K лежит в интервале $[0, K]$. В силу утверждений 2.4 и 2.16 величину $\zeta(p_1)$ можно определить в окрестности точки $(x_1(p_2) = 0, \zeta(p_2) = 0)$ как аналитическую функцию от $x_1(p_2), \zeta(p_2)$. Обозначим её значение в этой точке через $\bar{\zeta}$. Тогда вследствие оценок $\zeta(p_2) = -\frac{x_2(p_2)}{x_1(p_2)} = -\frac{\theta(x_1^{n-1})}{x_1} = \theta(r)$, $x_1(p_2) = \theta(r)$ имеем

$$\zeta(p_1) = \bar{\zeta} + \theta(r). \quad (3.13)$$

Следовательно, при уменьшении окрестности U границы интервала $[\zeta_\alpha, \zeta_\beta]$ стремятся к значению $\bar{\zeta}$.

Выберем константу K так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{-2b}{(n-1)n!\bar{\zeta}} < K$. Имеем $\kappa(p_0) = \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta(p_1)} + \theta((x_1(p_1))^{\frac{1}{n-1}}) = \frac{-2b}{(n-1)n!\bar{\zeta}} + \theta((x_1(p_1))^{\frac{1}{n-1}})$. Следовательно, если окрестность U достаточно маленькая, то выполнено неравенство $\kappa(p_0) < K$. Неравенство $\kappa(p_0) > 0$ выполнено, потому что $x_2(p_0) = x_2(p_1) > 0$.

Обозначим $x_1(p_0)$ через x_{10} , а $\kappa(p_0)$ через κ_0 . Мы построили отображение \mathbf{P} , переводящее (x_{12}, κ_2) в (x_{10}, κ_0) . Покажем, что оно удовлетворяет условиям леммы о гиперболической точке. Вычислим производные отображения \mathbf{P} .

Вычислим зависимость точки p_1 от точки p_2 . Имеем $\zeta(p_2) = \theta(x_1)$. Согласно утверждению 2.21 производные $\frac{\partial x(p_1)}{\partial x(p_2)}$ задаются уравнением (2.53). В силу утверждения 3.12 имеем $C(p_2) = \theta(r^3)$. Отсюда вытекает, что величина k в уравнении

(2.53) имеет порядок $k = \theta(r)$. Далее, $x_2(p_2) = \theta(r^2)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}{\partial(x_1(p_2), x_2(p_2))} = \tag{3.14} \\
& = \frac{1}{(x_1 A_2 - A_1 x_2)(p_2)} \begin{pmatrix} x_1(p_1) + \theta(r^2) & k A_1(p_1) \\ x_2(p_1) + \theta(r^2) & k A_2(p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(p_2) & -A_1(p_2) \\ -x_2(p_2) & x_1(p_2) \end{pmatrix} = \\
& = \frac{1}{-x_1^2(p_2) + \theta(r^3)} \begin{pmatrix} x_1(p_1) + \theta(r^2) & \theta(r^2) \\ x_2(p_1) + \theta(r^2) & \theta(r^2) \end{pmatrix} * \\
& * \begin{pmatrix} -x_1(p_2) + \theta(r^2) & -\alpha x_1(p_2) + \theta(r^2) \\ \theta(r^2) & x_1(p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r) & \alpha \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r) \\ \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r) & \alpha \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Инвертируя матрицу $\frac{\partial(x_{12}, \kappa_2)}{\partial(x_1(p_2), x_2(p_2))}$, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x(p_2)}{\partial(x_{12}, \kappa_2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \frac{x_2(p_2)}{x_1(p_2)} & (-x_1(p_2))^{n-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) \kappa_2 (-x_1(p_2))^{n-2} & (-x_1(p_2))^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Перемножая эти производные и (3.14), находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}{\partial(x_{12}, \kappa_2)} &= \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(x_1(p_1)) & -\alpha x_1(p_1) (-x_1(p_2))^{n-2} + \theta(x_1^n(p_1)) \\ \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(x_1(p_1)) & -\alpha x_2(p_1) (-x_1(p_2))^{n-2} + \theta(x_1^n(p_1)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(x_1(p_1)) & -\alpha x_1(p_1) (-x_1(p_2))^{n-2} + \theta(x_1^n(p_1)) \\ -\zeta(p_1) \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(x_1(p_1)) & \zeta(p_1) \alpha x_1(p_1) (-x_1(p_2))^{n-2} + \theta(x_1^n(p_1)) \end{pmatrix}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Вычислим зависимость точки p_0 от точки p_1 .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1(p_0)}{\partial x_1(p_1)} &= 1 + \frac{\partial t_*}{\partial x_1(p_1)} = 1 + \frac{\partial t_*}{\partial x_1} - \frac{\partial t_*}{\partial \zeta} \zeta(p_1) \frac{1}{x_1(p_1)}, \\
\frac{\partial x_1(p_0)}{\partial x_2(p_1)} &= \frac{\partial t_*}{\partial x_2(p_1)} = \frac{\partial t_*}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2(p_2)} = -\frac{\partial t_*}{\partial \zeta} \frac{\zeta(p_1)}{x_1(p_1)}.
\end{aligned}$$

Для производных функции $t_*(x_1, \zeta)$ в силу аналитичности по $(\sqrt[n-1]{x_1}, \zeta)$ находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_*}{\partial x_1} &= \frac{\partial t_*}{\partial \sqrt[n-1]{x_1}} \frac{d \sqrt[n-1]{x_1}}{dx_1} = \left(-\sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} + \theta(\sqrt[n-1]{x_1}) \right) \frac{1}{n-1} x_1^{\frac{2-n}{n-1}} = \\ &= -\frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}), \\ \frac{\partial t_*}{\partial \zeta} &= \frac{2}{n-1} (-\zeta(p_1))^{\frac{3-n}{n-1}} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} \sqrt[n-1]{x_1(p_1)} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{2}{n-1}}).\end{aligned}$$

Подставляя, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(p_0)}{\partial x_1(p_1)} &= 1 - \frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \\ &\quad + \frac{2}{n-1} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}), \\ \frac{\partial x_1(p_0)}{\partial x_2(p_1)} &= \theta(x_1(p_1)^{\frac{1}{n-1}}) - \frac{2}{n-1} (-\zeta(p_1))^{\frac{3-n}{n-1}} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}).\end{aligned}$$

Имеем $x_1(p_0) = x_1(p_1) + t_* = -\sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{1}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{2}{n-1}})$, отсюда находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x_{10}, \kappa_0)}{\partial(x_1(p_0), x_2(p_0))} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\frac{x_2(p_0)}{(-x_1(p_0))^n} & \frac{1}{(-x_1(p_0))^{n-1}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\frac{-\zeta(p_1)x_1(p_1)}{\left(\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}\right)^{\frac{n}{n-1}} x_1(p_1)^{\frac{n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{n+1}{n-1}})} & \frac{1}{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b} x_1(p_1) + \theta(x_1(p_1)^{\frac{n}{n-1}})} \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\left(\frac{2b}{(n-1)n!}\right)^{\frac{n}{n-1}} (-\zeta(p_1))^{-\frac{n+1}{n-1}} x_1(p_1)^{-\frac{1}{n-1}} + \theta(1) & \frac{2b}{(n-1)n!\zeta^2(p_1)} \frac{1}{x_1(p_1)} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Перемножая, получаем следующие выражения для производной $\frac{\partial(x_{10}, \kappa_0)}{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{10}}{\partial x_1(p_1)} &= \frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}), \\
\frac{\partial x_{10}}{\partial x_2(p_1)} &= -\frac{2}{n-1} (-\zeta(p_1))^{\frac{3-n}{n-1}} \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!}{2b}} x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}), \\
\frac{\partial \kappa_0}{\partial x_1(p_1)} &= \frac{2b}{(n-1)n!} \frac{1}{-\zeta(p_1)} \frac{1}{x_1(p_1)} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}}), \\
\frac{\partial \kappa_0}{\partial x_2(p_1)} &= -\frac{2b}{(n-1)n!\zeta^2(p_1)} \frac{1}{x_1(p_1)} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Перемножая с производной $\frac{\partial(x_1(p_1), x_2(p_1))}{\partial(x_{12}, \kappa_2)}$, окончательно получаем для $\frac{\partial(x_{10}, \kappa_0)}{\partial(x_{12}, \kappa_2)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{10}}{\partial x_{12}} &= \frac{1}{n-1} \frac{x_1(p_1)^{\frac{1}{n-1}}}{-x_1(p_2)} \left(\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{\frac{3-n}{n-1}}) = \Theta(|x_{12}|^{\frac{2-n}{n-1}}), \\
\frac{\partial x_{10}}{\partial \kappa_2} &= \frac{\alpha}{n-1} x_1(p_1)^{\frac{1}{n-1}} (-x_1(p_2))^{n-2} \left(\frac{(n-1)n!\zeta^2(p_1)}{2b} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \theta(x_1(p_1)^{n-1+\frac{3-n}{n-1}}) = \theta(x_{12}), \\
\frac{\partial \kappa_0}{\partial x_{12}} &= \theta(x_1(p_1)^{\frac{2-n}{n-1}}) = \theta(|x_{12}|^{\frac{2-n}{n-1}}), \\
\frac{\partial \kappa_0}{\partial \kappa_2} &= \theta(x_1(p_1)^{\frac{n^2-3n+3}{n-1}}) = \theta(x_{12}).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{\partial \kappa_0}{\frac{\partial x_{12}}{\frac{\partial x_{10}}{\partial x_{12}}}} = \theta(1)$. Выберем константу L так, чтобы выполнялось неравенство $L > \sup_{p_2 \in \mathcal{K}_2} \frac{|\frac{\partial \kappa_0}{\partial x_{12}}|}{\frac{\partial x_{10}}{\partial x_{12}}}$. Ясно, что тогда условия (2.9) и (2.10) выполнены, если только окрестность U достаточно маленькая.

В силу леммы о гиперболической точке существует кривая ρ_{01} , задающаяся непрерывно дифференцируемой функцией $\kappa = \kappa_*(x_1)$ с ограниченной производной, инвариантная относительно отображения \mathbf{P} . Из уравнений (3.12) и (3.13) следует, что $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \kappa_* = \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta}$. В силу липшицевости функции κ_* справедливо $\kappa_* = \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta} + \theta(x_1)$. Для производной кривой ρ_{01} находим

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{d}{dx_1}(\kappa_*(x_1)(-x_1)^{n-1}) = \\
&= \frac{d\kappa_*}{dx_1}(-x_1)^{n-1} + \frac{2b}{(n-1)n!\zeta} (n-1)(-x_1)^{n-2} + \theta((-x_1)^{n-1}) = -\Theta(r^{n-2}).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Утверждение 3.13. Величины $\bar{r}_2 = r(p_2)^{\frac{1}{k}}$, $\varphi(p_2)$ являются аналитическими функциями от величин $\bar{x}_{12} = (-x_1(p_2))^{\frac{1}{k}}$, $\kappa_2 = \kappa(p_2)$ для любого целого $k \geq 1$. Они аналитически продолжаются на отрезок $(\bar{x}_{12}, \kappa_2) \in \{0\} \times [0, K]$.

Доказательство: Величины $\bar{r}_2 = r(p_2)^{\frac{1}{k}}$, $\varphi(p_2)$ являются аналитическими функциями от \bar{x}_{12}, κ_2 для любого целого $k \geq 1$. Действительно,

$$\begin{aligned}\bar{r}_2 &= (x_{12}^2 + (\kappa_2|x_{12}|^{n-1})^2)^{\frac{1}{2k}} = \bar{x}_{12} \sqrt[2k]{1 + \kappa_2^2 \bar{x}_{12}^{2k(n-2)}}, \\ \varphi_2 &= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{\kappa_2|x_{12}|^{n-1}}{x_{12}} = -\pi - \operatorname{arctg}(\kappa_2 \bar{x}_{12}^{k(n-2)}). \quad \square\end{aligned}$$

Следующее утверждение следует из утверждений 3.13, 2.16 и 2.4.

Следствие 3.7. Величины $\bar{x}_{11} = x_1(p_1)^{\frac{1}{k}}$ и $\zeta_1 = \zeta(p_1)$ являются аналитическими функциями от величин $\bar{x}_{12} = (-x_1(p_2))^{\frac{1}{k}}$, $\kappa_2 = \kappa(p_2)$ для любого целого $k \geq 1$. Они аналитически продолжаются на отрезок $(\bar{x}_{12}, \kappa_2) \in \{0\} \times [0, K]$. \square

Следовательно, если точка p_2 пробегает кривую ρ_{01} , то точка p_1 пробегает некоторую непрерывно дифференцируемую кривую ρ_{10} . В силу (3.15) и (3.17) находим для наклона кривой ρ_{10}

$$\frac{dx_2(p_1)}{dx_1(p_1)} = \frac{\frac{\partial x_2(p_1)}{\partial x_{12}} + \frac{\partial x_2(p_1)}{\partial \kappa_2} \frac{d\kappa_2}{dx_{12}}}{\frac{\partial x_1(p_1)}{\partial x_{12}} + \frac{\partial x_1(p_1)}{\partial \kappa_2} \frac{d\kappa_2}{dx_{12}}} = \frac{-\zeta_1 \frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r)}{\frac{x_1(p_1)}{x_1(p_2)} + \theta(r)} = \frac{x_2(p_1)}{x_1(p_1)} + \theta(r).$$

Применяя утверждение 2.6, получаем следующее утверждение.

Утверждение 3.14. Наклон $\frac{dx_2}{dx_1}$ кривых ρ_{01}, ρ_{10} имеет предел при $x \rightarrow \tilde{x}$. \square

Утверждение 3.15. Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, входящих в точки кривой ρ_{10} , и поток траекторий системы $\dot{x} = A + B$, выходящих из точек кривой ρ_{10} , не пересекаются друг с другом. То же самое верно для кривой ρ_{01} .

Доказательство: Утверждение для кривой ρ_{10} следует из утверждения 2.7. Нормаль к кривой ρ_{01} пропорциональна вектору $n = (-\frac{dx_2(p_2)}{dx_1(p_2)}, 1)^T$. В силу (3.17) имеем $\operatorname{sgn}\langle n, A \rangle = \operatorname{sgn}(-x_1 + \theta(r^2)) = 1$, $\operatorname{sgn}\langle n, A + B \rangle = \operatorname{sgn}\Theta(r^{n-2}) = 1$. Отсюда следует утверждение для кривой ρ_{01} . \square

Обозначим поднятия кривых ρ_{01}, ρ_{10} на \mathcal{M} через $\hat{\rho}_{01}, \hat{\rho}_{10}$. Траектории систем (3.6) и (3.8), соединяющие кривые $\hat{\rho}_{01}$ и $\hat{\rho}_{10}$, образуют в T^*X некоторое многообразие \mathcal{N}^* . В силу теоремы о непрерывной дифференцируемости решений дифференциального уравнения от начальных данных многообразие \mathcal{N}^* принадлежит классу PC^1 с разрывом производных на кривых $\hat{\rho}_{01}$ и $\hat{\rho}_{10}$.

Из утверждения 3.15 следует, что многообразие \mathcal{N}^* является поднятием проколотовой окрестности точки \tilde{x} в кокасательное расслоение T^*X . Присоединив к этому многообразию точку $(x = 0, \psi = 0)$, получим сечение \mathcal{N} расслоения T^*X . Однако, сечение \mathcal{N} не обязательно является интегральным многообразием системы (3.2), (3.5). Это имеет место тогда и только тогда, когда на траекториях системы (3.8), идущих от кривой $\hat{\rho}_{10}$ к кривой $\hat{\rho}_{01}$, выполнен принцип максимума.

В силу утверждений 2.15 и 3.12 последнее условие выполнено, если во внутренности третьего ортанта нет точек, в которых $C > 0$, т.е. либо $C_{max} < 0$ при $x_1 < 0$, либо γ_{max} лежит во втором ортанте и таким образом $\chi_H > 0$ при $x_1 < 0$.

Рассмотрим случай $C_{max}(x_1) > 0$, $\chi_{max}(x_1) < 0$ при $x_1 < 0$. Тогда определены функции $\chi_H(x_1)$ и $\chi_B(x_1)$. Обе функции отрицательны при $x_1 < 0$ и определяют кривые γ_H, γ_B , расположенные в третьем ортанте.

Утверждение 3.16. *Если $C_{max}(x_1) > 0$, $\chi_{max}(x_1) < 0$ при $x_1 < 0$, то $n \geq 4$.*

Доказательство: Допустим, что $n = 3$. Разложим функцию C в ряд Тейлора в начале координат. $C = -\frac{x_2^2}{2} + \frac{b}{6}x_1^3 + \theta(x_1^4) + \theta(x_2^3) + \theta(x_1x_2^2) + \theta(x_1^2x_2)$. В силу утверждения 3.2 на кривой γ_{max} имеем $x_2 = \theta(x_1^2)$. Отсюда следует, что $C_{max} = \frac{b}{6}x_1^3 + \theta(x_1^4)$. Следовательно, в окрестности нуля имеем $C_{max} < 0$, если $x_1 < 0$, что противоречит сделанному выше предположению. \square

Утверждение 3.17. *Если $C_{max}(x_1) > 0$, $\chi_{max}(x_1) < 0$ при $x_1 < 0$, то функция $\kappa_*(x_1)$, задающая кривую переключения ρ_{01} , является аналитической.*

Доказательство: Функция $\kappa = \kappa_*(x_1)$ принадлежит классу C^1 , поэтому $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \kappa_* = \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta}$. Сначала мы покажем, что в окрестности неподвижной относительно \mathbf{P} точки $(x_1, \kappa) = (0, \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta})$ координаты $(x_1, \kappa) = (x_{10}, \kappa_0)$ точки p_0 являются аналитическими функциями от величин $\tilde{x}_{12} = |x_{12}|^{\frac{1}{n-1}}, \kappa_2$, где x_{12}, κ_2 — координаты точки p_2 .

