

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES  
APPLIQUÉES



Année Universitaire 2010-2011

RAPPORT DE STAGE

---

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE LA CALOTTE  
POLAIRE ANTARCTIQUE

Présenté par

*Sébastien BARTHELEMY*

M2P Parcours Mathématiques et Informatiques

spécialité *Ingénierie de la Modélisation et de la Simulation Numérique*

Tuteurs

*Pierre Saramito*

*Olivier Gagliardini*



Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement

---



# Remerciements

Ce travail n'aurait pu voir le jour sans la participation ou l'aide de nombreuses personnes que je tiens à remercier ici.

En premier lieu je tiens à remercier mes deux tuteurs Pierre Saramito et Olivier Gagliardini pour leur aide et leur disponibilité tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier Raphaël Vuillermet pour m'avoir accordé le financement nécessaire pour effectuer cette année universitaire dans les meilleures conditions matérielles.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à un moment ou à un autre à prendre en main l'outil informatique que j'ai utilisé lors de ce travail : Laurence Viry du LJK pour m'avoir introduit à Foehn, ainsi que tous les membres du LGGE qui ont pris sur leur temps pour assurer mon apprentissage d'Elmer : Lionel Favier, Fabien Gillet-Chaudet, Gaël Durand ainsi que Anne-Sophie Drouet.

Je tiens à remercier également les doctorants du LJK avec qui j'ai partagé certains de mes repas pendant ce stage et plus particulièrement Madison Giacofci et Roland Denis pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé.

Je remercie tous les stagiaires avec qui j'ai partagé ces quelques semaines de travail, notamment Kole Keita, Louis Cuel, Noé Bernabeu, Hicham Hosseini et Mahamadou Doumbia.

Je remercie Patrick Lacasse, doctorant à l'université de Laval au Québec, pour ses conseils bibliographiques sur les problèmes de contact.

Je remercie également toute l'équipe des maliens de l'UFR IMAG pour tous les bons moments que l'on a passés ensemble : Mahamar Dicko, Abdoulaye Samaké, Kole Keita, Mahamadou Doumbia et aussi Baïlo Balde même s'il n'est pas malien.

Enfin je tiens à remercier tous les gens avec qui j'ai partagé les deux semaines de "l'European Summer School in Industrial Mathematics ECMI" qui s'est déroulée à Milan au mois de Juillet : Amos Egonmwan, Vanessa Zeising, Mohit Kaushal, Carlos Krieff, Jens Muller, Roland Wagner, Immanuel Anjam et Harald Hinterleitner.



# Table des matières

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Contexte</b>   | <b>6</b>  |
| <b>1</b>   | <b>Introduction</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2</b>   | <b>Représentation de la ligne d'échouage</b>  | <b>6</b>  |
| <b>3</b>   | <b>Le problème mathématiques fort</b>   | <b>7</b>  |
| 3.1        | Préliminaires . . . . .   | 7         |
| 3.1.1      | Notations . . . . .   | 7         |
| 3.1.2      | Définitions . . . . .   | 8         |
| 3.2        | Les équations pour un écoulement glaciaire . . . . .  | 9         |
| 3.2.1      | Les équations de conservation . . . . .   | 9         |
| 3.2.2      | Deux lois de comportement simples . . . . .   | 10        |
| 3.3        | Equations des surfaces libres . . . . .   | 11        |
| 3.4        | Condition d'impénétrabilité du socle rocheux . . . . .  | 12        |
| 3.5        | Conditions aux limites . . . . .  | 12        |
| 3.6        | Formulation mathématiques continue en temps . . . . .   | 14        |
| <b>II</b>  | <b>Formulation semi-discrétisée en temps</b>  | <b>15</b> |
| <b>4</b>   | <b>Algorithme en temps complet</b>  | <b>15</b> |
| <b>5</b>   | <b>Formulation semi-discrétisée en temps</b>  | <b>15</b> |
| 5.1        | Formulation semi-discrétisée en temps sur le domaine . . . . .                                      | 15        |
| 5.2        | Formulation semi-discrétisée en temps de la condition de Signorini . . . . .                        | 16        |
| 5.3        | Sous-problème de type Signorini . . . . .   | 18        |
| <b>6</b>   | <b>Construction de solutions au problème semi-discrétisé en temps</b>                               | <b>18</b> |
| 6.1        | Un premier algorithme : construction d'une solution selon un processus itératif . . . . .           | 18        |
| 6.1.1      | Un problème simplifié . . . . .   | 18        |
| 6.1.2      | Définitions préliminaires . . . . .   | 19        |
| 6.1.3      | Enoncé . . . . .  | 20        |
| 6.1.4      | Lien avec le problème semi-discrétisé en temps . . . . .  | 20        |
| 6.2        | Un second algorithme : construction d'une solution avec l'algorithme des ensembles actifs . . . . . | 21        |
| <b>7</b>   | <b>Discrétisation en espace</b>   | <b>22</b> |
| <b>III</b> | <b>Résultats numériques</b>   | <b>24</b> |
| <b>8</b>   | <b>Préliminaires</b>  | <b>24</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>9 Aspects théoriques</b>                      | <b>24</b> |
| 9.1 Deux minorations de $\beta$                  | 25        |
| <b>10 Test numérique du maillage</b>             | <b>26</b> |
| 10.1 Construction de la géométrie                | 26        |
| 10.2 Les différents maillages                    | 26        |
| 10.3 Test numérique des maillages                | 28        |
| <b>A Démonstration de l'énoncé section 6.1.3</b> | <b>37</b> |

