

Двумерный аналог задачи Фуллера с управлением в диске

Roland Hildebrand

Université Grenoble Alpes / CNRS

Семинар Геометрическая теория оптимального управления
13 ноября 2019 г.
совместная работа с М.И. Зеликиным и Л.В. Локуциевским

- 1 Задача Фуллера
- 2 Управление в треугольнике
- 3 Управление в диске

Формулировка

рассмотрим задачу оптимального управления

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} x^2 dt \rightarrow \inf$$

при условиях

$$\ddot{x} = \dot{y} = u, \quad u \in [-1, 1]$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

задача решена Г.Г. Магарил-Ильяевым

Принцип максимума

введем сопряженные переменные ϕ, ψ

функция Понtryгина примет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}x^2 + \phi y + \psi u$$

оптимальное управление задается

$$\hat{u} = \operatorname{sgn} \psi$$

Гамильтониан имеет вид $H = -\frac{1}{2}x^2 + \phi y + |\psi|$

сопряженные переменные удовлетворяют системе

$$\dot{\psi} = -\phi, \quad \dot{\phi} = x$$

система принимает вид

$$\psi^{(IV)} = -\hat{u} = -\operatorname{sgn} \psi$$

Особые режимы

особый режим задается условием $\psi \equiv 0$

это приводит к уравнениям

$$\psi = \phi = x = y = u \equiv 0$$

и соответствует траектории в начале координат

особый режим второго порядка, кусочно-гладкая стыковка с неособой траекторией невозможна

Группа Фуллера

динамика Гамильтоновой системы инвариантна по отношению к группе преобразований

$$(\psi, \phi, x, y, u, t) \mapsto (\lambda^4 \psi, \lambda^3 \phi, \lambda^2 x, \lambda y, u, \lambda t),$$

$$\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}_{++}$$

имеем также действие дискретной группы S_2 по правилу

$$(\psi, \phi, x, y, u, t) \mapsto (-\psi, -\phi, -x, -y, -u, t)$$

Факторы по действию групп

фазовое пр-во $M = \mathbb{R}^2$

расширенное фазовое пр-во $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$

оптимальный синтез задается лагранжевым подмногообразием $L \sim \mathbb{R}^2$, проектирующемся на M

$$(M \setminus \{0\})/\Lambda \simeq (L \setminus \{0\})/\Lambda \sim S^1$$

$$(M \setminus \{0\})/(\Lambda \times S_2) \simeq (L \setminus \{0\})/(\Lambda \times S_2) \sim \mathbb{R}P^1$$

$$(\mathcal{M} \setminus \{0\})/\Lambda = S^3$$

$$(\mathcal{M} \setminus \{0\})/(\Lambda \times S_2) = \mathbb{R}P^3$$

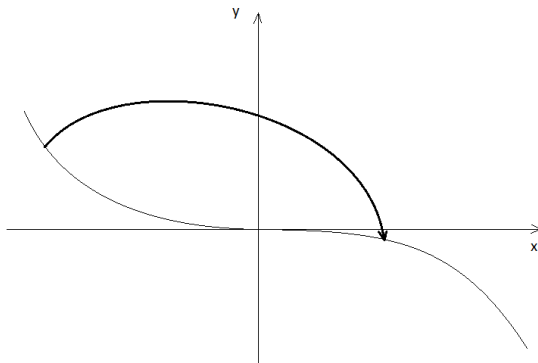
Решение задачи

так как $\mathbb{R}P^1$ – одномерно, то любая оптимальная траектория должна быть *автомодельной* – переводиться в себя неким нетривиальным элементом группы симметрий $\Lambda \times S_2$

интегрируем систему с начальной точкой $(0, \phi_0, x_0, y_0)$ до следующего переключения

приходим в точку $(0, \phi_1, x_1, y_1) = (0, -\lambda^3 \phi_0, -\lambda^2 x_0, -\lambda y_0)$
три уравнения на четыре неизвестных $\phi_0, x_0, y_0, \lambda$

решения алгебраической системы уравнений образуют кривую переключения в оптимальном синтезе задачи



отрезок траектории между двумя точками переключения

Формулировка

рассмотрим задачу оптимального управления

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \|x\|^2 dt \rightarrow \inf$$