В силу следствия 3.7 достаточно показать, что величины x_{10}, κ_0 являются аналитическими функциями от $\tilde{x}_{11} = x_1(p_1)^{\frac{1}{n-1}}, \zeta_1$.

Обозначим время перехода из точки \hat{p}_1 в точку \hat{p}_0 по траекториям системы (3.6) через t , а $x_1(p_1)$ — через x_{11} . В силу утверждения 3.4 величина x_{11} является аналитической функцией от ζ_1, t , при этом $x_{11}(\zeta_1, t) = \frac{2b}{(n-1)n!\zeta_1^2}(-t)^{n-1} + \theta(t^n)$. Таким образом,

$$\tilde{x}_{11} = -t^{n-1} \sqrt{\frac{2b}{(n-1)n!\zeta_1^2} + \theta(t)},$$

где под корнем стоит аналитическая по ζ_1, t функция, не равная нулю. Следовательно, \tilde{x}_{11} является аналитической функцией от ζ_1, t . Так как

$$\frac{\partial \tilde{x}_{11}}{\partial t} = - \sqrt[n-1]{\frac{2b}{(n-1)n!\zeta_1^2}} + \theta(t) \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции уравнение $\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{11}(\zeta_1, t)$ разрешается по t , и t является аналитической функцией от \tilde{x}_{11}, ζ_1 . При этом $\frac{\partial t}{\partial \tilde{x}_{11}} = \left(\frac{\partial \tilde{x}_{11}}{\partial t}\right)^{-1} \neq 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{11} + t = \tilde{x}_{11}^{n-1} + t, \\ \kappa_0 &= \frac{x_2(p_0)}{|x_{10}|^{n-1}} = \frac{x_2(p_1)}{(-x_{10})^{n-1}} = -\zeta_1 \left(\frac{\tilde{x}_{11}}{-\tilde{x}_{11}^{n-1} - t} \right)^{n-1} = -\zeta_1 \left(\frac{1}{-\tilde{x}_{11}^{n-2} - \frac{t}{\tilde{x}_{11}}} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

По лемме Адамара отношение $\frac{t}{\tilde{x}_{11}}$ является аналитической функцией от \tilde{x}_{11}, ζ_1 . Эта функция в силу $\frac{\partial t}{\partial \tilde{x}_{11}} \neq 0$ ненулевая, и $\frac{1}{-\tilde{x}_{11}^{n-2} - \frac{t}{\tilde{x}_{11}}}$ также является аналитической функцией от \tilde{x}_{11}, ζ_1 .

Таким образом, x_{10}, κ_0 аналитичны по \tilde{x}_{12}, κ_2 . При этом $x_{10} = \Theta(-\tilde{x}_{12})$ и производная $\frac{\partial(-x_{10})}{\partial \tilde{x}_{12}}$ положительна в окрестности точки $(-x, \kappa) = (0, \frac{-2b}{(n-1)n!\zeta_1})$. Таким образом, отображение $\mathbf{P} : (x_{12}, \kappa_2) \mapsto (x_{10}, \kappa_0)$ в координатах x_1, κ удовлетворяет условиям леммы об аналитичности инвариантной кривой. Здесь величины $-x_1, \kappa$ играют роль x, y , а условие $n \geq 3$ леммы гарантируется утверждением 3.16. Применение леммы завершает доказательство. \square

Пусть $\bar{\kappa} : \mathbf{R}_- \rightarrow [0, K]$, $\bar{\kappa} : x_1 \mapsto \bar{\kappa}(x_1)$ — непрерывная функция. Функция $\bar{\kappa}$ по формуле $x_2(x_1) = (-x_1)^{n-1} \bar{\kappa}(x_1)$ определяет кривую ρ во втором ортанте фазовой плоскости. В силу утверждения 2.8 существует поднятие $\hat{\rho}$ кривой ρ на многообразии \mathcal{M}_- . Рассмотрим однопараметрическое семейство траекторий системы (3.8), проходящих через точки кривой $\hat{\rho}$ в момент времени $t = 0$. Они образуют двумерную поверхность в T^*X , которая при $t \in [-\frac{3\pi}{2\sqrt{4-\alpha^2}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{4-\alpha^2}}]$ взаимно-однозначно проектируется на фазовую плоскость (так как $\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}$ — частота системы $\dot{x} = \frac{\partial A}{\partial x} x$), т.е. является локальным сечением кокасательного расслоения T^*X . Это сечение накрывает нижнюю полуплоскость и, таким образом, кривую γ_{H} .

Оно определяет сопряжённые переменные ψ , и, следовательно, функцию H_1 на фазовой плоскости как функции от x . В частности, функция H_1 определена на кривой γ_{H} как функция от переменной x_1 , которая является параметром на этой кривой. Обозначим эту функцию через $\bar{H}_1(x_1)$. Функция \bar{H}_1 , разумеется,

зависит от исходной функции $\bar{\kappa}(x_1)$. Обозначим оператор, переводящий функцию $\bar{\kappa}$ в функцию \bar{H}_1 , через \mathcal{F} . Обозначим функцию $\mathcal{F}(\kappa_*)$ через $H_{1\text{равн}}$.

Пусть p — точка на кривой ρ . Обозначим поднятие точки p на \mathcal{M}_- через \hat{p} , а траекторию системы (3.8), проходящую через точку \hat{p} в момент времени $t = 0$, обозначим через $\hat{\sigma}$. Пусть $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ — проекция траектории $\hat{\sigma}$ на фазовую плоскость. Рассмотрим функцию H_1 на траектории $\hat{\sigma}$ как функцию от времени. Обозначим момент времени, в котором траектория σ пересекает кривую γ_{AB}^- , через t_- , а моменты времени, в которые она пересекает кривые γ_H и γ_B , через t_H и t_B . Таким образом, $H_1(t_H) = [\mathcal{F}(\kappa_*)](x_1(t_H))$.

Утверждение 3.18. *На интервале $t \in (t_-, 0]$ траектории $\hat{\sigma}$ принцип максимума удовлетворён тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $H_1(t_H) \leq 0$. Если $H_1(t_H) = 0$, то $H_1(t) < 0$ при всех $t \in (t_-, t_H) \cup (t_H, 0)$.*

Доказательство: Прямая импликация ясна. Докажем обратную. На интервале $t \in (t_-, 0]$ уравнение (2.28) не имеет особенностей, и его решение представляется в виде (2.29). Подставляя $t_0 = 0$, $H_1(0) = 0$, находим

$$e^{-\int_0^t \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\tau} H_1(t) = \int_0^t e^{-\int_0^\tau \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\sigma} \frac{C}{d_{AB}} d\tau.$$

Имеем $d_{AB} < 0$ на всём интервале $(t_-, 0]$, $C < 0$ на интервалах $(t_-, t_H) \cup (t_B, 0]$, и $C > 0$ на интервале (t_H, t_B) . Поэтому выражение $e^{-\int_0^t \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\tau} H_1(t)$ на интервалах $(t_-, t_H) \cup (t_B, 0]$ увеличивается, а на интервале (t_H, t_B) уменьшается. В точке $t = 0$ оно равно нулю. Отсюда непосредственно следует утверждение. \square

Таким образом, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть существуют натуральное число $n \geq 3$ и вещественное число $b > 0$, такие, что на траектории γ справедливо $\frac{\partial^k C}{\partial x_1^k} = 0$ для всех $k < n$, и $\frac{\partial^n C}{\partial x_1^n} = -(-1)^n b$. Кроме того, пусть выполнено одно из следующих двух условий.*

1. *Во внутренности третьего ортанта имеет место неравенство $C < 0$.*
2. *$C_{\max}(x_1) > 0$, $\chi_{\max}(x_1) < 0$ при $x_1 < 0$, и $H_{1\text{равн}} < 0$ при $x_1 < 0$.*

Тогда оптимальный синтез существует и имеет следующий вид. Во втором ортанте существует кривая переключения ρ_{01} с управления $u = 0$ на $u = 1$, задающаяся уравнением $x_2 = x_2(x_1) = c_{01}|x_1|^{n-1} + \theta(x_1^n)$, где $c_{01} > 0$ — константа, зависящая только от b и α . В первом ортанте существует кривая переключения ρ_{10} с управления $u = 1$ на $u = 0$, задающаяся уравнением $x_2 = x_2(x_1) = c_{10}x_1 + \theta(x_1^2)$, где $c_{10} > 0$ — константа, зависящая только от α . При этом c_{01} и c_{10} связаны уравнением $c_{01}c_{10} = \frac{2b}{(n-1)n!}$. Обе кривые стыкуются в начале координат. Траектории системы оборачиваются вокруг начала

координат, попеременно пересекая кривые переключения и чередуя управление. Длины отрезков времени, в течение которых используется управление $u = 0$, стремятся к положительной постоянной величине, а длины отрезков времени, в течение которых используется управление $u = 1$, стремятся к нулю. С каждым оборотом фазовая точка приближается к началу координат (см. рис. 3.2 справа).

Доказательство: Пусть выполнены условия теоремы. В силу утверждения 3.18 сечение \mathcal{N} является интегральным многообразием системы (3.2), (3.5). Лагранжевость \mathcal{N} и существование функции Беллмана следуют из утверждения 2.35. Таким образом, синтез, индуцированный сечением \mathcal{N} , оптимален.

Константа c_{10} , фигурирующая в формулировке теоремы 3.2, равна $-\bar{\zeta}$. Так как правая часть системы (2.48) при $r = 0$ зависит только от параметра α , то $\bar{\zeta}$ является функцией от α . Константа c_{01} задаётся значением $\kappa_*(0) = \frac{-2b}{(n-1)n!\bar{\zeta}}$ и зависит только от α и b . Теорема 3.2 доказана. \square

Следующая теорема также является следствием утверждения 3.18.

Теорема 3.3. Пусть для всех $x_1 \leq 0$ выполнено равенство $H_{1\text{равн}}(x_1) = 0$. Тогда оптимальный синтез существует и имеет вид, описанный в теореме 3.2. Дополнительно имеется экивокальный особый режим γ_n в третьем ортанте. Он стыкуется в точке \tilde{x} с кривыми переключения и касается в этой точке оси Ox_1 . \square

3.4 Синтез с кривой дисперсии

В этом параграфе мы завершим классификацию, рассмотрев случай $C_{max} > 0$, $\chi_B < 0$, $H_{1\text{равн}} > 0$ при $x_1 < 0$. В дальнейшем предположим, что выполнены следующие условия. Пусть кривая γ_{max} расположена в третьем ортанте и функция C на ней положительна. В силу условия $C_{max} > 0$ определены функции $\chi_n(x_1)$ и $\chi_B(x_1)$. Обе функции отрицательны при $x_1 < 0$ и определяют кривые γ_n, γ_B , расположенные в третьем ортанте.

Обозначим синтез, построенный в предыдущем параграфе, через \mathcal{S} . Обозначим кривую переключения ρ_{01} синтеза \mathcal{S} через $\rho_{01\text{равн}}$, а задающую её функцию $\kappa_*(x_1)$ через $\kappa_{\text{равн}}$. Кривую переключения ρ_{10} синтеза \mathcal{S} обозначим через $\rho_{10\text{равн}}$. Функцию $\mathcal{F}(\kappa_{\text{равн}})$ обозначим через $H_{1\text{равн}}$. Предположим, что $H_{1\text{равн}} > 0$ при $x_1 < 0$.

Целью данного параграфа является доказать следующую теорему.

Теорема 3.4. При сделанных выше предположениях оптимальный синтез существует и имеет следующий вид. В третьем ортанте имеется особый ре-

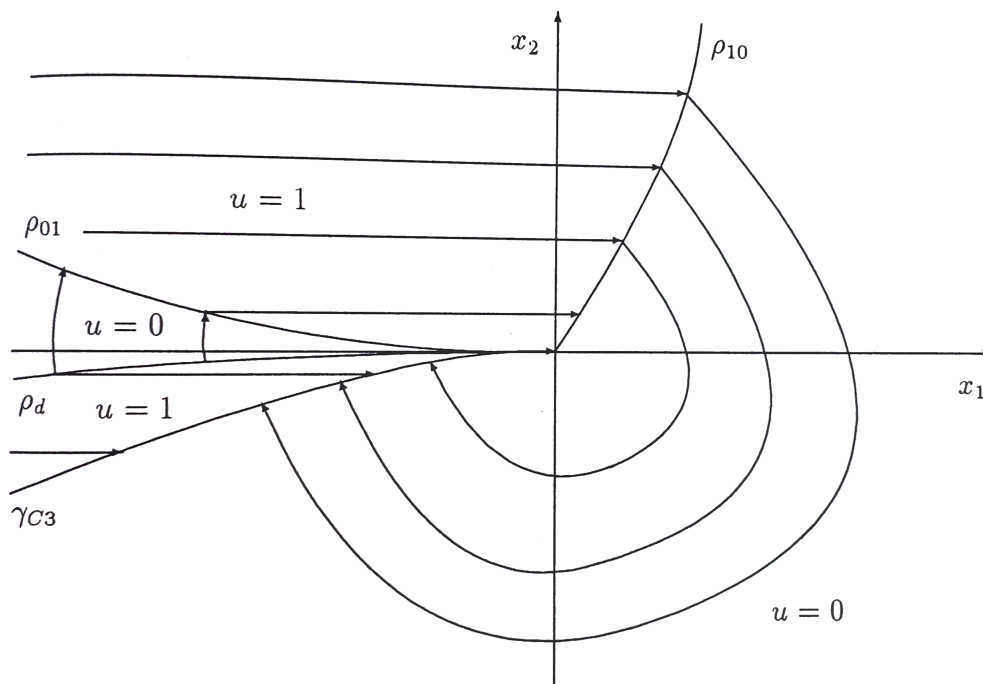


Рис. 4: Синтез с кривой дисперсии

жим γ_n . Касательной к γ_n является ось Ox_1 . Во втором ортанте существует кривая переключения ρ_{01} с управления $u = 0$ на $u = 1$, задающаяся уравнением $x_2 = x_2(x_1) = c_{01}|x_1|^{n-1} + \theta(x_1^n)$, где $c_{01} > 0$ константа, зависящая только от b и α . В первом ортанте существует кривая переключения ρ_{10} с управления $u = 1$ на $u = 0$, задающаяся уравнением $x_2 = x_2(x_1) = c_{10}x_1 + \theta(x_1^2)$, где $c_{10} > 0$ константа, зависящая только от α . При этом c_{01} и c_{10} связаны уравнением $c_{01}c_{10} = 2b$. В третьем ортанте существует кривая дисперсии ρ_d , расположенная между полуосью Ox_1 , $x_1 < 0$ и особым режимом γ_n .

Из кривой ρ_d исходят два семейства траекторий с управлениями $u = 0$ и $u = 1$ соответственно. Траектории с управлением $u = 1$ без переключений управления попадают на особый режим γ_n , семейство траекторий с управлением $u = 0$ проходит поочередно кривые переключения ρ_{01} и ρ_{10} , претерпевая соответствующие переключения управления, а потом также попадает на γ_n . По γ_n фазовая точка за конечное время попадает в начало координат (см. рис. 3.4).

Следствие 3.8. В синтезе \mathcal{S} кривая переключения ρ_{10} равна задаётся аналитической функцией $\zeta = \zeta(x_1)$.

Доказательство: В силу следствия 3.7 величины x_{11}, ζ_1 аналитически зависят от переменных x_{12}, κ_2 . Из утверждения 3.17 следует, что x_{11}, ζ_1 аналитически зависят от x_{12} . Имеем $x_{11} = -\Theta(x_{12})$. Отсюда находим, что $\frac{dx_{11}}{dx_{12}} < 0$ в

окрестности нуля, и x_{12} представимо в виде аналитической функции от x_{11} . Таким образом, ζ_1 является аналитической функцией от x_{11} , чего и требовалось доказать. \square

Утверждение 3.19. Пусть $\bar{\kappa}(x_1)$ — функция, раскладывающаяся в нуле в ряд по степеням $\sqrt{-x_1}$. Тогда функция $\mathcal{F}(\bar{\kappa})$ раскладывается в ряд по степеням $\sqrt{-x_1}$.

Доказательство: Рассмотрим точку $p \in U$ с координатами $x_1(p) \leq 0, \kappa(p) \in [0, K]$. В силу утверждения 3.13 величины $\sqrt{r(p)}, \varphi(p)$ являются аналитическими функциями от $\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p)$. Рассмотрим траекторию $\hat{\sigma}$ системы (3.8), проходящую через поднятие \hat{p} точки p на \mathcal{M} в момент времени $t = 0$. В силу следствия 2.3 величины \sqrt{r}, φ, ψ на этой траектории являются аналитическими функциями от $\sqrt{r(p)}, \varphi(p)$ и времени t , а следовательно, от $\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p)$ и t . Таким образом, величина H_1 на этой траектории является аналитической функцией от $\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p), t$.

Рассмотрим уравнение, задающее кривую γ_H . В силу утверждения 3.7 его можно представить в виде аналитической функции $\varphi = \varphi_H(\sqrt{r})$. Отсюда находим неявное уравнение на t :

$$\varphi(\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p), t) - \varphi_H(\sqrt{r(\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p), t)}) = 0.$$

Производная по t выражения на левой стороне имеет вид $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d\varphi_H}{d\sqrt{r}} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} = \dot{\varphi} - \frac{d\varphi_H}{d\sqrt{r}} \frac{d}{dt} \sqrt{r} = \frac{x_1 A_2 - x_2 A_1}{r^2} + \theta(\sqrt{r}) = -1 - \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \theta(\sqrt{r}) \neq 0$.