# Première partie

## Contexte

### 1 Introduction

Une des questions posées aux glaciologues et qui fait l'objet de travaux scientifiques importants est d'évaluer la montée du niveau des mers dans les décennies à venir. Ce problème est d'une importance cruciale car une montée sensible du niveau des mers pourrait avoir entre autres conséquences d'inonder des villes côtières, aggraver l'impact des crues, faire disparaître certaines îles habitées ... Afin d'avoir un ordre d'idée du coût que pourrait avoir une montée significative du niveau des mers dans le prochain siècle pour un pays côtier comme la Grèce on peut citer un récent rapport scientifique qui estime ce coût (selon les différents scénarios d'évolution de rejet de  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère) entre 436 et 731 milliards d'euros.

Ce problème concerne les glaciologues en cela que la future montée des mers est en partie due à l'échouage sur la mer d'une partie de la calotte polaire antarctique. En antarctique la glace repose principalement sur un socle rocheux sous-marin et lorsque la glace se décolle du socle elle se met à flotter sur l'eau et fait monter le niveau de la mer, comme quand on met un glaçon dans un verre. On appelle ligne d'échouage la ligne qui marque la transition entre la partie posée sur le socle rocheux et la partie flottante de la glace. Afin d'estimer le niveau de montée des mers il est donc nécessaire de connaître avec précision la position de la ligne d'échouage. Il s'agit donc d'un problème de contact dont la ligne d'échouage est la solution. Pour résoudre ce problème avec précision il est nécessaire d'améliorer les modèles d'écoulements des calottes polaires. Des efforts considérables dans ce sens là sont en cours, supportés par de gros programmes (ice2sea en Europe, SeaRise en Amérique du Nord). Ces efforts portent principalement sur la construction d'une nouvelle génération de logiciels de simulation de calottes polaires. Le logiciel éléments finis actuellement utilisé et développé au Laboratoire de Glaciologie et Géophysique des Ecoulements de Grenoble (LGGE) permet de résoudre le problème de la ligne d'échouage mais les solutions obtenues restent sensibles à la taille des éléments.

On s'intéressera dans ce travail à donner dans un premier temps une formulation mathématique du problème de la ligne d'échouage. Dans un second temps on étudiera l'influence de la taille des éléments du maillage sur la solution.

### 2 Représentation de la ligne d'échouage

Nous avons représenté ci-dessous de manière schématique un écoulement glaciaire qui viendrait s'échouer sur la mer. On distingue donc la partie de la glace posée sur la roche et la partie flottant sur l'océan. On a fait apparaître en rouge la ligne d'échouage transition entre la partie posée et la partie flottante :