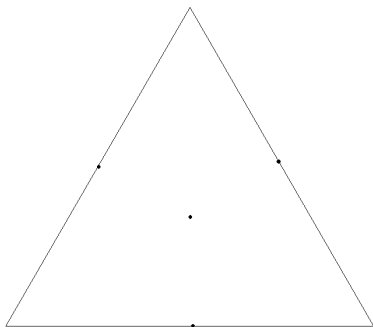
при условиях

$$\ddot{x} = \dot{y} = u, \quad u \in T \subset \mathbb{R}^2$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

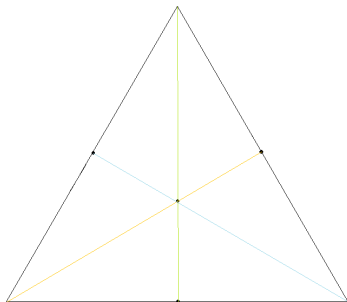
здесь T – равносторонний треугольник с центром в начале координат

Особые режимы



кроме особого режима в начале координат есть еще три
частично особых режима в центрах ребер треугольника T

Особые режимы



проекция u, y, x, ϕ, ψ на данное ребро остается постоянной
управление переключается между особой точкой и
противоположной неособой вершиной треугольника T

Группа симметрий

непрерывная группа Фуллера преобразований

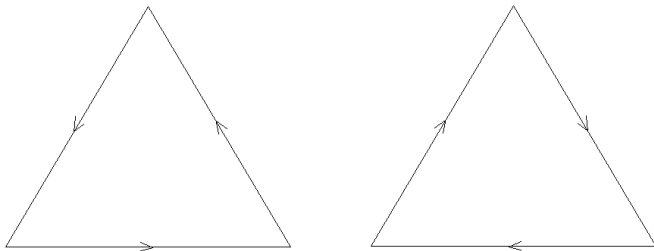
$$(\psi, \phi, x, y, u, t) \mapsto (\lambda^4 \psi, \lambda^3 \phi, \lambda^2 x, \lambda y, u, \lambda t),$$

$$\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}_{++}$$

имеем также дискретную группу S_3 преобразований \mathbb{R}^2 ,
переставляющую вершины треугольника и действующую на
 ψ, ϕ, x, y, u

Автомодельные траектории

кроме частично особых режимов, являющихся
автомодельными, есть другие автомодельные траектории



управление циклически переключается с одной вершины на
другую

Асимптотическое поведение

почти все траектории стремятся к одному из двух
автомодельных циклов в *обратном* направлении времени

почти все траектории переключаются на один из трех частично
особых режимов в *прямом* направлении времени

остальные траектории блуждают по канторову множеству с
хаотичной динамикой

Факторы по действию групп

фазовое пр-во $M = \mathbb{R}^4$

расширенное фазовое пр-во $\mathcal{M} = \mathbb{R}^8$

оптимальный синтез задается лагранжевым подмногообразием $L \sim \mathbb{R}^4$, проектирующемся на M

$$(M \setminus \{0\})/\Lambda \simeq (L \setminus \{0\})/\Lambda \sim S^3$$

$$(\mathcal{M} \setminus \{0\})/\Lambda = S^7$$

орбита автомодельной траектории имеет коразмерность 2 в L

Формулировка

рассмотрим задачу оптимального управления

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \|x\|^2 dt \rightarrow \inf$$

при условиях

$$\ddot{x} = \dot{y} = u, \quad u \in D \subset \mathbb{R}^2$$

с начальными условиями $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

здесь D – замкнутый диск радиуса 1 с центром в начале координат

Гамильтонова динамика

введем сопряженные переменные ϕ, ψ

функция Понtryгина примет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, u \rangle$$

оптимальное управление задается

$$\hat{u} = \frac{\psi}{\|\psi\|} = e_\psi$$

Гамильтониан имеет вид $H = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle \phi, y \rangle + \|\psi\|$

сопряженные переменные удовлетворяют системе

$$\dot{\psi} = -\phi, \quad \dot{\phi} = x$$

система принимает вид

$$\psi^{(IV)} = -\hat{u} = -e_\psi$$

Группа симметрий

непрерывная группа Фуллера преобразований

$$(\psi, \phi, x, y, u, t) \mapsto (\lambda^4 \psi, \lambda^3 \phi, \lambda^2 x, \lambda y, u, \lambda t),$$

$$\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}_{++}$$

имеем также непрерывную группу $O(2)$ пространства \mathbb{R}^2 ,
действующую на ψ, ϕ, x, y, u