Следовательно, момент времени t_H , в который проекция $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ траектории $\hat{\sigma}$ пересекает кривую γ_H , представляется в виде аналитической функции от $\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p)$. Обозначим точку пересечения через p' , а её поднятие на траекторию $\hat{\sigma}$ — через \hat{p}' . В силу следствия 2.3 находим, что величины $\sqrt{-x_1(p')}$ и $H_1(\hat{p}')$ также являются аналитическими функциями от $\sqrt{-x_1(p)}, \kappa(p)$.

Так как $\kappa(p)$ является аналитической функцией от $\sqrt{-x_1(p)}$, то применимо утверждение 2.5. Отсюда следует, что $H_1(\hat{p}')$ аналитически зависит от $\sqrt{-x_1(p')}$. Другими словами, функция $[\mathcal{F}(\bar{\kappa})](x_1)$ раскладывается в ряд по степеням $\sqrt{-x_1}$. \square

Следствие 3.9. Функция $H_{1\text{равн}}$ раскладывается по степеням $\sqrt{-x_1}$. \square

Таким образом, классификация полная, т.е. если $C < 0$ на полуоси $\{x \mid x_1 < 0, x_2 = 0\}$, то всегда выполнены либо условия теоремы 3.2, либо теоремы 3.3, либо теоремы 3.4. Это следует из того, что всегда найдётся достаточно маленькая окрестность нуля, что в ней либо $H_{1\text{равн}} > 0$ при $x_1 < 0$, либо $H_{1\text{равн}} < 0$ при $x_1 < 0$, либо $H_{1\text{равн}} \equiv 0$.

Утверждение 3.20. Пусть $\bar{\kappa}_1(x_1), \bar{\kappa}_2(x_1)$ — две функции со значениями в интервале $[0, K]$, раскладывающиеся в ряд по $\sqrt{-x_1}$. Пусть существуют такие числа $c \in \mathbf{R}_+, k \in \mathbf{N}$, что $\bar{\kappa}_1(x_1) - \bar{\kappa}_2(x_1) = c\sqrt{-x_1}^k + \theta(\sqrt{-x_1}^{k+1})$. Тогда имеем $[\mathcal{F}(\bar{\kappa}_1)](x_1) - [\mathcal{F}(\bar{\kappa}_2)](x_1) = -\frac{bc}{n!}\sqrt{-x_1}^{4n+k-6} + \theta(\sqrt{-x_1}^{4n+k-5})$.

Доказательство: Функции $\bar{\kappa}_1(x_1)$ и $\bar{\kappa}_2(x_1)$ определяют посредством уравнения $x_2(x_1) = (-x_1)^{n-1}\bar{\kappa}(x_1)$ две кривые ρ_1, ρ_2 во втором ортанте. Зафиксируем точку p с координатами $(x_1, x_2) = (x_{1p}, \chi_{\mathbf{H}}(x_{1p}))$ на кривой $\gamma_{\mathbf{H}}$ и рассмотрим траекторию σ системы $\dot{x} = A$, проходящую через точку p в момент времени $t = 0$. Обозначим моменты времени, в которых траектория σ пересекает кривые ρ_1, ρ_2 , через \bar{t}_1, \bar{t}_2 .

Вычислим разницу $\bar{t}_1 - \bar{t}_2$. Рассмотрим на траектории σ величину $F(t) = x_2(t) - \bar{\kappa}_2(x_1(t))(-x_1(t))^{n-1}$. Очевидно $F(\bar{t}_2) = 0$,

$$\begin{aligned} F(\bar{t}_1) &= (\bar{\kappa}_1(x_1(\bar{t}_1)) - \bar{\kappa}_2(x_1(\bar{t}_1)))(-x_1(\bar{t}_1))^{n-1} = \\ &= c(-x_1(\bar{t}_1))^{\frac{2n+k-2}{2}} + \theta((-x_1(\bar{t}_1))^{\frac{2n+k-1}{2}}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\dot{F}(t) = A_2 - \frac{d\bar{\kappa}_2}{dx_1}(x_1)A_1(-x_1)^{n-1} - \bar{\kappa}_2(x_1)(n-1)(-x_1)^{n-2}(-A_1) = -x_1(t) + \theta(x_1^2(t)).$$

Имеем $x_1(t) - x_{1p} = \int_{x_2(0)}^{x_2(t)} \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} dx_2 = \theta(x_2(t) - x_2(0)) = \theta((-x_{1p})^{\frac{3}{2}})$ для $t \in [\bar{t}_2, \bar{t}_1]$. Отсюда находим $F(\bar{t}_1) - F(\bar{t}_2) = c(-x_{1p})^{\frac{2n+k-2}{2}} + \theta((-x_{1p})^{\frac{2n+k-1}{2}})$, $\dot{F}(t) = -x_{1p} + \theta((-x_{1p})^{\frac{3}{2}})$. Существует промежуточное значение $t \in [\bar{t}_2, \bar{t}_1]$ такое, что $\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{F(\bar{t}_1) - F(\bar{t}_2)}{\dot{F}(t)}$. Отсюда получаем $\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = c(-x_{1p})^{\frac{2n+k-4}{2}} + \theta((-x_{1p})^{\frac{2n+k-3}{2}})$.

Рассмотрим, как значение $H_1(0)$ зависит от момента времени \bar{t} , в котором $H_1(t)$ исчезает. Двумерный слой T_p^*X кокасательного расслоения над точкой p параметризуется сопряжёнными переменными ψ . Уравнение (2.20) задаёт аффинную замену координат $\psi \leftrightarrow (H_0, H_1)$ в этом слое. Поэтому уравнение $H_0 = 0$ задаёт аффинное подпространство в T_p^*X , т.е. некоторую прямую g . Параметризуем g величиной H_1 .

Рассмотрим семейство Σ траекторий системы (3.8), проходящих через точки прямой g в момент времени $t = 0$. Все траектории семейства Σ имеют одну и ту же проекцию на фазовую плоскость, а именно, траекторию σ . Семейство Σ образует двумерную поверхность в T^*X , параметризованную начальным значением $H_1(0)$, являющемся параметром прямой g , и временем t . На траекториях семейства Σ функция H_1 определена как функция от $H_1(0), t$.

Имеем $\frac{\partial H_1(H_1(0), t)}{\partial t} = \dot{H}_1 = \frac{C}{d_{AB}}$. В силу утверждения 3.12 для $t \in [\bar{t}_2, \bar{t}_1]$ имеем оценку $\frac{C}{d_{AB}}(t) = \frac{-\frac{b}{n!}|x_1(t)|^n + \theta(x_1^{n+1})}{x_1(t) + \theta(x_1^2)} = \frac{b}{n!}(-x_1(t))^{n-1} + \theta(x_1^n(t)) = \frac{b}{n!}(-x_{1p})^{n-1} +$

$\theta(\sqrt{-x_{1p}}^{2n-1})$. На интервале $t \in [0, \bar{t}_1]$ уравнение (2.28) невырождено. Отсюда следует, что при $t \in [0, \bar{t}_1]$ справедливо

$$\frac{\partial H_1(H_1(0), t)}{\partial H_1(0)} = e^{\int_0^t \left(\frac{d_{AB}}{d_{AB}} - \text{tr} \frac{\partial A}{\partial x} \right) d\tau} = e^{\int_0^t \theta(1) d\tau} = 1 + \theta(t) = 1 + \theta(\sqrt{-x_{1p}}) > 0. \quad (3.18)$$

Рассмотрим уравнение $H_1(H_1(0), t) = 0$. По теореме о неявной функции оно определяет $H_1(0)$ как функцию от t . При этом $H_1(0)(\bar{t}_1) = [\mathcal{F}(\bar{\kappa}_1)](x_{1p})$, $H_1(0)(\bar{t}_2) = [\mathcal{F}(\bar{\kappa}_2)](x_{1p})$, и $\frac{dH_1(0)}{dt} = -\frac{\frac{\partial H_1(H_1(0), t)}{\partial H_1(0)}}{\frac{\partial H_1(H_1(0), t)}{\partial H_1(0)}} = -\frac{b}{n!}(-x_{1p})^{n-1} + \theta(\sqrt{-x_{1p}}^{2n-1})$.

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{\kappa}_1) - \mathcal{F}(\bar{\kappa}_2) &= \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_1} \frac{dH_1(0)}{dt} d\tau = (\bar{t}_1 - \bar{t}_2) \left(-\frac{b}{n!}(-x_{1p})^{n-1} + \theta(\sqrt{-x_{1p}}^{2n-1}) \right) \\ &= -\frac{bc}{n!}(-x_{1p})^{\frac{4n+k-6}{2}} + \theta((-x_{1p})^{\frac{4n+k-5}{2}}). \quad \square \end{aligned}$$

Исследуем, как ведут себя траектории системы (3.2), (3.5), проходящие через точки особого режима $\hat{\gamma}_H$, в обратном направлении времени. Применим к точкам кривой γ_H отображение \mathbf{P} .

Утверждение 3.21. *Множество $\mathbf{P}[\gamma_H]$ образует некоторую кривую ρ_{010b} во втором ортанте, которая задаётся функцией $x_2(x_1) = |x_1|^{n-1} \kappa_{0b}(x_1)$, где функция κ_{0b} разлагается в ряд по степеням $\sqrt{-x_1}$ и удовлетворяет оценке $\kappa_{0b} = -\frac{2b}{(n-1)n!\zeta} + \theta(x_1)$.*

Доказательство: Разобьём доказательство на несколько шагов.

I. Множество $\mathbf{P}_0[\gamma_H]$ образует некоторую кривую ρ_{100b} в первом ортанте, задающуюся функцией $\zeta = \zeta(x_1)$. Функция ζ разлагается в ряд по степеням $\sqrt{x_1}$, и $\zeta(0) = \bar{\zeta}$. Это утверждение является следствием утверждений 3.7, 2.4 и 2.5. Соотношение $\zeta(0) = \bar{\zeta}$ следует из того, что $\varphi_2|_{r_2=0} = -\pi$.

II. Множество $\mathbf{P}_1[\rho_{100b}]$ образует некоторую кривую ρ_{010b} во втором ортанте, задающуюся функцией $x_2(x_1) = |x_1|^{n-1} \kappa_{0b}(x_1)$, где функция κ_{0b} разлагается в ряд по степеням $\sqrt{-x_1}$ и удовлетворяет оценке $\kappa_{0b} = -\frac{2b}{(n-1)n!\zeta} + \theta(x_1)$.

Обозначим координату $x_1(p_1)$ через x_{11} , а $x_{11}^{\frac{1}{n-1}}$ — через \tilde{x}_{11} . Обозначим точку $\mathbf{P}_1(p_1)$ через p_0 и координату $x_1(p_0)$ через x_{10} . В силу утверждения 3.5 разница $x_{10} - x_{11}$ удовлетворяет оценке $x_{10} - x_{11} = -\sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta_1^2}{2b} x_{11}^{\frac{1}{n-1}} + \theta(x_{11}^{\frac{2}{n-1}})}$ и разлагается в ряд по переменным $\sqrt[n-1]{x_{11}}$ и ζ_1 . Таким образом, x_{10} является аналитической функцией от \tilde{x}_{11} , ζ_1 и удовлетворяет оценке $x_{10} = -\sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta_1^2}{2b} \tilde{x}_{11} + \theta(\tilde{x}_{11}^2)}$.

Имеем $-x_{10} = \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)n!\zeta_1^2}{2b}} \sqrt[2(n-1)]{x_{11}^2} (1 + \theta(\sqrt[2(n-1)]{x_{11}^2}))$, отсюда

$$\sqrt{-x_{10}} = \sqrt[2(n-1)]{\frac{(n-1)n!\zeta_1^2}{2b}} \sqrt[2(n-1)]{x_{11}} \sqrt{1 + \theta(\sqrt[2(n-1)]{x_{11}^2})}.$$

Выражение под последним корнем ненулевое, поэтому $\sqrt{-x_{10}}$ является аналитической функцией от $\sqrt[2(n-1)]{x_{11}}$ и ζ_1 , и $\sqrt{-x_{10}} = \Theta(\sqrt[2(n-1)]{x_{11}})$.

Далее, справедливо $\kappa_{0б} = \frac{x_2}{(-x_{10})^{n-1}} = -\zeta_1 \frac{x_{11}}{(-x_{10})^{n-1}} = -\zeta_1 \left(\frac{\sqrt[2(n-1)]{x_{11}}}{\sqrt{-x_{10}}} \right)^{2(n-1)} = -\frac{2b}{(n-1)n!\zeta_1} (1 + \theta(x_{10})) = -\frac{2b}{(n-1)n!\zeta} (1 + \theta(x_{10}))$. Так как $\frac{\sqrt[2(n-1)]{x_{11}}}{\sqrt{-x_{10}}}$ является аналитической функцией от $\sqrt[2(n-1)]{x_{11}}$ и ζ_1 , то $\kappa_{0б}$ также аналитически зависит от $\sqrt[2(n-1)]{x_{11}}$ и ζ_1 .

Отметим, что на кривой $\rho_{100б}$ величина ζ_1 является аналитической функцией от $\sqrt[2(n-1)]{x_{11}}$. Утверждение 3.21 теперь следует из утверждения 2.5. \square

Отсюда с учётом утверждений 3.13 и 2.5 получаем следующее утверждение.

Следствие 3.10. *В полярных координатах кривая $\rho_{010б}$ задаётся функцией $\varphi(r)$, которая разлагается по степеням \sqrt{r} . \square*

Утверждение 3.15 переносится на кривые $\rho_{010б}, \rho_{100б}$.

Утверждение 3.22. *Поток траекторий системы $\dot{x} = A$, входящих в точки кривой $\rho_{100б}$, и поток траекторий системы $\dot{x} = A + B$, выходящих из точек кривой $\rho_{100б}$, не пересекаются друг с другом. То же самое верно для кривой $\rho_{010б}$. \square*

Обозначим степень первого ненулевого коэффициента в ряде Тейлора функции $H_{1\text{равн}}$ по переменной $\sqrt{-x_1}$ через k . Из оценки $H_1 = \theta(r)$ следует $k \geq 2$.

Утверждение 3.23. $\kappa_{0б}(x_1) - \kappa_{\text{равн}}(x_1) = \Theta(\sqrt{-x_1}^{(k-2)(n-1)})$.

Доказательство: Рассмотрим точку p_2 на кривой γ_H и прямую g в слое $T_{p_2}^*X$, задаваемую уравнением $H_0 = 0$. Обозначим точки на прямой g , соответствующие значениям $H_1 = 0$ и $H_1 = H_{1\text{равн}}(x_1(p_2))$, через \hat{p}_2 и \hat{p}'_2 соответственно. Обозначим траекторию системы $\dot{x} = A$, проходящую через точку p_2 в момент времени $t = 0$, через σ , а траектории системы (3.8), проходящие в момент $t = 0$ через точки \hat{p}_2 и \hat{p}'_2 , через $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}'$ соответственно. Определим $\bar{t} = \sup\{t < 0 \mid \hat{\sigma}(t) \in \mathcal{M}_+\}$, $\bar{t}' = \sup\{t < 0 \mid \hat{\sigma}'(t) \in \mathcal{M}_+\}$. Тогда точки $p_1 = \sigma(\bar{t})$ и $p'_1 = \sigma(\bar{t}')$ лежат на кривых $\rho_{100б}$ и $\rho_{10\text{равн}}$ соответственно.

Рассмотрим величину H_1 на траекториях семейства Σ , т.е. на траекториях системы (3.8), проходящих через точки прямой g в момент времени $t = 0$, как

функцию от начального значения $H_1^0 = H_1(0)$ и t . В силу уравнения (2.45) имеем $\frac{\partial H_1(H_1^0, t)}{\partial H_1^0} = \frac{d_{AB}(t)}{d_{AB}(0)} e^{-\int_0^t \langle \nabla, A \rangle d\tau}$. Кроме того, имеем $\frac{\partial H_1(H_1^0, t)}{\partial t} = \dot{H}_1(t)$.

По определению имеем $H_1(0, \bar{t}) = H_1(H_{1\text{равн}}, \bar{t}') = 0$. В интервале $t \in [\bar{t}', \bar{t}]$ имеем $d_{AB}(t) = x_1(t) + \theta(r^2) = \Theta(1)$, $C(t) = -\Theta(r^2)$, поэтому $\frac{\partial H_1(H_1^0, t)}{\partial H_1^0} = -\Theta(1)$. При $H_1(H_1^0, t) = 0$ имеем $\frac{\partial H_1(H_1^0, t)}{\partial t} = \frac{C}{d_{AB}} = -\Theta(r) \neq 0$. По теореме о неявной функции существует такая функция $t = \tilde{t}(H_1^0)$, что $\tilde{t}(0) = \bar{t}$, $\tilde{t}(H_{1\text{равн}}) = \bar{t}'$, $H_1(H_1^0, \tilde{t}(H_1^0)) \equiv 0$. При этом $\frac{d\tilde{t}}{dH_1^0} = -\frac{\frac{\partial H_1(H_1^0, t)}{\partial H_1^0}}{\frac{\partial H_1(H_1^0, t)}{\partial t}} = -\Theta(r^{-1})$.