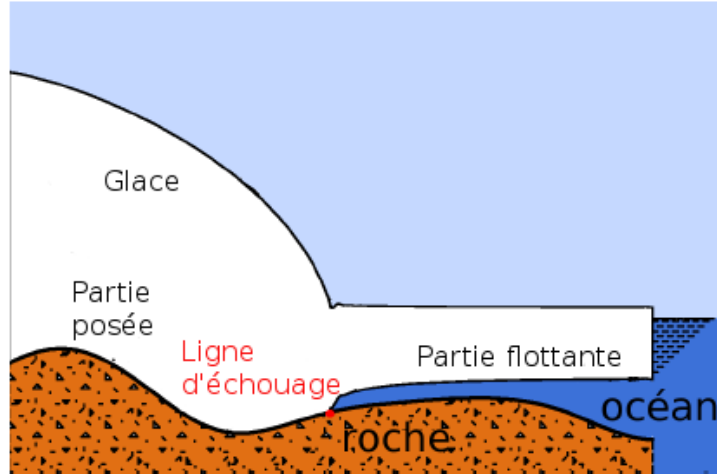


FIGURE 1 – Représentation 2D d'un écoulement glaciaire avec échouage sur la mer

### 3 Le problème mathématiques fort

#### 3.1 Préliminaires

##### 3.1.1 Notations

On considère un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , symétrique, borné, connexe et de frontière  $\partial\Omega$ . Celle-ci se décompose en quatre parties : l'axe de symétrie :  $\Gamma_y$ , puis quatre autres parties  $\Gamma_a(t)$ ,  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_S(t) \quad \forall t \geq 0$ . On note respectivement  $y = y_s(x, t)$  et  $y = y_b(x, t)$  l'ordonnée des points situés sur  $\Gamma_a(t)$  et  $\Gamma_S(t)$

Comme on modélise dans ce travail un écoulement glaciaire, dans la suite on identifiera :

- la glace avec  $\Omega$  ;
- l'axe de symétrie de l'écoulement avec  $\Gamma_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$  ;
- la surface supérieure de la glace en contact avec l'air avec  $\Gamma_a$  ;
- le front de l'écoulement avec  $\Gamma_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = x_e\}$  avec  $x_e$  donné ;
- la surface inférieure de la glace dont une partie est en contact avec le socle et l'autre qui flotte sur l'eau :  $\Gamma_S(t)$

On désigne par  $x_G(t)$  l'abscisse de la ligne d'échouage et on note  $y = b(x)$  l'ordonnée des points situés sur le socle rocheux.

On représente ci-dessous l'ouvert  $\Omega(t)$  sur lequel on travaille :



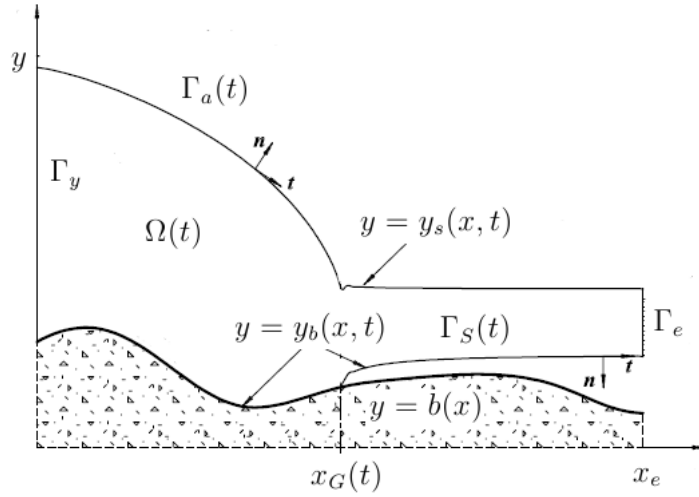


FIGURE 2 – Représentation de l'ouvert  $\Omega(t)$  et de ses frontières

où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$  et  $\vec{t} = (-n_y; n_x)$  le vecteur tangent à  $\partial\Omega$ .