Факторы по действию групп

фазовое пр-во $M = \mathbb{R}^4$

расширенное фазовое пр-во $\mathcal{M} = \mathbb{R}^8$

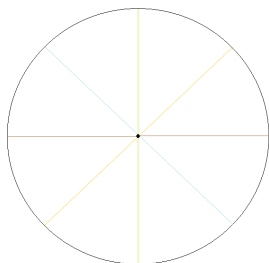
оптимальный синтез задается лагранжевым подмногообразием $L \sim \mathbb{R}^4$, проектирующемся на M

$$(M \setminus \{0\})/\Lambda \simeq (L \setminus \{0\})/(\Lambda \times O(2)) \sim D$$

$$\dim(\mathcal{M} \setminus \{0\})/(\Lambda \times O(2)) = 6$$

Одномерные подсистемы

аналогом частично особых траекторий являются решения, изоморфные траекториям в задаче Фуллера

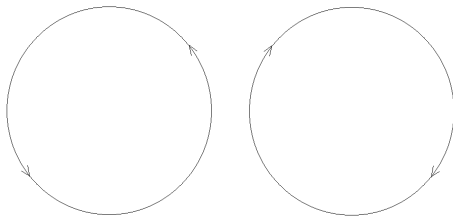


управление переключается между противоположными точками на границе диска D

траектории являются автомодельными
орбита имеет коразмерность 1 в L

Траектории с циклическим управлением

аналогом траекторий с циклическими переключениями управления являются автомодельные решения с управлением, движущимся по границе диска



эти траектории являются *отталкивающими* в факторе расширенного фазового пространства по группе орбита имеет коразмерность 2 в L

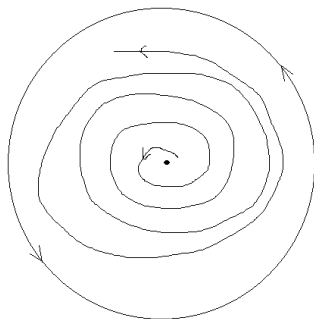
Гипотеза об устройстве оптимального синтеза

фактор $(L \setminus \{0\})/(\Lambda \times O(2)) \sim D$ можно параметризовать переменными $G_{xx} = \langle x, x \rangle$, $G_{xy} = \langle x, y \rangle$, $G_{yy} = \langle y, y \rangle$ с нормализацией $G_{xx} + G_{yy} = 1$

автомодельные решения с управлением, движущемся по границе диска, отображаются в отталкивающую неподвижную точку

решения, изоморфные траекториям в задаче Фуллера, отображаются в границу диска

Гипотеза: остальные траектории спиралевидно исходят из неподвижной точки и асимптотически приближаются к границе
низкая размерность фактор-пространства исключает наличие фрактальной динамики



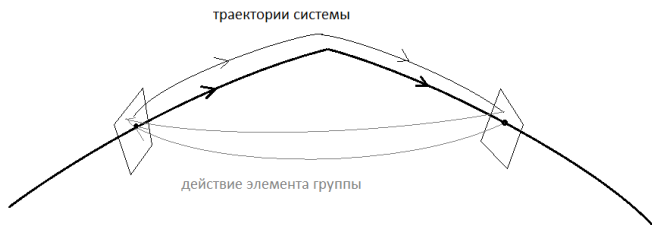
Отображение Пуанкаре в окрестности границы

рассмотрим автомодельную траекторию, изоморфную решению в задаче Фуллера, в расширенном фазовом пр-ве \mathcal{M}

траектория является неподвижным множеством отображения возврата или отображения Пуанкаре

это отображение – композиция $G \circ \Phi$, где

- Φ – оператор эволюции вдоль траекторий системы
- G – элемент группы симметрий, такой что $G \circ \Phi = Id$ на автомодельной траектории



отображение Пуанкаре определено в окрестности
автомодельной траектории

Линеаризация

линеаризация эволюции траекторий гамильтоновой системы в окрестности автомодельной траектории задается *уравнением в вариациях* с матрицей коэффициентов

$$\frac{\partial(\dot{y}, \dot{x}, \dot{\phi}, \dot{\psi})}{\partial(y, x, \phi, \psi)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{e_{\psi \perp} e_{\psi \perp}^T}{\|\psi\|} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