Отсюда находим в силу $H_{1\text{равн}} = \Theta(\sqrt{r^k})$

$$\bar{t} - \bar{t}' = - \int_0^{H_{1\text{равн}}} \frac{d\tilde{t}}{dH_1^0} dt = \Theta(r^{\frac{k}{2}-1}).$$

Учитывая, что при $t \in [\bar{t}', \bar{t}]$ имеем $\dot{\zeta} = \frac{A_1 x_2 - A_2 x_1}{x_1^2} = \Theta(1)$, находим

$$\begin{aligned} \zeta(p_1) - \zeta(p'_1) &= \int_{\bar{t}'}^{\bar{t}} \dot{\zeta} dt = \Theta(r^{\frac{k}{2}-1}), \\ x_1(p_1) - x_1(p'_1) &= \int_{\bar{t}'}^{\bar{t}} A_1 dt = \theta(r^{\frac{k}{2}}). \end{aligned}$$

Для $x_1 \in [x_1(p'_1), x_1(p_1)]$, $\zeta \in [\zeta(p'_1), \zeta(p_1)]$ имеем $x_1 = \Theta(r)$. Следовательно, в этих интервалах

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, \zeta)} = \begin{pmatrix} 1 + \theta(r) & \theta(r^2) \\ -\zeta & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая эти производные с производными (3.16), находим

$$\frac{\partial(x_{10}, \kappa_0)}{\partial(x_{11}, \zeta_1)} = \begin{pmatrix} -\Theta(x_{11}^{\frac{2-n}{n-1}}) & \Theta(x_{11}^{\frac{1}{n-1}}) \\ \theta(x_{11}^{\frac{2-n}{n-1}}) & \Theta(1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим точки $\mathbf{P}_1(p_1)$, $\mathbf{P}_1(p'_1)$ через p_0, p'_0 . Находим

$$\begin{aligned} x_1(p_0) - x_1(p'_0) &= \int_{x_1(p'_1)}^{x_1(p_1)} \frac{\partial x_{10}}{\partial x_{11}}(x_{11}, \zeta(p'_1)) dx_{11} + \int_{\zeta(p'_1)}^{\zeta(p_1)} \frac{\partial x_{10}}{\partial \zeta_1}(x_1(p_1), \zeta_1) d\zeta_1 = \\ &= -\Theta((x_1(p_1))^{\frac{2-n}{n-1}}) \theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}}) + \Theta((x_1(p_1))^{\frac{1}{n-1}}) \Theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}-1}) = \theta((x_1(p_1))^{\frac{2-n}{n-1} + \frac{k}{2}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa(p_0) - \kappa(p'_0) &= \int_{x_1(p'_1)}^{x_1(p_1)} \frac{\partial \kappa_0}{\partial x_{11}}(x_{11}, \zeta(p'_1)) dx_{11} + \int_{\zeta(p'_1)}^{\zeta(p_1)} \frac{\partial \kappa_0}{\partial \zeta_1}(x_1(p_1), \zeta_1) d\zeta_1 = \\ &= \theta((x_1(p_1))^{\frac{2-n}{n-1}}) \theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}}) + \Theta(1) \Theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}-1}) = \Theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}-1}). \end{aligned}$$

По определению имеем $\kappa(p_0) = \kappa_{o\delta}(x_1(p_0))$, $\kappa(p'_0) = \kappa_{равн}(x_1(p'_0))$. В силу утверждения 3.17 функция $\kappa_{равн}(x_1)$ аналитическая, и, следовательно, липшицева. Отсюда находим

$$\kappa_{равн}(x_1(p_0)) - \kappa_{равн}(x_1(p'_0)) = \theta(x_1(p_0) - x_1(p'_0)) = \theta((x_1(p_1))^{\frac{2-n}{n-1} + \frac{k}{2}}).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \kappa_{o\delta}(x_1(p_0)) - \kappa_{равн}(x_1(p_0)) = \\ & = \kappa_{o\delta}(x_1(p_0)) - \kappa_{равн}(x_1(p'_0)) - (\kappa_{равн}(x_1(p_0)) - \kappa_{равн}(x_1(p'_0))) \\ & = \Theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}-1}) - \theta((x_1(p_1))^{\frac{2-n}{n-1} + \frac{k}{2}}) = \Theta((x_1(p_1))^{\frac{k}{2}-1}) \\ & = \Theta((-x_1(p_0))^{(n-1)(\frac{k}{2}-1)}). \end{aligned}$$

Если точка p_2 пробегает кривую γ_H , то точка p_0 пробегает кривую $\rho_{01o\delta}$. Следовательно, получаем оценку $\kappa_{o\delta}(x_1) - \kappa_{равн}(x_1) = \Theta(\sqrt{-x_1}^{(n-1)(k-2)})$. \square

Из утверждений 3.23 и 3.20 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.11. *Разница $H_{1равн}(x_1) - [\mathcal{F}(\kappa_{o\delta})](x_1)$ удовлетворяет оценке $H_{1равн}(x_1) - [\mathcal{F}(\kappa_{o\delta})](x_1) = \Theta(\sqrt{-x_1}^{(k+2)(n-1)-2})$. В частности, в силу $(k+2)(n-1) - 2 > k$ имеем $0 < [\mathcal{F}(\kappa_{o\delta})](x_1) < H_{1равн}(x_1)$ при $x_1 < 0$. \square*

Рассмотрим ещё раз траектории семейства Σ . В некоторый момент времени $t_+ > 0$ траектория σ пересекает кривую γ_{AB}^+ . Согласно (2.47) имеем $H_1(H_1^0, t_+) = \frac{1}{2}x_2 + \theta(r^2) > 0$ для всех H_1^0 . Обозначим момент времени, в который σ пересекает кривую, заданную функцией $x_2 = \chi_B(x_1)$, через t_B . Тогда имеем $C(\sigma(t)) > 0$ для всех $t \in (0, t_B)$, $C(\sigma(t)) < 0$ для всех $t \in (t_B, t_+]$, $C(\sigma(0)) = C(\sigma(t_B)) = 0$, $\dot{C}(\sigma(0)) > 0$, $\dot{C}(\sigma(t_B)) < 0$. Допустим, что некоторая траектория $\hat{\sigma}$ из семейства Σ является поднятием траектории σ в T^*X , и для некоторого момента времени t имеем $H_1(t) = 0$ на траектории $\hat{\sigma}$. В силу уравнений (2.28) и (2.36) имеем $\dot{H}_1(t) < 0$, если $t \in (0, t_B)$; $\dot{H}_1(t) > 0$, если $t \in (t_B, t_+)$; $\dot{H}_1(0) = 0$, $\dot{H}_1(0) < 0$; $\dot{H}_1(t_B) = 0$, $\dot{H}_1(t_B) > 0$. Отсюда следует, что на интервалах $[0, t_B]$ и $[t_B, t_+]$ может лежать максимально один нуль функции $H_1(t)$, причём если на интервале $[0, t_B]$ лежит нуль, то на интервале $[t_B, t_+]$ также должен лежать нуль.

Рассмотрим поведение функции $H_1(t)$ на интервале $t \in [0, t_+)$ в зависимости от начального значения $H_1(0) = H_1^0$. В силу вышесказанного получаем следующую картину.

1. Пусть $H_1(0) < 0$. Тогда $H_1(t)$ на интервале $[0, t_B]$ строго меньше нуля, а на интервале (t_B, t_+) лежит ровно один нуль функции $H_1(t)$.

2. Пусть $H_1(0) = 0$. Тогда график функции $H_1(t)$ в точке 0 вогнут и касается абсциссы. На интервале $(0, t_B]$ строго меньше нуля, а на интервале (t_B, t_+) лежит ровно один нуль функции $H_1(t)$.

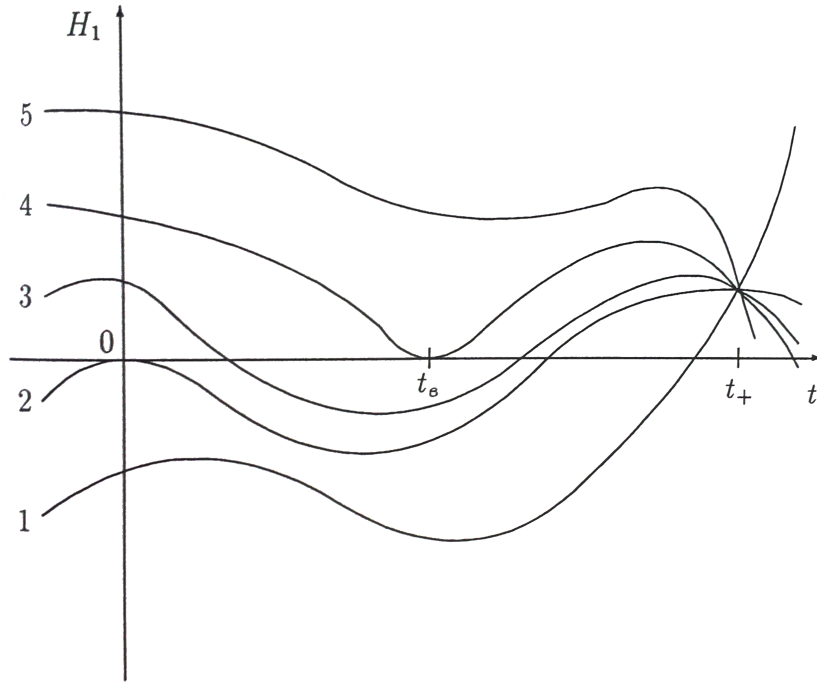


Рис. 5: Зависимость функции $H_1(t)$ от начального значения H_1^0

Если дальше увеличивать H_1^0 , то $H_1(t_B)$ также будет увеличиваться в силу (3.18). Рассмотрим ситуацию в зависимости от знака $H_1(t_B)$.

3. Пусть $H_1(0) > 0$, $H_1(t_B) < 0$. Тогда на интервалах $(0, t_B)$ и (t_B, t_+) лежит ровно по одному нулю функции $H_1(t)$.

4. Пусть $H_1(t_B) = 0$. Тогда график функции $H_1(t)$ выпуклый в точке t_B и касается абсциссы. t_B является единственным нулём функции $H_1(t)$ на интервале $[0, t_+]$.

5. Пусть $H_1(t_B) > 0$. Тогда $H_1(t) > 0$ для всех $t \in [0, t_+]$.

Все пять случаев схематически изображены на рис. 3.4. Очевидно значение $H_1^0 = H_{1\text{равн}}$ попадает под случай 3. Отсюда следует в силу следствия 3.11, что значение $H_1^0 = \mathcal{F}(\kappa_{0\text{б}})$ также попадает под случай 3.

Обозначим поднятие кривой $\rho_{010\text{б}}$ на многообразии \mathcal{M}_- через $\hat{\rho}_{010\text{б}}$. Рассмотрим совокупность траекторий системы (3.8), проходящих в момент времени $t = 0$ через точки кривой $\hat{\rho}_{010\text{б}}$. Они образуют двумерную поверхность $\Sigma_{0\text{б}}$ в T^*X , которая при проекции π_X на фазовую плоскость накрывает область между кривыми $\rho_{010\text{б}}$ и $\gamma_{\text{н}}$. Следовательно, $\Sigma_{0\text{б}}$ определяет в этой области величину H_1 как функцию от координат x . Обозначим эту функцию через $H_{10\text{б}}(x)$. На кривой $\gamma_{\text{н}}$ эта функция совпадает с $\mathcal{F}(\kappa_{0\text{б}})$.

Пусть $\hat{\sigma}$ — траектория на $\Sigma_{0\text{б}}$, проходящая при $t = 0$ через точку $\hat{p} \in \hat{\rho}_{010\text{б}}$. Пусть её проекция $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ пересекает кривые $\gamma_{\text{в}}$ и $\gamma_{\text{н}}$ в моменты времени $t_{\text{в}}$ и $t_{\text{н}}$ соответственно.

Следствие 3.12. На интервале (t_n, t_b) лежит в точности один нуль t_α функции H_1 . Для всех $t \in (t_\alpha, 0)$ имеем $H_1(\hat{\sigma}(t)) < 0$, для всех $t \in [t_n, t_\alpha)$ имеем $H_1(\hat{\sigma}(t)) > 0$. \square

Обозначим момент времени, в который траектория σ пересекает ось Ox_1 , через t_γ . Тогда $t_\gamma > t_\alpha$, и $H_1(\hat{\sigma}(t_\gamma)) < 0$. Следовательно, на оси Ox_1 имеем $H_{106}(x_1, 0) < 0$ при $x_1 < 0$.

Обозначим $\sigma(t_\alpha)$ через p_α . В силу $t_\alpha \in (t_n, t_b)$ имеем $C(p_\alpha) > 0$. Если точка \hat{p} пробегает кривую $\hat{\rho}_{0106}$, то точка p_α пробегает некоторую кривую γ_α .

Утверждение 3.24. Функция H_{106} и переменные ψ на Σ_{06} в нуле раскладываются в ряд по переменным \sqrt{r}, φ .

Доказательство: Поверхность Σ_{06} состоит из однопараметрического семейства траекторий системы (3.8), которое можно параметризовать величиной $\tilde{r}_0 = \sqrt{r(\hat{p})}$, где \hat{p} — начальная точка траектории на кривой $\hat{\rho}_{0106}$. Таким образом, поверхность Σ_{06} параметризована переменной \tilde{r}_0 и временем t .

В силу следствия 3.10 кривую ρ_{0106} можно задать функцией $\varphi(r)$, которая раскладывается в ряд по степеням $\sqrt{r} = \tilde{r}_0$. Поэтому из следствия 2.3 следует, что величины \sqrt{r}, φ, ψ на поверхности Σ_{06} являются аналитическими по переменным \tilde{r}_0, t .

Вычислим якобиан $\frac{\partial(\sqrt{r}, \varphi)}{\partial(\tilde{r}_0, t)}$ в точке $(\tilde{r}_0, t) = (0, 0)$, соответствующей точке $(\sqrt{r}, \varphi) = (0, -\pi)$. На кривой ρ_{0106} имеем $\varphi = -\pi - \arctg(\kappa_{06}(x_1)(-x_1)^{n-2}) = -\pi + \theta(r^{n-2})$, откуда $\frac{d\varphi}{dr} = \theta(r^{n-3})$, и в силу утверждения 3.16 $\frac{d\varphi}{dr}(0) = 0$. Далее, в точке $(r, \varphi) = (0, -\pi)$ имеем $\dot{\varphi} = -\cos^2 \varphi - \alpha \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi = -1$. Находим

$$\det \frac{\partial(\sqrt{r}, \varphi)}{\partial(\tilde{r}_0, t)}(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Отсюда следует, что в окрестности точки $(r, \varphi) = (0, -\pi)$ переменные \tilde{r}_0, t выражаются как аналитические функции от \sqrt{r}, φ . Следовательно, величины ψ , и, таким образом, H_1 , являются аналитическими функциями от \sqrt{r}, φ . \square

В силу утверждения 2.34 поверхность Σ_{06} задаёт локальное лагранжевое относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом H_0 сечение расслоения T^*X , и векторное поле $\psi(x)$ на этом сечении имеет потенциал $\omega_{06}(x)$. Отнормируем его условием $\omega_{06}(0, 0) = 0$. Следующее утверждение является следствием утверждения 3.24.

Следствие 3.13. Функция ω_{06} в нуле раскладывается в ряд по переменным \sqrt{r}, φ . \square

По определению функции $\omega_{0\delta}$ для любого $u \in \mathbf{R}$ имеем

$$D_{A+uB}\omega_{0\delta} = F + uH_{10\delta}. \quad (3.19)$$

Утверждение 3.25. *Кривая γ_α задаётся функцией $x_2(x_1)$, которая в нуле раскладывается в ряд по степеням $\sqrt[4]{-x_1}$ и имеет порядок $x_2 = \theta(\sqrt[4]{-x_1}^6)$.*

Доказательство: Рассмотрим функцию $\tilde{H}_1 = \frac{H_1}{r} = \frac{H_{10\delta}}{r}$ на поверхности $\Sigma_{0\delta}$. В силу следствий 2.3 и 3.10 она аналитически зависит от переменных \tilde{r}_0, t . Кроме того, она тождественно равна нулю на линии $t = 0$. Следовательно, функция $\bar{H}_1 = \frac{\tilde{H}_1}{t}$ аналитически продолжается на окрестность точки $(\tilde{r}_0, t) = (0, 0)$.

Вычислим производные функции $\bar{H}_1(\tilde{r}_0, t)$ в точке $(0, 0)$. При $\tilde{r}_0 = 0$ эволюция величины $\tilde{H}_1 = \frac{H_1}{r}$ подчиняется уравнению (2.49), которое принимает вид

$$\dot{\tilde{H}}_1(0, t) = \tilde{H}_1(\text{tg}\varphi(t) - \alpha \cos^2 \varphi(t)) + \frac{1}{2}\text{tg}\varphi(t) \sin \varphi(t).$$

В точке $(0, 0)$ это выражение равно нулю. Дифференцируя дальше по t и учитывая, что в силу (2.48) имеем $\dot{\varphi}(0, t) = -1 - \alpha \sin \varphi(t) \cos \varphi(t)$, и подставляя уже известные выражения для производных \tilde{H}_1 более низкого порядка, находим $\ddot{\tilde{H}}_1(0, 0) = 0$, $\frac{d^3 \tilde{H}_1}{dt^3}(0, 0) = -1$. Отсюда получаем для функции \bar{H}_1 : $\bar{H}_1(0, 0) = 0$, $\dot{\bar{H}}_1(0, 0) = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial t} = 0$, $\ddot{\bar{H}}_1(0, 0) = \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{3}$. На линии $t = 0$ функция \bar{H}_1 определена через $\bar{H}_1(\tilde{r}_0, 0) = \dot{\tilde{H}}_1(\tilde{r}_0, 0) = \frac{\dot{H}_1}{r}(\tilde{r}_0, 0) = \frac{C}{d_{AB}r}$. Здесь учтено, что $H_1 = 0$ на линии $t = 0$. В силу утверждения 3.12 имеем $C = \theta(r^4)$ на линии $t = 0$. Отсюда следует $\frac{C}{d_{AB}r} = \theta(r^2) = \theta(\tilde{r}_0^4)$. Поэтому $\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \tilde{r}_0}(0, 0) = 0$.

Таким образом, функция \bar{H}_1 удовлетворяет условиям утверждения 2.2. Здесь роль координат x, y играют \tilde{r}_0, t . Кривая γ_α задаётся уравнением $\bar{H}_1 = 0$ и соответствует кривой ρ_B из утверждения 2.2. В силу этого утверждения кривая γ_α задаётся функцией $t = t(\tilde{r}_0)$, в нуле равной нулю и раскладывающейся в ряд по $\sqrt{\tilde{r}_0}$.

В силу следствий 2.3 и 3.10 величины $\sqrt[4]{r}, \varphi$ на $\Sigma_{0\delta}$ аналитически зависят от величин $\sqrt{\tilde{r}_0}, t$. В силу утверждения 2.13 выполнены условия утверждения 2.5 применимо к этой зависимости. Поэтому кривая γ_α задаётся аналитической функцией $\varphi = \varphi(\sqrt[4]{r})$.

Отсюда следует в силу утверждения 2.5, что x_2 на γ_α является аналитической функцией от $\sqrt[4]{-x_1}$.

На кривой γ_α справедливо $C > 0$. Поэтому на ней x_2 лежит в интервале $(\chi_H(x_1), \chi_B(x_1))$. Следовательно, $x_2 = \theta((-x_1)^{\frac{3}{2}}) = \theta(\sqrt[4]{-x_1}^6)$. \square

Рассмотрим семейство траекторий системы (3.6), проходящих через точки кривой $\hat{\gamma}_H$ в момент времени $t = 0$. Они образуют двумерную поверхность Σ_{0c} , которая при проекции π_X на фазовую плоскость покрывает нижнюю полуплоскость и задаёт на ней величины ψ и H_1 как функции от x . Обозначим функцию $H_1(x)$ на Σ_{0c} через H_{10c} .

В силу утверждения 2.34 поверхность Σ_{0c} задаёт локальное лагранжевое относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = H_0 + H_1$ сечение расслоения T^*X , и векторное поле $\psi(x)$ на этом сечении имеет потенциал $\omega_{0c}(x)$. Отнормируем его условием $\omega_{0c}(0, 0) = 0$.

Рассмотрим траекторию $\hat{\sigma} \subset \Sigma_{0c}$ и её проекцию $\sigma = \pi_X \circ \hat{\sigma}$ на фазовую плоскость. При $t \leq 0$ уравнение (2.28), задающее функцию H_1 на этой траектории, не имеет особенностей и принимает вид

$$-A_2 \dot{H}_{10c} = -\dot{A}_2 H_{10c} + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{H_{10c}}{A_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{H_{10c}}{A_2} = -\frac{C}{A_2^2}. \quad (3.20)$$

Согласно утверждению 3.6 функции χ_H, χ_B в окрестности нуля имеют обратные функции. Обозначим их через χ_H^*, χ_B^* соответственно. Тогда кривые γ_H, γ_B задаются соотношениями $x_1 = \chi_H^*(x_2), x_1 = \chi_B^*(x_2)$.

В силу (3.20) находим $H_{10c}(t) = -A_2 \int_t^0 \left(-\frac{C}{A_2^2}\right) dt$, отсюда

$$H_{10c}(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2) \int_{x_1}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau. \quad (3.21)$$

Утверждение 3.26. *Множество точек на поверхности Σ_{0c} , в которых выполнено $H_{10c} = 0$, образует некоторую кривую $\hat{\gamma}_\beta \subset \mathcal{M}_-$. Проекция $\gamma_\beta = \pi_X \circ \hat{\gamma}_\beta$ этой кривой на фазовую плоскость задаётся дифференцируемой функцией $x_2 = x_2(x_1)$.*

Доказательство: Исследуем, когда функция H_1 равна нулю на траектории σ . При $x_1 \in (\chi_B^*(x_2), \chi_H^*(x_2))$ имеем $C(x_1, x_2) > 0$, поэтому на интервале $x_1 \in [\chi_B^*(x_2), \chi_H^*(x_2))$ имеем $H_{10c}(x_1, x_2) > 0$. В частности, на кривых γ_α и γ_B выполнено неравенство $H_{10c} > 0$.

Допустим, что $\bar{x}_1 < \chi_B^*(x_2)$ и $H_{10c}(\bar{x}_1, x_2) = 0$. Тогда вследствие (3.20) справедливо $H_{10c}(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2) \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau$. Так как при $x_1 < \chi_B^*(x_2)$ справедливо $C(x_1, x_2) < 0$, то $H_{10c}(x_1, x_2) < 0$ при $x_1 < \bar{x}_1$. Таким образом, при $x_1 < \chi_H^*(x_2)$ на траектории $\hat{\sigma}$ находится максимально один нуль функции H_1 .

Обозначим множество точек во внутренней части сегмента фазовой плоскости, расположенного между кривой γ_H и полуосью $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$, в которых $H_{10c} = 0$, через γ_β . На полуоси $\{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0, x_2 = 0\}$ имеем в силу

утверждения 3.12 $H_{10c} = -\Theta(|x_1|^n) < 0$, а на кривой γ_B имеем $H_{10c} > 0$. Поэтому на любом отрезке, соединяющем полуось $\{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0, x_2 = 0\}$ и γ_B , найдутся точки из множества γ_β .

Пусть точка p принадлежит множеству γ_β . Дифференцируя (3.21) и учитывая, что H_{10c} равно нулю в p , получаем в этой точке

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{10c}}{\partial x_1} &= -A_2(x_1, x_2) \frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) = -\frac{C}{A_2}(x_1, x_2) > 0, \\ \frac{\partial H_{10c}}{\partial x_2} &= A_2(x_1, x_2) \left(\frac{d\chi_H^*(x_2)}{dx_2} \frac{C}{A_2^2}(\chi_H^*(x_2), x_2)(\tau, x_2) d\tau + \int_{x_1}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau \right) \\ &= A_2(x_1, x_2) \int_{x_1}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau. \end{aligned}$$

Так как частные производные функции H_{10c} в окрестности точки p аналитичны, то по теореме о неявной функции [27] соотношение $H_{10c}(x_1, x_2) = 0$ в окрестности p задаёт аналитическую функцию $x_1 = x_{1\beta}(x_2)$. \square

Утверждение 3.27. *Кривая γ_β является допустимой траекторией управляемой системы 3.2 с управлением $u \in (0, 1)$. На ней справедлива оценка $x_2 = \theta(x_1^2)$.*

Доказательство: Касательная к γ_β тогда и только тогда соответствует некоторому управлению $u \in (0, 1)$, если наклон лежит в пределах $\frac{dx_1}{dx_2} \in (-\infty, \frac{A_1}{A_2})$. В точке $p \in \gamma_\beta$ справедливо соотношение

$$\frac{dx_{1\beta}(x_2)}{dx_2} = -\frac{A_2(x_1, x_2) \int_{x_1}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau}{-\frac{C}{A_2}(x_1, x_2)} = \frac{A_2^2}{C}(x_1, x_2) \int_{x_1}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau.$$

Докажем, что $\frac{dx_{1\beta}(x_2)}{dx_2} > \frac{A_1}{A_2}(x_1, x_2)$. В силу $C(p) < 0$ это неравенство эквивалентно неравенству

$$\int_{x_1}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau < \frac{A_1}{A_2} \frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2). \quad (3.22)$$

Исследуем функцию $\frac{C}{A_2^2}$. В силу леммы Адамара в окрестности точки $(x_1, \zeta) = (0, 0)$ она является аналитической по x_1, ζ . Имеем $\frac{C}{A_2^2} = \frac{-\frac{1}{2}x_2^2 + \theta(r^3)}{x_1^2 + \theta(r^3)} = -\frac{1}{2}\zeta^2 + \theta(x_1)$. Отсюда следует, что в точке $(x_1, \zeta) = (0, 0)$ имеем $\frac{C}{A_2^2} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{C}{A_2^2} = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{C}{A_2^2} = -1$.

По теореме о неявной функции [27] следует, что уравнение $\frac{\partial C}{\partial \zeta} \frac{C}{A_2^2} = 0$ неявно задаёт некоторую аналитическую функцию $\zeta = \zeta_m(x_1) = \theta(x_1)$, где $\zeta_m(0) = 0$. В координатах x_1, x_2 ей соответствует аналитическая функция $x_2 = x_{2m}(x_1) = -x_1 \zeta_m(x_1) = \theta(x_1^2)$, задающая некоторую кривую γ_m на фазовой плоскости. В окрестности нуля она строго растёт при $x_1 < 0$, следовательно, существует обратная функция $x_{1m}(x_2)$. Функция $\frac{C}{A_2^2}$, ограниченная на кривую γ_m , является аналитической функцией от x_1 . Обозначим её через f_m . Тогда $f_m(x_1) = \frac{C}{A_2^2}(x_1, \zeta_m(x_1))$. Разница $\frac{C}{A_2^2} - f_m$ и её частная производная по ζ равны нулю в точках $(x_1, \zeta_m(x_1))$. По лемме Адамара отсюда следует, что $\frac{\frac{C}{A_2^2}(x_1, \zeta) - f_m(x_1)}{(\zeta - \zeta_m(x_1))^2}$ является аналитической функцией от переменных x_1, ζ . На прямой $x_1 = 0$ она принимает значение $-\frac{1}{2}$.

Таким образом, функция $\frac{C}{A_2^2}(x_1, \zeta)$ представима в виде разницы $f_m(x_1) - \frac{1}{2}(\zeta - \zeta_m(x_1))^2 f_0^*(x_1, \zeta)$, здесь f_m, f_0^*, ζ_m — аналитические функции, и $f_0^*(0, \zeta) = 1, f_m(0) = 0, \zeta_m(0) = 0$. В координатах x_1, x_2 получаем

$$\frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) = f_m(x_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 f_0(x_1, x_2).$$

Здесь $f_0(x_1, x_2) = f_0^*(x_1, -\frac{x_2}{x_1}) = 1 + \theta(x_1)$ — аналитическая функция, определённая в окрестности точки \tilde{x} , пересечённой с полуплоскостью $\{x_1 < 0\}$. При этом $\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = -\frac{1}{x_1} \frac{\partial f_0^*}{\partial \zeta}$. Но $\frac{\partial f_0^*}{\partial \zeta}(0, \zeta) \equiv 0$, поэтому $\frac{\partial f_0^*}{\partial \zeta} = \theta(x_1)$. Отсюда следует $\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = \theta(1)$.

Отсюда находим

$$\frac{\partial C}{\partial x_2 A_2^2} = -f_0(x_1, x_2) \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right) \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}. \quad (3.23)$$

На кривых γ_H, γ_B функция $\frac{C}{A_2^2}$ равна нулю, а между ними — больше нуля. Ясно, что кривая γ_m расположена между γ_H и γ_B . Таким образом, $x_{2m} < 0$ для $x_1 < 0$, а $f_m > 0$ для $x_1 < 0$. Пусть разложения функций f_m, x_{2m} в нуле имеют вид

$$\begin{aligned} f_m(x_1) &= L_1(-x_1)^{l_1} + \theta(x_1^{l_1+1}), \\ x_{2m} &= L_2(-x_1)^{l_2} + \theta(x_1^{l_2+1}). \end{aligned}$$

Здесь $L_1 > 0, L_2 < 0, l_1 \geq 1, l_2 \geq 2$. На оси Ox_1 имеем $C = -\frac{b}{n!}(-x_1)^n + \theta(x_1^{n+1})$,

следовательно, $\frac{C}{A_2^2} = -\frac{b}{n!}(-x_1)^{n-2} + \theta(x_1^{n-1})$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{C}{A_2^2}(x_1, 0) &= f_m(x_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 f_0(x_1, 0) = \\ &= L_1(-x_1)^{l_1} + \theta(x_1^{l_1+1}) - \frac{1}{2} (L_2(-x_1)^{l_2-1} + \theta(x_1^{l_2}))^2 (1 + \theta(x_1)) = \\ &= L_1(-x_1)^{l_1} + \theta(x_1^{l_1+1}) - \frac{L_2^2}{2} (-x_1)^{2l_2-2} + \theta(x_1^{2l_2-1}) = -\frac{b}{n!}(-x_1)^{n-2} + \theta(x_1^{n-1}). \end{aligned}$$

Сравнивая главные члены, получаем следующие три случая.

1. $l_1 = 2l_2 - 2 < n - 2$, $L_1 = \frac{1}{2}L_2^2$,
2. $l_1 = 2l_2 - 2 = n - 2$, $L_1 = \frac{1}{2}L_2^2 - \frac{b}{n!}$,
3. $l_1 > 2l_2 - 2 = n - 2$, $\frac{1}{2}L_2^2 = \frac{b}{n!}$.

На кривых γ_H, γ_B имеем $\frac{C}{A_2^2} = 0$, поэтому

$$f_m(x_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_H(x_1)}{x_1} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 f_0(x_1, \chi_H(x_1)) = 0,$$

$$f_m(x_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_B(x_1)}{x_1} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 f_0(x_1, \chi_B(x_1)) = 0,$$

Подставляя сюда разложения для f_0, f_m, x_{2m} , находим

$$L_1(-x_1)^{l_1} + \theta(x_1^{l_1+1}) - \frac{1}{2x_1^2} (\chi_H(x_1) - x_{2m}(x_1))^2 (1 + \theta(x_1)) = 0,$$

$$L_1(-x_1)^{l_1} + \theta(x_1^{l_1+1}) - \frac{1}{2x_1^2} (\chi_B(x_1) - x_{2m}(x_1))^2 (1 + \theta(x_1)) = 0,$$

$$\begin{aligned} \chi_H(x_1) - x_{2m}(x_1) &= -\sqrt{2x_1^2 f_m(x_1)(1 + \theta(x_1))} = -\sqrt{2L_1(-x_1)^{l_1+2} + \theta(x_1^{l_1+3})} \\ &= -\sqrt{2L_1}(-x_1)^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_1)^{\frac{l_1+4}{2}}), \\ \chi_B(x_1) - x_{2m}(x_1) &= \sqrt{2L_1}(-x_1)^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_1)^{\frac{l_1+4}{2}}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Аналогично находим

$$\chi_B(x_1) - x_{2m}(x_1) = \sqrt{2L_1}(-x_1)^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_1)^{\frac{l_1+4}{2}}). \quad (3.25)$$

Из (3.21) следует

$$\int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau = 0. \quad (3.26)$$

Найдём отсюда $\chi_{\text{H}}^*(x_2)$ и $x_{1\beta}(x_2)$ для всех трёх случаев.

1. $l_1 = 2l_2 - 2 < n - 2$, $L_1 = \frac{1}{2}L_2^2$. Из уравнений (3.24) и (3.25) следует

$$\chi_{\text{H}}(x_1) = (2L_2)(-x_1)^{l_2} + \theta(x_1^{l_2+1}), \quad \chi_{\text{B}}(x_1) = \theta(x_1^{l_2+1}).$$

Обращая функции χ_{H}, x_{2m} , находим

$$\chi_{\text{H}}^*(x_2) = -\left(\frac{x_2}{2L_2}\right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}), \quad x_{1m}(x_2) = -\left(\frac{x_2}{L_2}\right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}).$$

В области, расположенной между кривыми γ_{H} и осью Ox_1 , справедлива оценка $x_2 = \theta(x_1^{l_2+1})$. Подставляя в (3.23), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2} &= -(1+\theta(x_1)) \left(\theta(x_1^{l_2}) - L_2(-x_1)^{l_2-1} \right) \frac{1}{x_1} - \theta(1) \frac{1}{2} \left(\theta(x_1^{l_2}) - L_2(-x_1)^{l_2-1} \right)^2 \\ &= L_2(-x_1)^{l_2-2} + \theta(x_1^{l_2-1}). \end{aligned}$$

Интегрируя вдоль линии $x_1 = \text{const}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{C}{A_2^2}(x_1, 0) &= -\frac{b}{n!}(-x_1)^{n-2} + \theta(x_1^{n-1}) = \int_{\chi_{\text{B}}(x_1)}^0 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(x_1, \tau) d\tau = \\ &= -\chi_{\text{B}}(x_1)(L_2(-x_1)^{l_2-2} + \theta(x_1^{l_2-1})). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \chi_{\text{B}}(x_1) &= \frac{b}{n!L_2}(-x_1)^{n-l_2} + \theta(x_1^{n-l_2+1}), \\ \chi_{\text{B}}^*(x_2) &= -\left(-\frac{n!L_2}{b}\right)^{\frac{1}{n-l_2}} (-x_2)^{\frac{1}{n-l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{n-l_2}}). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $F(x_2, \vartheta) = \int_{\vartheta\chi_{\text{B}}^*(x_2)}^{\chi_{\text{H}}^*(x_2)} \frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) dx_1$. Пусть ϑ меняется в интервале $[1, 2^{n-l_2}\sqrt{\frac{n-1}{l_2-1}}]$, тогда $\vartheta = \Theta(1)$. Подставляя разложение для $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}$,