при $e_{\psi} = \pm e_1$ матрица блочно-диагональная с блоками

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \|\psi\|^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение в вариациях

первая под-система изоморфна уравнению в вариациях для задачи Фуллера

линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами

вторая под-система записывается в виде

$$g^{(IV)}(t) \cdot p(t) + g(t) = 0,$$

где $(y, x, \phi, \psi) = (-g''', -g'', -g', g)$, а $p(t) = \|\psi(t)\|$ – полином 4-й степени со старшим коэффициентом $-\frac{1}{24}$ и простыми корнями в точках переключения

сингулярная линейная система ОДУ

Линеаризация отображения Пуанкаре

действие группы также блочно-диагонально

⇒ линейная часть отображения Пуанкаре определена на первом факторе и имеет

- собственный вектор с собственным значением 1, касательный к самой траектории
- собственный вектор с собственным значением $|\lambda| < 1$, касательный к орбите группы Фуллера
- два собственных вектора с собственными значениями $|\lambda| > 1$

первые два касательны к лагранжевому многообразию L , два других – нет

Поведение на втором факторе

орбита группы $O(2)$ принадлежит лагранжевому многообразию L и переводится отображением Пуанкаре в себя

касательный к орбите вектор соответствует решению $g(t) = \pm p(t)$

знак меняется при прохождении через точку переключения

касательный вектор также переводится в себя

его можно рассматривать как собственный вектор с собственным значением 1

Аналитические решения системы ОДУ

рассмотрим ОДУ

$$g^{(k)}(t) \cdot p(t) + g(t) = 0,$$

где p – полином степени k со старшим коэффициентом $-\frac{1}{k!}$ и простым корнем в $t = 0$

имеем целое решение $g(t) = p(t)$

задав $g(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ в виде формального ряда, можно однозначно определить коэффициенты c_k, c_{k+1}, \dots из произвольных значений коэффициентов c_1, \dots, c_{k-1}

Задача: Показать, что ряды сходятся в диске на комплексной плоскости с радиусом, равным расстоянию до ближайшего отличного от нуля корня полинома p .

Сингулярное решение системы ОДУ

пусть $g_{k-1} = t^{k-1} + c_k t^k + \dots$ – аналитическое решение, имеющее порядок $k - 1$ в точке $t = 0$

пусть p_1 – коэффициент при линейном члене полинома p

подставляя формальный ряд

$$g(t) = g_{k-1}(t) \cdot \log t - (k-1)!p_1 + d_k t^k + d_{k+1} t^{k+1} + \dots$$

в дифференциальное уравнение, однозначно получаем коэффициенты d_k, d_{k+1}, \dots

Задача: Показать, что ряд сходится в диске на комплексной плоскости с радиусом, равным расстоянию до ближайшего отличного от нуля корня полинома p .

Продолжение решений через сингулярность

при прохождении через точку переключения $t = 0$ у полинома p все коэффициенты кроме старшего меняют знак

аналитические слева и справа решения характеризуются условием $g(0) = 0$ и непрерывно переходят друг в друга вместе с первыми тремя производными

на соответствующих траекториях ψ проходит через 0 и имеет место переключение

подпр-во аналитических решений *не* переводится в себя элементом G

линеаризация отображения Пуанкаре а priori определена на подпр-ве коразмерности 1 и переводит его в другое подпр-во коразмерности 1

Поведение на сингулярных направлениях

рассмотрим решение гамильтоновой системы, близкое к автомодельной траектории, на котором ψ не проходит через 0

$$\psi \approx ce_1 t + \epsilon(at + b)$$

ϵ – малый параметр, $a, b \in \mathbb{R}^2$, $c > 0$

пусть $\psi = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, тогда

$$t \approx \epsilon(-\alpha + \beta \operatorname{ctg} \varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{-\epsilon\beta}{\sin^2 \varphi},$$

$$y \approx y_0 + \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon^2 \beta^2 + (t + \epsilon\alpha)^2} \\ \epsilon\beta \log \left(\frac{t + \epsilon\alpha}{\epsilon\beta} + \sqrt{1 + \left(\frac{t + \epsilon\alpha}{\epsilon\beta} \right)^2} \right) \end{pmatrix}$$

Задача: Выяснить, как устроено отображение Пуанкаре.

Спасибо за внимание