НАХОДИМ

$$\begin{aligned}
F &= \int_{\vartheta\chi_B^*(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \left(\int_0^{x_2} \frac{\partial C}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(x_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_2 + \frac{C}{A_2^2}(x_1, 0) \right) dx_1 = \\
&= \int_{\vartheta\chi_B^*(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \int_0^{x_2} \left(-(1+\theta(x_1)) \frac{\bar{x}_2 - x_{2m}(x_1)}{x_1^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x}_2 - x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 \theta(1) \right) d\bar{x}_2 dx_1 \\
&\quad + \int_{\vartheta\chi_B^*(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \left(-\frac{b}{n!} (-x_1)^{n-2} + \theta(x_1^{n-1}) \right) dx_1 = \\
&= \int_{\vartheta\chi_B^*(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \int_0^{x_2} \left(-\frac{\bar{x}_2}{x_1^2} + \frac{L_2(-x_1)^{l_2}}{x_1^2} + \theta(x_1^{l_2-1}) + \theta(x_1) \frac{\theta(x_1^{l_2})}{x_1^2} + \frac{\theta(x_1^{2l_2})}{x_1^2} \right) d\bar{x}_2 dx_1 \\
&\quad + \frac{b}{n!(n-1)} \left((-\chi_H^*(x_2))^{n-1} - (-\vartheta\chi_B^*(x_2))^{n-1} \right) + \theta((\chi_B^*(x_2))^n) = \\
&= \frac{x_2^2}{2} \left(\frac{1}{\chi_H^*(x_2)} - \frac{1}{\vartheta\chi_B^*(x_2)} \right) - \frac{L_2}{l_2-1} x_2 \left((-\chi_H^*(x_2))^{l_2-1} - (-\vartheta\chi_B^*(x_2))^{l_2-1} \right) + \\
&\quad + x_2 \theta((\chi_B^*(x_2))^{l_2}) - \frac{b}{n!(n-1)} \vartheta^{n-1} (-\chi_B^*(x_2))^{n-1} + \theta((-x_2)^{\min\{\frac{n-1}{l_2}, \frac{n}{n-l_2}\}}) = \\
&= \theta((-x_2)^{2-\frac{1}{l_2}}) + \frac{L_2}{l_2-1} x_2 \vartheta^{l_2-1} (-\chi_B^*(x_2))^{l_2-1} + \theta((-x_2)^{\min\{1+\frac{l_2-1}{l_2}, 1+\frac{l_2}{n-l_2}, \frac{n}{n-l_2}\}}) \\
&\quad - \frac{b}{n!(n-1)} \vartheta^{n-1} (-\chi_B^*(x_2))^{l_2-1} \left(-\frac{n!L_2}{b} (-x_2) + \theta((-x_2)^{1+\frac{1}{n-l_2}}) \right) = \\
&= L_2 x_2 \vartheta^{l_2-1} (-\chi_B^*(x_2))^{l_2-1} \left(\frac{1}{l_2-1} - \vartheta^{n-l_2} \frac{1}{n-1} \right) + \theta((-x_2)^{\min\{\frac{n}{n-l_2}, 2-\frac{1}{l_2}\}}) = \\
&= \Theta((-x_2)^{\frac{n-1}{n-l_2}}) \left(\frac{1}{l_2-1} - \vartheta^{n-l_2} \frac{1}{n-1} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{n-l_2}}) + \theta((-x_2)^{2-\frac{1}{l_2}-\frac{n-1}{n-l_2}}) \right).
\end{aligned}$$

Уравнение (3.26) преобразуется в

$$\frac{n-1}{l_2-1} - \left(\frac{x_{1\beta}(x_2)}{\chi_B^*(x_2)} \right)^{n-l_2} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{n-l_2}}) + \theta((-x_2)^{2-\frac{1}{l_2}-\frac{n-1}{n-l_2}}) = 0.$$

Имеем

$$2 - \frac{1}{l_2} - \frac{n-1}{n-l_2} = \frac{nl_2 - 2l_2^2 + 2l_2 - n}{l_2(n-l_2)} = \frac{(l_2-1)(n-2l_2)}{l_2(n-l_2)} \geq \frac{1}{l_2(n-l_2)},$$

$$\Rightarrow \frac{x_{1\beta}(x_2)}{\chi_B^*(x_2)} = {}^{n-l_2}\sqrt{\frac{n-1}{l_2-1}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2(n-l_2)}}),$$

$$x_{1\beta}(x_2) = - {}^{n-l_2}\sqrt{-\frac{n!L_2}{b} \frac{n-1}{l_2-1}} (-x_2)^{\frac{1}{n-l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{n-l_2} + \frac{1}{l_2(n-l_2)}}).$$

Докажем неравенство (3.22). Используя разложения функций $\frac{\partial C}{\partial x_2 A_2^2}$ и $\frac{C}{A_2^2}$, находим

$$\begin{aligned} & \int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \frac{\partial C}{\partial x_2 A_2^2}(x_1, x_2) dx_1 - \frac{A_1 C}{A_2 A_2^2}(x_{1\beta}(x_2), x_2) = \\ & = \int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \left(-(1 + \theta(x_1)) \left(\frac{x_2}{x_1^2} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1^2} \right) - \theta(1) \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 \right) dx_1 + \\ & + \theta(1) \left(\Theta((x_{1\beta}(x_2))^{l_1}) - \Theta(1) \left(\frac{x_2}{x_{1\beta}(x_2)} - \frac{x_{2m}(x_{1\beta}(x_2))}{x_{1\beta}(x_2)} \right)^2 \right) = \\ & = \int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_H^*(x_2)} \left(-\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{L_2(-x_1)^{l_2}}{x_1^2} + \theta(x_1^{l_2-1}) \right) dx_1 + \theta((-x_2)^{\frac{l_1}{n-l_2}}) + \left(\theta((-x_2)^{\frac{l_2-1}{n-l_2}}) \right)^2 \\ & = x_2 \left(\frac{1}{\chi_H^*(x_2)} - \frac{1}{x_{1\beta}(x_2)} \right) - \frac{L_2}{l_2-1} \left((-\chi_H^*(x_2))^{l_2-1} - (-x_{1\beta}(x_2))^{l_2-1} \right) + \theta((-x_2)^{\frac{l_2}{n-l_2}}) \\ & = \theta((-x_2)^{\min\{1-\frac{1}{l_2}, \frac{l_2-1}{l_2}\}}) - \Theta((-x_2)^{\frac{l_2-1}{n-l_2}}) + \theta((-x_2)^{\frac{l_2}{n-l_2}}) = -\Theta((-x_2)^{\frac{l_2-1}{n-l_2}}) < 0. \end{aligned}$$

2. $l_1 = 2l_2 - 2 = n - 2$, $L_1 = \frac{1}{2}L_2^2 - \frac{b}{n!}$. Из уравнения (3.24) следует

$$\begin{aligned} \chi_H(x_1) &= L_2(-x_1)^{l_2} + \theta((-x_1)^{l_2+1}) - \sqrt{2L_1}(-x_1)^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_1)^{\frac{l_1+4}{2}}) = \\ &= (L_2 - \sqrt{2L_1})(-x_1)^{l_2} + \theta((-x_1)^{l_2+1}), \\ \chi_B(x_1) &= L_2(-x_1)^{l_2} + \theta((-x_1)^{l_2+1}) + \sqrt{2L_1}(-x_1)^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_1)^{\frac{l_1+4}{2}}) = \\ &= (L_2 + \sqrt{2L_1})(-x_1)^{l_2} + \theta((-x_1)^{l_2+1}). \end{aligned}$$

Обратные к χ_H, χ_B, x_{2m} функции имеют вид

$$\chi_H^*(x_2) = - \left(\frac{x_2}{L_2 - \sqrt{2L_1}} \right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}),$$

$$\chi_B^*(x_2) = - \left(\frac{x_2}{L_2 + \sqrt{2L_1}} \right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}), \quad x_{1m}(x_2) = - \left(\frac{x_2}{L_2} \right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}).$$

Таким образом, $\frac{\chi_{\text{H}}^*(x_2)}{x_{1m}(x_2)} = \sqrt[l_2]{\frac{L_2}{L_2 - \sqrt{2L_1}}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}})$, $\frac{\chi_{\text{B}}^*(x_2)}{x_{1m}(x_2)} = \sqrt[l_2]{\frac{L_2}{L_2 + \sqrt{2L_1}}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}})$.
 Обозначим соотношение $\frac{\chi_{\text{H}}^*(x_2)}{x_{1m}(x_2)}$ через ϑ_{H} , а соотношение $\frac{\chi_{\text{B}}^*(x_2)}{x_{1m}(x_2)}$ — через ϑ_{B} .

Рассмотрим функцию $F(x_2, \vartheta) = \int_{\chi_{\text{H}}^*(x_2)}^{\vartheta x_{1m}(x_2)} \frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) dx_1$. Пусть ϑ меняется в интервале $[1, M]$, где M — достаточно большая константа, не зависящая от x_2 . Тогда $\vartheta = \Theta(1)$. Подставляя разложение для $\frac{C}{A_2^2}$, находим

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta} \frac{C}{A_2^2}(\tau x_{1m}(x_2), x_2) d(\tau x_{1m}(x_2)) = \\
 &= x_{1m}(x_2) \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta} \left(f_m(\tau x_{1m}(x_2)) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - x_{2m}(\tau x_{1m}(x_2))}{\tau x_{1m}(x_2)} \right)^2 f_0(\tau x_{1m}(x_2), x_2) \right) d\tau \\
 &= \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta} \left(-L_1 \tau^{l_1} (-x_{1m}(x_2))^{l_1+1} + \theta((-x_2)^{\frac{l_1+2}{l_2}}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}})}{2\tau^2 x_{1m}(x_2)} \left(x_2 - \tau^{l_2} x_2 + \theta((-x_2)^{\frac{l_2+1}{l_2}}) \right)^2 \right) d\tau = \\
 &= \frac{x_2^2}{x_{1m}(x_2)} \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta} \left(L_1 \tau^{l_1} \frac{(-x_{1m}(x_2))^{2l_2}}{x_2^2} - \frac{1}{2\tau^2} (1 - \tau^{l_2})^2 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right) d\tau = \\
 &= \frac{x_2^2}{2x_{1m}(x_2)} \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta} \left(\frac{2L_1}{L_2^2} \tau^{2l_2-2} - \frac{1}{\tau^2} + 2\tau^{l_2-2} - \tau^{2l_2-2} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right) d\tau = \\
 &= \frac{x_2^2}{2x_{1m}(x_2)} \left[\frac{1}{\vartheta} + \frac{2}{l_2 - 1} \vartheta^{l_2-1} + \frac{2L_1 - L_2^2}{L_2^2(2l_2 - 1)} \vartheta^{2l_2-1} - \left(\frac{L_2}{L_2 - \sqrt{2L_1}} \right)^{-\frac{1}{l_2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{l_2 - 1} \left(\frac{L_2}{L_2 - \sqrt{2L_1}} \right)^{\frac{l_2-1}{l_2}} - \frac{2L_1 - L_2^2}{L_2^2(2l_2 - 1)} \left(\frac{L_2}{L_2 - \sqrt{2L_1}} \right)^{\frac{2l_2-1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right].
 \end{aligned}$$

Имеем $\frac{x_2^2}{2x_{1m}(x_2)} < 0$, $\frac{2L_1 - L_2^2}{L_2^2(2l_2 - 1)} < 0$. Следовательно, коэффициент перед старшим членом положителен, и при достаточно больших ϑ имеем $F(x_2, \vartheta) > 0$. Выберем M так, что $F(x_2, \vartheta) > 0$ для всех $\vartheta \leq M$. При $\vartheta = 1$ имеем $F(x_2, \vartheta) < 0$, так как $\frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) < 0$ на интервале $x_1 \in (x_{1m}(x_2), \chi_{\text{H}}^*(x_2))$.

Значение $x_{1\beta}(x_2)$ определяется уравнением (3.26), т.е. $F(x_2, \frac{x_{1\beta}(x_2)}{x_{1m}(x_2)}) = 0$. Из вышесказанного следует, что $\frac{x_{1\beta}(x_2)}{x_{1m}(x_2)} \in (\vartheta_{\text{B}}, M)$. Обозначим соотношение $\frac{x_{1\beta}(x_2)}{x_{1m}(x_2)}$

через ϑ_β . Имеем

$$\begin{aligned}\vartheta_\beta \vartheta_{\text{H}} > \vartheta_{\text{B}} \vartheta_{\text{H}} &= \sqrt[l_2]{\frac{L_2}{L_2 - \sqrt{2L_1}} \frac{L_2}{L_2 + \sqrt{2L_1}}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) = \\ &= \sqrt[l_2]{\frac{L_2^2}{L_2^2 - 2L_1}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) > 1. \quad (3.27)\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $F'(x_2) = \int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_{\text{H}}^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) dx_1$. Подставляя под интеграл разложение (3.23) и используя (3.27) и неравенство между арифметическим и геометрическим средним, находим

$$\begin{aligned}F' &= -x_{1m}(x_2) \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta_\beta} \left(-f_0(\tau x_{1m}(x_2), x_2) \left(\frac{x_2 - x_{2m}(\tau x_{1m}(x_2))}{\tau^2(x_{1m}(x_2))^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - x_{2m}(x_1)}{\tau x_{1m}(x_2)} \right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2}(\tau x_{1m}(x_2), x_2) \right) d\tau = \\ &= \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta_\beta} \left((1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}})) \left(\frac{x_2 - \tau^{l_2} x_2 + \theta((-x_2)^{1+\frac{1}{l_2}})}{\tau^2 x_{1m}(x_2)} \right) - \theta((-x_2)^{2-\frac{1}{l_2}}) \right) d\tau \\ &= -\frac{x_2}{x_{1m}(x_2)} \int_{\vartheta_{\text{H}}}^{\vartheta_\beta} \left(-\frac{1}{\tau^2} + \tau^{l_2-2} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right) d\tau = \\ &= -\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) \left(\frac{1}{\vartheta_\beta} - \frac{1}{\vartheta_{\text{H}}} + \frac{1}{l_2-1} (\vartheta_\beta^{l_2-1} - \vartheta_{\text{H}}^{l_2-1}) + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right) = \\ &= -\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) \frac{\vartheta_\beta - \vartheta_{\text{H}}}{\vartheta_\beta \vartheta_{\text{H}}} \left(-1 + \vartheta_\beta \vartheta_{\text{H}} \frac{\sum_{i=0}^{l_2-2} \vartheta_\beta^{l_2-2-i} \vartheta_{\text{H}}^i}{l_2-1} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right) = \\ &= -\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) - \Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) \left(-1 + (\vartheta_\beta \vartheta_{\text{H}})^{\frac{l_2}{2}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) \right) = \\ &= -\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}).\end{aligned}$$

Докажем неравенство (3.22). Используя разложение для функции $\frac{C}{A_2^2}$, находим

$$\begin{aligned}&\int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_{\text{H}}^*(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau - \frac{A_1}{A_2} \frac{C}{A_2^2}(x_{1\beta}(x_2), x_2) = \\ &= -\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) - \theta(1) \left(-\Theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}}) - \Theta(1) \left(-\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) \right)^2 \right) = \\ &= -\Theta((-x_2)^{1-\frac{1}{l_2}}) + \theta((-x_2)^{2-\frac{2}{l_2}}) < 0.\end{aligned}$$

3. $l_1 \geq 2l_2 - 1 = n - 1$, $\frac{1}{2}L_2^2 = \frac{b}{n!}$. Из уравнения (3.24) следует

$$\chi_{\text{H}}(x_1) = x_{2m}(x_1) - \sqrt{2L_1}(-x_1)^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_1)^{\frac{l_1+4}{2}}) = L_2(-x_1)^{l_2} + \theta((-x_1)^{l_2+\frac{1}{2}}).$$

Инвертируя функции χ_{H}, x_{2m} , получаем

$$\chi_{\text{H}}^*(x_2) = -(-L_2)^{-\frac{1}{2}}(-x_2)^{\frac{1}{2}} + \theta((-x_2)^{\frac{3}{2l_2}}), \quad x_{1m}(x_2) = -\left(\frac{x_2}{L_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}).$$

Таким образом, для всех точек x_1 из интервала $(4x_{1m}(x_2) - 3\chi_{\text{H}}^*(x_2), \chi_{\text{H}}^*(x_2))$ справедлива оценка $x_1 = -(-L_2)^{-\frac{1}{2}}(-x_2)^{\frac{1}{2}} + \theta((-x_2)^{\frac{3}{2l_2}})$, а для производной аналитической функции x_{2m} — оценка

$$\begin{aligned} \frac{dx_{2m}(x_1)}{dx_1} &= -l_2 L_2 (-x_1)^{l_2-1} + \theta((-x_1)^{l_2}) = \\ &= -l_2 L_2 (-L_2)^{-\frac{l_2-1}{l_2}} (-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{1-\frac{1}{2l_2}}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} x_2 - x_{2m}(\chi_{\text{H}}^*(x_2)) &= \chi_{\text{H}}(\chi_{\text{H}}^*(x_2)) - x_{2m}(\chi_{\text{H}}^*(x_2)) = \\ &= -\sqrt{2L_1}(-\chi_{\text{H}}^*(x_2))^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-\chi_{\text{H}}^*(x_2))^{\frac{l_1+4}{2}}) = \\ &= -\sqrt{2L_1}[(-L_2)^{-\frac{1}{2}}(-x_2)^{\frac{1}{2}} + \theta((-x_2)^{\frac{3}{2l_2}})]^{\frac{l_1+2}{2}} + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2}\frac{l_1+4}{2}}) \\ &= -\sqrt{2L_1}(-L_2)^{-\frac{l_1+2}{2l_2}}(-x_2)^{\frac{l_1+2}{2l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{l_1+3}{2l_2}}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} x_2 - x_{2m}(\chi_{\text{H}}^*(x_2)) &= x_{2m}(x_{1m}(x_2)) - x_{2m}(\chi_{\text{H}}^*(x_2)) = (x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2)) \frac{dx_{2m}}{dx_1}(\xi) \\ &= (x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2)) \left(l_2 (-L_2)^{\frac{1}{2}} (-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{1-\frac{1}{2l_2}}) \right). \end{aligned}$$

Здесь $\xi \in (x_{1m}(x_2), \chi_{\text{H}}^*(x_2))$ — промежуточная точка. Приравнявая оба выражения, находим

$$\begin{aligned} -\sqrt{2L_1}(-L_2)^{-\frac{l_1+2}{2l_2}}(-x_2)^{\frac{l_1+2}{2l_2}} &= \\ &= (x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2)) l_2 (-L_2)^{\frac{1}{2}} (-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}} (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})), \end{aligned}$$

$$x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2) = -\frac{\sqrt{2L_1}}{l_2} (-L_2)^{-\frac{l_1+4}{2l_2}} (-x_2)^{\frac{l_1-2l_2+4}{2l_2}} (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})).$$

Рассмотрим функцию $F(x_2, \vartheta) = \int_{\chi_H^*(x_2)}^{x_{1m}(x_2) + \vartheta(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))} \frac{C}{A_2^2}(x_1, x_2) dx_1$. Допустим, что ϑ меняется в интервале $[-1, 3]$, тогда $\vartheta = \theta(1)$. С помощью оценки (3.28) получаем

$$\begin{aligned} x_2 - x_{2m}(x_{1m}(x_2) + \vartheta(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))) &= \int_{x_{1m}(x_2) + \vartheta(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))}^{x_{1m}(x_2)} \frac{dx_{2m}}{dx_1} dx_1 = \\ &= -\vartheta(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))(l_2(-L_2)^{\frac{1}{l_2}}(-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{1-\frac{1}{2l_2}})). \end{aligned}$$

Обозначим $x_{1m}(x_2) + \tau(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))$ коротко через x_1 . Используя последний результат и подставляя разложение функции $\frac{C}{A_2^2}$, находим

$$\begin{aligned} F &= (x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2)) \int_{-1}^{\vartheta} \left(f_m(x_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 f_0(x_1, x_2) \right) d\tau = \\ &= (x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2)) \int_{-1}^{\vartheta} f_m \left(- \left(\frac{x_2}{L_2} \right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{3}{2l_2}}) \right) - (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})) * \\ &\quad * \frac{1}{2} \left(\frac{-\tau(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))(l_2(-L_2)^{\frac{1}{l_2}}(-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{1-\frac{1}{2l_2}}))}{- \left(\frac{x_2}{L_2} \right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{3}{2l_2}})} \right)^2 d\tau \\ &= (x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2)) \int_{-1}^{\vartheta} \left(L_1 \left(\frac{x_2}{L_2} \right)^{\frac{l_1}{l_2}} (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{\sqrt{2L_1}}{l_2} (-L_2)^{-\frac{l_1+4}{2l_2}} (-x_2)^{\frac{l_1-2l_2+4}{2l_2}} \right)^2 l_2^2 (-L_2)^{\frac{4}{l_2}} (-x_2)^{\frac{2l_2-4}{l_2}} (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})) \right) d\tau \\ &= (x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2)) L_1 \left(\frac{x_2}{L_2} \right)^{\frac{l_1}{l_2}} \left[(\vartheta + 1) - \frac{1}{3}(\vartheta^3 + 1) + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}}) \right] = \\ &= -\frac{1}{3}(\vartheta + 1)(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2)) L_1 \left(\frac{x_2}{L_2} \right)^{\frac{l_1}{l_2}} \left[\vartheta^2 - \vartheta - 2 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}}) \right]. \end{aligned}$$

Уравнение $\vartheta^2 - \vartheta - 2 = 0$ имеет решения -1 и 2 . Таким образом, уравнение (3.26), которое имеет вид $F(x_2, \frac{x_{1\beta}(x_2)}{x_{1m}(x_2)}) = 0$, задаёт соотношение $\vartheta_\beta = \frac{x_{1\beta}(x_2)}{x_{1m}(x_2)}$ в виде $\vartheta_\beta = 2 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})$.

Докажем неравенство (3.22). Обозначая $x_{1m}(x_2) + \tau(x_{1m}(x_2) - \chi_H^*(x_2))$ коротко

через x_1 , находим

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{1\beta}(x_2)}^{\chi_{\text{H}}^*(x_2)} \frac{\partial C}{\partial x_2} \frac{C}{A_2^2}(\tau, x_2) d\tau - \frac{A_1 C}{A_2 A_2^2}(x_{1\beta}(x_2), x_2) = (x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2)) * \\
& * \int_{-1}^{\vartheta_\beta} \left((1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}})) \frac{x_2 - x_{2m}(x_1)}{x_1^2} + \theta(1) \left(\frac{x_2 - x_{2m}(x_1)}{x_1} \right)^2 \right) d\tau \\
& - \theta(1) \left(f_m(x_{1\beta}(x_2)) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - x_{2m}(x_{1\beta}(x_2))}{x_{1\beta}(x_2)} \right)^2 (1 + \theta(x_{1\beta}(x_2))) \right) = \\
& = -\Theta((-x_2)^{\frac{l_1-2l_2+4}{2l_2}}) \int_{-1}^{\vartheta_\beta} \left(\left(\frac{-\tau(x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2))l_2(-L_2)^{\frac{1}{l_2}}(-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}}}{\left(-\left(\frac{x_2}{L_2}\right)^{\frac{1}{l_2}} (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})) \right)^2} \right) * \right. \\
& \left. * (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{l_2}})) + \theta(1) \left(\frac{-\tau(x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2))l_2(-L_2)^{\frac{1}{l_2}}(-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}}}{-\left(\frac{x_2}{L_2}\right)^{\frac{1}{l_2}} (1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}}))} \right)^2 \right) d\tau \\
& - \theta \left(\Theta((-x_2)^{\frac{l_1}{l_2}}) - \left(\frac{-(2 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}}))(x_{1m}(x_2) - \chi_{\text{H}}^*(x_2))l_2(-L_2)^{\frac{1}{l_2}}(-x_2)^{\frac{l_2-1}{l_2}}}{\sqrt{2} \left(-\left(\frac{x_2}{L_2}\right)^{\frac{1}{l_2}} + \theta((-x_2)^{\frac{2}{l_2}}) \right)} \right)^2 \right) \\
& = -\Theta((-x_2)^{\frac{l_1-2l_2+4}{2l_2}}) \left(\int_{-1}^2 \left((1 + \theta((-x_2)^{\frac{1}{2l_2}})) \tau \sqrt{2L_1}(-L_2)^{-\frac{l_1-2}{2l_2}}(-x_2)^{\frac{l_1-2}{2l_2}} \right) d\tau \right. \\
& \left. + \theta((-x_2)^{\frac{l_1-1}{2l_2}}) \right) - \theta((-x_2)^{\frac{l_1}{l_2}}) = -\Theta((-x_2)^{\frac{2l_1-2l_2+2}{2l_2}}) + \theta((-x_2)^{\frac{2l_1-2l_2+3}{2l_2}}) < 0.
\end{aligned}$$

Оценка $x_2 = \theta(x_1^2)$ следует из неравенств $\chi(x_1) < x_2 < 0$, справедливых на γ_β .

Утверждение 3.27 доказано. \square

По определению функции ω_{OC} для любого $u \in \mathbf{R}$ имеем

$$D_{A+uB}\omega_{\text{OC}} = F + (u - 1)H_{1\text{OC}}. \quad (3.29)$$

Утверждение 3.28. На кривой γ_α справедливо неравенство $\omega_{\text{Oб}} - \omega_{\text{OC}} < 0$.

Доказательство: В силу утверждения 3.25 на кривой γ_α имеем оценку $\frac{dx_2}{dx_1} = \theta(\sqrt{-x_1})$. Так как функция $x_2(x_1)$, задающая кривую γ_α , отрицательная для $x_1 < 0$, имеем в силу утверждения 3.25 $\frac{dx_2}{dx_1} > 0$. Отсюда следует, что γ_α

является допустимой траекторией управляемой системы 3.2 с некоторым управлением $u(x_1) \in (0, 1)$. Параметризуем γ_α временем t . В силу уравнений (3.19), (3.29) имеем

$$\frac{d(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})}{dt} = D_{A+uB}(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}) = F + uH_{10\delta} - (F + (u-1)H_{10\epsilon}) = (1-u)H_{10\epsilon} > 0.$$

Отсюда следует $\frac{d(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})}{dx_2} = \frac{H_{10\epsilon}}{A_2} > 0$ и $(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})(x_2) = - \int_{x_2}^0 \frac{d(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})}{dx_2} d\tau < 0$. \square

Утверждение 3.29. *На кривой γ_β справедливо неравенство $\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon} > 0$.*

Доказательство: В силу утверждения 3.27 кривая γ_β является допустимой траекторией управляемой системы 3.2 с некоторым управлением $u(x_1) \in (0, 1)$. Параметризуем γ_β временем t . Так как кривая γ_β лежит между γ_α и $\rho_{010\delta}$, на этой кривой имеем $H_{10\delta} < 0$.

На γ_β имеем в силу уравнений (3.19), (3.29)

$$\frac{d(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})}{dt} = D_{A+uB}(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}) = F + uH_{10\delta} - (F + (u-1)H_{10\epsilon}) = uH_{10\delta} < 0.$$

Отсюда $\frac{d(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})}{dx_2} = \frac{u}{1-u} \frac{H_{10\delta}}{A_2} < 0$ и $(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})(x_2) = - \int_{x_2}^0 \frac{d(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon})}{dx_2} d\tau > 0$. \square

Таким образом, на любой кривой, соединяющей γ_α и γ_β , лежат точки, в которых $\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon} = 0$.

Утверждение 3.30. *Множество точек, расположенных между γ_α и γ_β , в которых выполнено соотношение $\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon} = 0$, образует дифференцируемую кривую ρ_d . Кривая ρ_d является допустимой траекторией управляемой системы 3.2 с управлением $u \in (0, 1)$, приходящей в точку \tilde{x} .*

Доказательство: В области, расположенной между γ_α и γ_β , имеем $H_{10\delta} < 0$, $H_{10\epsilon} > 0$. Поэтому управление $\hat{u} = \frac{H_{10\epsilon}}{H_{10\epsilon} - H_{10\delta}}$ лежит в интервале $(0, 1)$.

Вычислим производную выражения $\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}$ по направлению $A + uB$:

$$\begin{aligned} D_{A+uB}(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}) &= F + uH_{10\delta} - (F + (u-1)H_{10\epsilon}) \\ &= u(H_{10\delta} - H_{10\epsilon}) + H_{10\epsilon} \\ &= (u - \hat{u})(H_{10\delta} - H_{10\epsilon}). \end{aligned}$$

Таким образом, $D_{A+uB}(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}) < 0$ в случае $u > \hat{u}$, $D_{A+uB}(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}) > 0$ в случае $u < \hat{u}$, и $D_{A+uB}(\omega_{0\delta} - \omega_{0\epsilon}) = 0$ в случае $u = \hat{u}$.

Пусть p является точкой, расположенной между γ_α и γ_β , в которой $\omega_{об} - \omega_{ос} = 0$. Рассмотрим траекторию ρ_d векторного поля $A + \hat{u}B$, проходящую через точку p . Ясно, что всюду на ρ_d выполняется $\omega_{об} - \omega_{ос} = 0$, и ρ_d не может пересечь ни кривую γ_α , ни γ_β . Следовательно, траектория ρ_d стыкуется с точкой \tilde{x} .

Рассмотрим траекторию векторного поля $A + B$, проходящую через произвольную точку p' на кривой ρ_d . На этой траектории имеем $u = 1$, следовательно, $\frac{d}{dt}(\omega_{об} - \omega_{ос}) < 0$. Поэтому p' является единственной точкой на этой траектории, в которой $\omega_{об} - \omega_{ос} = 0$. Так как траектории поля $A + B$, проходящие через точки кривой ρ_d , заматают всю область между кривыми γ_α и γ_β , то любая точка, в которой $\omega_{об} - \omega_{ос} = 0$, лежит на ρ_d . \square

Определим в окрестности U скалярную функцию ω . В области между кривыми ρ_d и γ_H положим $\omega = \omega_{ос}$, в области между кривыми ρ_d и $\rho_{01об}$ положим $\omega = \omega_{об}$. В оставшейся области определим ω следующим образом.

Рассмотрим траектории системы (3.6), соединяющие кривые $\hat{\rho}_{01об}$ и $\hat{\rho}_{10об}$, и траектории системы (3.8), соединяющие кривые $\hat{\rho}_{10об}$ и $\hat{\gamma}_H$ в расширенном фазовом пространстве. В силу утверждения 3.22 совокупность этих траекторий образует локальное сечение, накрывающее оставшуюся область. В силу утверждения 2.35 функция ψ , определяемая этим сечением, имеет потенциал ω . Отнормируем его условием $\omega(\tilde{x}) = 0$. По определению функция ω на кривой γ_H совпадает с $\omega_{ос}$, а на кривой $\rho_{01об}$ — с $\omega_{об}$.

Следовательно, функция ω непрерывна в окрестности U . Из её определения следует, что она удовлетворяет уравнению Беллмана для синтеза, описанного в теореме 3.4. Это доказывает оптимальность этого синтеза. Определение синтеза непротиворечиво в силу утверждений 3.22, 3.3 и 3.30. Теорема 3.4 доказана.

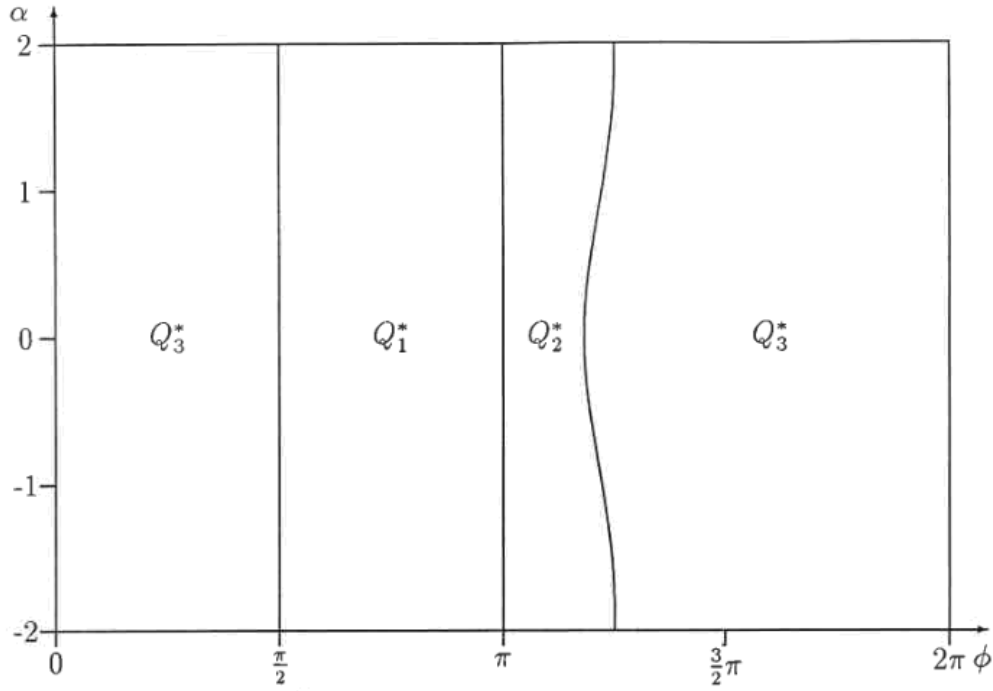


Рис. 6: Линии бифуркаций в пространстве параметров

4 Результаты

Мы поставили себе целью классифицировать системы (0.1),(0.2) по отношению топологической эквивалентности оптимальных синтезов в случае общего положения. В главе 1 мы свели эту проблему к исследованию систем (2.2),(2.1), задающихся четвёрками функций (A, B, F, G) , струи $p(A, B, F, G)$ которых лежат в множестве Q^* . Это множество представляет собой двумерное многообразие, гомеоморфное $\mathbf{R} \times S^1$ и параметризованное переменными $\alpha \in (-2, 2)$, $\phi \in [0, 2\pi)$. В случае общего положения тип синтеза определяется значениями этих двух параметров.

Определим на Q^* три открытые области (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} Q_1^* &= \{(\alpha, \phi) \mid \frac{\pi}{2} < \phi < \pi\}, \\ Q_2^* &= \{(\alpha, \phi) \mid \pi < \phi < \tilde{\phi}(\alpha)\}, \\ Q_3^* &= \{(\alpha, \phi) \mid \phi \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\tilde{\phi}(\alpha), 2\pi)\}. \end{aligned}$$

Объединение $\bigcup_i Q_i^*$ плотно в Q^* и определяет случай общего положения в Q .

Обозначим через S множество четвёрок функций (A, B, F, G) класса C^3 , определённых в некоторой окрестности U' точки \tilde{x} и удовлетворяющих условиям

- i) $A(\tilde{x}) = 0$,
- ii) $(\frac{1}{2}\text{tr}(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x})))^2 - \det(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{x})) < 0$,
- iii) $B(\tilde{x}) \neq 0$,
- iv) $F(\tilde{x}) = G(\tilde{x}) = 0$,
- v) $\nabla F(\tilde{x}) = 0$,

Каждой четвёрке функций сопоставим в соответствие числа

$$\alpha = \left[\frac{\text{tr} \frac{\partial A}{\partial x}}{\sqrt{\det \frac{\partial A}{\partial x}}} \right] (\tilde{x}),$$

$$s = \left[B^T \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} B - 2 \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} B \right] (\tilde{x}),$$

$$c = \left[-\det \frac{\partial A}{\partial x} \left(B^T \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{-1} \right)^T \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} \frac{\partial A}{\partial x}^{-1} B - 2 \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x}^{-1} B \right] (\tilde{x}).$$

Если числа s и c не равны одновременно нулю, что однозначно определены такие числа $r > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$, что $s = r \sin \phi$, $c = r \cos \phi$.

Обозначим через S_i , $i = 1, 2, 3$ множество четвёрок из S , для которых соответствующие числа α, ϕ лежат в множестве Q_i^* , $i = 1, 2, 3$ соответственно. Множества S_i открыты и их объединение плотно в S . Результаты глав 1 и 2 можно подытожить в следующей теореме.

Теорема: Пусть дана задача (0.1), (0.2), задаваемая четвёркой функций $(A, B, F, G) \in S$.

Если $(A, B, F, G) \in S_1$, то оптимальный синтез в некоторой окрестности U точки \tilde{x} существует и имеет следующий вид. Имеются кривая переключения s и $u = 1$ на $u = 0$ и одномерный особый режим, стыкующиеся в точке \tilde{x} и разделяющие окрестность U на две области, в которых управления 0 и 1 соответственно оптимальны. Имеется в точности одна траектория, которая за конечное время попадает в точку \tilde{x} . Все другие траектории вначале за конечное время выходят на особый режим и по нему асимптотически приближаются к \tilde{x} . Особый режим, включая \tilde{x} , имеет первый порядок.

Если $(A, B, F, G) \in S_2$, то оптимальный синтез в некоторой окрестности U точки \tilde{x} существует и имеет следующий вид. Имеются две кривые переключения s и $u = 1$ на $u = 0$ и s и $u = 0$ на $u = 1$ соответственно, стыкующиеся в точке \tilde{x} и разделяющие окрестность U на две области, где управления 0 и 1 соответственно оптимальны. Траектории попеременно пересекают кривые переключения, чередуя управление, и по спирали наматываются на точку \tilde{x} . Последняя является особым режимом первого порядка. Весь процесс занимает

бесконечное время, при этом длины интервалов применения управления 1 убывают со скоростью геометрической прогрессии, а длины интервалов применения управления 0 стремятся к фиксированному положительному значению. Расстояние до точки \tilde{x} также сокращается со скоростью геометрической прогрессии.

Если $(A, B, F, G) \in S_3$, то оптимального синтеза в окрестности \tilde{x} не существует, и инфимум функционала J равен $-\infty$.

Для любых двух систем, принадлежащих одновременно либо множеству S_1 , либо множеству S_2 , существует гомеоморфизм окрестностей точки \tilde{x} , переводящий оптимальный синтез одной системы в оптимальный синтез другой. В этом смысле системы из множеств S_1 и S_2 структурно стабильны. \square

Во всех других задачах (0.1), (0.2) из множества S структура синтеза зависит от членов более высокого порядка в разложениях Тейлора функций A, B, F, G в точке \tilde{x} . Но в случае общего положения тип решения определяется инвариантами α, ϕ .

Замечание: Гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, можно выбрать непрерывно дифференцируемым тогда и только тогда, когда значения параметров α и ϕ у рассматриваемых систем совпадают.

Замечание: Области Q_i^* инвариантны относительно замены $\alpha \rightarrow -\alpha$. Это имеет следующую причину. Оптимальный синтез задаётся лежандровым сечением в кокасательном расслоении T^*X , определяющем сопряжённые переменные ψ как функции от x . Для траекторий на этом сечении точка \tilde{x} является ω -предельной. Но наряду с этим сечением существует ещё одно лежандрово сечение, для которого точка \tilde{x} является α -предельной. При инверсии направления времени эти два сечения переходят друг в друга. Это преобразование индуцирует дискретную симметрию $\alpha \rightarrow -\alpha$ в пространстве орбит Q .

Из результатов, полученных в главе 3, вытекает следующая теорема.

Теорема: Положим, что дана задача (0.1), (0.2), задаваемая четвёркой аналитических функций (A, B, F, G) из множества S . Пусть величина ϕ , сопоставленная этой четвёрке, равна π . Тогда оптимальный синтез в некоторой окрестности U точки \tilde{x} существует и имеет структуру одного из следующих типов:

а) Имеется особый режим γ_n , по которому фазовая точка за конечное время попадает в начало координат. Вектор B является касательным к γ_n в точке \tilde{x} . Кроме того, существует кривая переключения ρ_{10} с управления $u = 1$ на $u = 0$, расположенная трансверсально к γ_n и стыкующаяся в \tilde{x} с γ_n . Траектории, исходящие из ρ_{10} , за конечное время попадают на γ_n . Оставшаяся часть окрестности U заполнена траекториями с управлением $u = 1$, которые попадают либо на кривую ρ_{10} , либо на γ_n , а одна траектория — в

терминальную точку \tilde{x} .

б) Существует кривая переключения ρ_{01} с управления $u = 0$ на $u = 1$ и кривая переключения ρ_{10} с управления $u = 1$ на $u = 0$. Обе кривые стыкуются в точке \tilde{x} , при этом вектор V касается кривой ρ_{01} в точке \tilde{x} . Траектории системы оборачиваются вокруг \tilde{x} , попеременно пересекая кривые переключения и чередуя управление. Длины отрезков времени, в течение которых используется управление $u = 0$, стремятся к положительной постоянной величине, а длины отрезков времени, в течение которых используется управление $u = 1$, стремятся к нулю. С каждым оборотом фазовая точка приближается к началу координат.

в) Оптимальный синтез имеет вид, описанный в пункте б). Дополнительно имеется эквивокальный особый режим γ_n , стыкующийся в точке \tilde{x} с кривыми переключения. Вектор V касателен к γ_n в точке \tilde{x} .

г) Имеется особый режим γ_n , кривая переключения ρ_{01} с управления $u = 0$ на $u = 1$, кривая переключения ρ_{10} с управления $u = 1$ на $u = 0$, и кривая дисперсии ρ_d . Все кривые стыкуются в точке \tilde{x} . При этом вектор V в этой точке касателен к γ_n , ρ_{01} и ρ_d , и ρ_d лежит между γ_n и ρ_{01} . Из кривой ρ_d исходят два семейства траекторий с управлениями $u = 0$ и $u = 1$ соответственно. Траектории с управлением $u = 1$ без переключений управления попадают на особый режим γ_n , семейство траекторий с управлением $u = 0$ проходит поочередно кривые переключения ρ_{01} и ρ_{10} , претерпевая соответствующие переключения управления, а потом также попадает на γ_n . По γ_n фазовая точка за конечное время попадает в \tilde{x} . \square

Литература

- [1] Арнольд В.И. *Дополнительные главы дифференциальных уравнений*. Москва, Наука, 1975
- [2] Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва, Наука, 1975
- [3] Байтман М.М. *Кривые переключения на плоскости*. Дифференциальные Уравнения 14 (1978), №9, 1539-1551
- [4] Богданов Р.И. *Модули C^∞ -орбитальных нормальных форм особых точек векторных полей на плоскости*. Функциональный анализ и его приложения 11 (1977), №1, 57-58
- [5] Богданов Р.И. *Об особенностях векторных полей на плоскости*. Функциональный анализ и его приложения 11 (1977), №4, 72-73
- [6] Богданов Р.И. *Орбитальная эквивалентность особых точек векторных полей на плоскости*. Функциональный анализ и его приложения 10 (1976), №4, 81-82
- [7] Гробман Д.М. *Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений*. Доклады АН СССР 128 (1959), 880-881
- [8] Гробман Д.М. *Топологическая классификация окрестностей сингулярности в n -пространстве*. Мат. Сб. (Новая серия) 56 (98) (1962), 77-94
- [9] Елизаров П.М. *Орбитальная топологическая классификация аналитических дифференциальных уравнений в окрестности вырожденной элементарной особой точки в двумерной комплексной плоскости*. Труды семинара им. Петровского №13 (1988), 137-165
- [10] Житомирский М.Я. *Орбитальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений*. Вестник Харьковского Гос. Унив. 241, Мех. Управл. Динам. Систем, 1983, 74-75
- [11] Зеликин М.И., Зеликина Л.Ф., Хильдебранд Р. *Асимптотика оптимального синтеза для одного класса экстремальных задач*. Принято к печати в журнале Труды МИАН
- [12] *Математическая энциклопедия, т.1*. Советская энциклопедия, М., 1977, с. 570

- [13] Петровский И.Г. *О поведении интегральных кривых системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки*. Мат. Сб. (Новая серия) 41 (1934)
- [14] Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1961
- [15] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Наука, М., 1969
- [16] Belitskii G.R. *Functional equations and conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class*. Functional. Anal. Appl. 7 (1973), 268-277
- [17] Bogdanov R.I. *Singularities of vector fields on the plane with pointed direction*. Invent. Math. 54 (1979), no.3, 247-259
- [18] Bonnard B. *Feedback equivalence for nonlinear systems and the time optimal control problem*. SIAM J. Control Optimization 29 (1991), no.6, 1300-1321
- [19] Bonnard B. *Invariants in the feedback classification of nonlinear systems*. New Trends in Nonlinear Control Theory. Proc. Conf., Nantes 1988, Lecture notes in Control and Information Sciences 122, Springer, Berlin, 1989, 13-22
- [20] Bressan A., Piccoli B. *Structural stability for time-optimal planar syntheses*. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 3 (1997), no.3, 335-371
- [21] Brockett R.W. *Feedback invariants for nonlinear systems*. IFAC Congress, Vol.2, Helsinki, 1978, 1115-1120
- [22] Brockett R.W. *Some geometric questions in the theory of linear systems*. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-21 (1976), no.4, 449-455
- [23] Brunovský P. *A classification of linear controllable systems*. Kybernetika (Praha) 6 (1970), 173-187
- [24] Byrnes C.I., Falb P.L. *Applications of algebraic geometry in system theory*. Amer. J. Math. 101 (1979), no.2, 337-363
- [25] Davydov A.A. *Qualitative theory of Control Systems*. Providence, RI, 1991. (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 141)
- [26] Dayawansa W., Boothby W.M., Elliott D.L. *Global state and feedback equivalence of nonlinear systems*. Syst. Contr. Lett. 6 (1985), 229-234

- [27] Dieudonné J. *Grundzüge der modernen Analysis*. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971
- [28] Dumortier F. *Singularities of Vector Fields on the Plane*. J. Diff. Equations 23 (1977), 53-106
- [29] Fuller A.T. *Minimization of various performance indices for a system with bounded control*. Internat. J. Control 41 (1985), no.1, 1-37
- [30] Gardner R.B., Shadwick W.F. *Feedback equivalence of control systems*. Syst. Contr. Lett. 8 (1987), 463-465
- [31] Gonçalves J.B. *Invariant manifolds of a differentiable vector field*. Portugaliae Mathematica 50 (1993), no.4, 497-505
- [32] Grensted P.E.W., Fuller A.T. *Minimization of Integral- square-error for Nonlinear Control Systems of third and higher order*. Internat. J. Control 2 (1965), 33-73
- [33] Hadamard J.S. *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*. Bulletin de la Société mathématique de France, 1901
- [34] Hartman P. *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*. Proceedings of the AMS 11 (1960), 610-620
- [35] Hartman P. *On the local linearization of differential equations*. Proceedings of the AMS 14 (1963), 568-573
- [36] Heymann M. *Controllability subspaces and feedback simulation*. SIAM J. Control Optimization 14 (1976), no.4, 769-789
- [37] Hirsch M.W., Shub M., Pugh C. *Invariant manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 1015-1019
- [38] Hirsch M.W., Shub M., Pugh C. *Invariant manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 583, Springer, Berlin, 1977
- [39] Irwin M.C. *On the stable manifold theorem*. Bulletin of the London mathematical society 2 (1970), 196-198
- [40] Jakubczyk B. *Equivalence and invariants of nonlinear control systems*. Nonlinear controllability and optimal control, 177-218. Monographs and Textbooks Pure Appl. Math. 133, Dekker, NY, 1990

- [41] Jakubczyk B., Respondek W. *Feedback classification of analytic control systems in the plane*. Analysis of controlled dynamical systems (Lyon, 1990), pp. 263-273. Progr. Systems Control Theory 8, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991
- [42] Jakubczyk B., Respondek W. *Feedback equivalence of planar systems and stabilizability*. in Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control, eds. Kaashoek, van Schuppen, Ran. Proceedings MNTS-89, Amsterdam. Progress in Systems and Control Theory 4, Birkhäuser, Boston, 1990, 447-456
- [43] Kalman R.E. *Kronecker invariants and feedback*. Ordinary differential equations (Proc. Conf., Math. Res. Center, Naval Res. Lab., Washington, D.C., 1971), 459-471. Acad. Press, NY, 1972
- [44] Kang W., Krener A.J. *Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of nonlinear systems*. SIAM Journal on Control and Optimization 30 (1992), no.6, 1319-1337
- [45] Kelley, H.J. *A second variation test for singular extremals*. AIAA J.2 (1964) no.8, pp. 1380-1382
- [46] Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer M.G. *Singular extremals*. Topics in optimization, Acad. Press, N.Y., 1967, pp. 63-101
- [47] Kirchgraber U. *Als Poincaré, Hadamard und Perron die invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten*. Mathematische Semesterberichte 44 (1997), no.2, 153-171
- [48] Konyukhova N.B. *Stable Lyapunov manifolds for autonomous systems of nonlinear Ordinary differential equations*. Comp. Math. and Math. Phys. 34 (1994), no.10, 1179-1195
- [49] Krener A.J. *Approximate linearization by state feedback and coordinate change*. Systems Control Lett. 5 (1984), no. 3, pp. 181-185
- [50] Krener A.J. *Local approximation of Control systems*. J. Diff. Equations 19 (1975), 125-133
- [51] Krener A.J. *Feedback linearization*. Mathematical control theory, 66-98, Springer, NY, 1999
- [52] Krener A.J. *On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems*. SIAM Journal on Control 11 (1973), 670-676

- [53] Krener A.J., Kang W. *Degree two normal forms of control systems and the generalized Legendre Clebsch condition*. Analysis of controlled dynamical systems (Lyon, 1990), pp. 295-303. Progr. Systems Control Theory 8, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991
- [54] Mesterton-Gibbons M. *On the optimal policy for combining harvesting of predator and prey*. Natural Resource Modeling 3 (1988), no.1, 63-90
- [55] Morse A.S. *Structural invariants of linear multivariable systems*. SIAM J. Control 11 (1973), 446-465
- [56] Nitecki, Z. *Differentiable dynamics*. M.I.T. Press, Cambridge, 1971
- [57] O'Halloran J. *Feedback equivalents of constant linear systems*. Systems & Control Letters 8 (1987), 241-246
- [58] Perron O. *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen*. Mathematische Zeitschrift 29 (1929), 129-160
- [59] Poincaré H. *Œuvres, T. I.*, 1928, 202-204
- [60] Pomet J.-B., Kupka I. *Global Aspects of Feedback Equivalence for a Parametrized Family of Systems*. Analysis of controlled dynamical systems (Lyon, 1990), pp. 337-346. Progr. Systems Control Theory 8, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991
- [61] Popov V.M. *Invariant description of linear, time-invariant controllable systems*. SIAM J. Control 10 (1972), 252-264
- [62] Rosenbrock H.H. *State-space and multivariable theory*. Wiley, New York, 1970
- [63] Ruelle D. *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*. Acad. Press, Inc., Boston, MA, 1989
- [64] Sternberg S. *Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems*. Journal of Mathematics and Mechanics 10 (1961), 451-474
- [65] Sternberg S. *Local contractions and a theorem of Poincaré*. American Journal of Mathematics 79 (1957), 809-824
- [66] Sternberg S. *On the behaviour of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation*. American Journal of Mathematics 77 (1955), 526-534

- [67] Sternberg S. *On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space, II.* American Journal of Mathematics 80 (1958), 623-631
- [68] Sontag E.D. *Feedback stabilization of nonlinear systems.* Progress in Systems and Control Theory 4, Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control, Proceedings of the International Symposium MTNS-89, Vol. II, ed. Kaashoek M.A., van Schuupen J.H., Ran A.C.M., Birkhäuser, 1990, 61-82
- [69] Su R.J. *On the linear equivalents of nonlinear systems.* Syst. Contr. Lett. 2 (1982/83), 48-52
- [70] Tchoń K. *On approximate feedback equivalence of affine control systems.* Internat. J. Contr. 44 (1986), no.1, 259-266
- [71] Tchoń K. *On normal forms of affine systems under feedback.* New Trends in Nonlinear Control Theory. Proc. Conf., Nantes 1988, Lecture notes in Control and Information Sciences 122, Springer, Berlin, 1989, 23-32
- [72] Tchoń K. *The only stable normal forms of affine systems under feedback are linear.* Syst. Contr. Lett. 8 (1987), 359-365
- [73] van Strien S. *Linearisation along invariant manifolds and a generalisation of the Hartman-Grobman theorems for degenerate singularities of vector fields in \mathbf{R}^3 .* Delft Progress Report 12 (1988), no.1, 107-124
- [74] Wang S.H., Davison E.J. *Canonical forms of linear multivariable systems.* SIAM J. Control Optimization 14 (1976),no.2, 236-250
- [75] Wonham W.M. *Note on a problem in optimal non-linear control.* J. Electronics Control (1) 15 (1963), 59-62
- [76] Wonham W.M., Morse A.S. *Feedback invariants of linear multivariable systems.* Automatica — J. IFAC 8 (1972), 93-100
- [77] Zelikin M.I. *On the singular arcs.* Problems of Control and Information Theory. V.14, no.2, 1985
- [78] Zelikin M.I., Borisov V.F. *Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering.* Birkhäuser, Boston, 1994
- [79] Zhitomirskii M.Ya., Respondek W. *Simple germs of corank one affine distributions.* Singularities Symposium — Łojasiewicz 70 (Kraków, 1996; Warsaw, 1996), 269-276, Banach center Publ. 44, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998