On note pour tout tenseur  $\sigma$  et tout vecteur  $\vec{u}$  :

$$\sigma_N = (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}, \quad \sigma_T = (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t}, \quad u_N = \vec{u} \cdot \vec{n}, \quad u_T = \vec{u} \cdot \vec{t}$$

### 3.1.2 Définitions

#### Tenseur des taux de déformations, tenseur des contraintes déviatoires et tenseur des contraintes de Cauchy

On considère un champs de vitesse  $\vec{u}$  défini sur  $\Omega$  et on définit le gradient du champ de vecteurs  $\vec{u}$  par :

$$\vec{\nabla} \vec{u}(x) = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \quad \forall x \in \Omega$$

On définit alors le tenseur des taux de déformation :

$$D(\vec{u}) = \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T}{2}$$

Le tenseur des contraintes déviatoires est défini par la relation :

$$\sigma_D = f(D(\vec{u}))$$

La fonction  $f$  est appelée loi de comportement, c'est elle qui distingue le comportement du fluide considéré d'un autre.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est défini par la relation :

$$\sigma = \sigma_D - pI$$

## Une relation entre le tenseur des contraintes et la pression isotrope

On note  $\sigma$  le tenseur des contraintes. La trace de  $\sigma$  est définie de manière analogue à la trace d'une matrice carré :

$$\text{tr}(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

La pression isotrope  $p$  (unité SI :  $Pa$ ) est alors définie par la relation :

$$-p = \frac{\text{tr}(\sigma)}{3}$$

## Une propriété du tenseur des contraintes déviatoires

On a la relation :

$$\sigma_D = \sigma + pI$$

Par définition de  $p$  et  $\sigma_D$  on peut montrer que :

$$\text{tr}(\sigma_D) = 0$$

## Module d'un tenseur

Le module d'un tenseur  $\sigma$  est défini par :

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{\sigma : \sigma}{2}} = \sqrt{\text{tr}\left(\frac{\sigma \cdot \sigma^t}{2}\right)}$$

## 3.2 Les équations pour un écoulement glaciaire

### 3.2.1 Les équations de conservation

La glace étant un fluide on peut modéliser son écoulement en utilisant une équation de conservation de la quantité de mouvement (1) et d'une équation de conservation de la masse (2) :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) - \text{div} \sigma = \rho \vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (2)$$

où :

- $t$  désigne le temps (unité SI :  $s$ )
- $\vec{u}$  le vecteur vitesse (unité SI :  $m.s^{-1}$ )
- $\rho$  désigne la masse volumique du fluide (unité SI :  $kg.m^{-3}$ )
- $\vec{g}$  désigne le vecteur gravité (unité SI :  $N.kg^{-1}$ ),  $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{pmatrix}$

Supposant le fluide incompressible,  $\rho = \text{Cte}$  on obtient :

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad (3)$$

D'autre part la glace étant un fluide lent on néglige le terme d'inertie dans (1), on obtient :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \text{div} \sigma = \rho \vec{g} \quad (4)$$

### Remarque

Par définition de  $D(\vec{u})$  :

$$\text{tr}(D(\vec{u})) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \text{div}(\vec{u}) = 0$$

Cette dernière égalité découlant de l'équation (3), ainsi dans le cas d'un écoulement glaciaire  $D(\vec{u})$  est déviateur.

### 3.2.2 Deux lois de comportement simples

Nous introduisons dans cette partie deux lois de comportement simples que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Dans un premier temps nous verrons une loi de comportement linéaire et dans un second temps une loi de comportement non linéaire appelée loi de Glen/Norton-Hoff.

#### Une loi de comportement linéaire : Navier-Stokes

Une loi de comportement est dite linéaire si il existe  $\eta_0 > 0$  tel que :

$$\sigma_D = f(D(\vec{u})) = 2\eta_0 D(\vec{u})$$

où  $\eta_0$  désigne la viscosité du fluide (unité SI : *Pa.s*).

Alors  $\sigma$  s'écrit :

$$\sigma = 2\eta_0 D(\vec{u}) - pI$$

et les équations (3) et (4) se réduisent aux équations de Navier-Stokes.

#### Loi de Glen/Norton-Hoff

La loi de Glen/Norton-Hoff ou plus simplement loi de Glen modélise le comportement d'une glace isotrope, elle s'exprime par la relation :

$$\sigma_D = f(D(\vec{u})) = 2\eta(|2D(\vec{u})|) D(\vec{u})$$

où  $\eta(\cdot)$  est une fonction donnée de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$

**1er cas :**  $\eta(\xi) = \eta_0 = \text{Cte} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$

Dans ce cas on retrouve la loi linéaire et les équations de Navier-Stokes.

**2ème cas :**  $\eta(\xi) = C\xi^{-1+\frac{1}{n}}$

où  $n > 0$  est l'index de la loi de puissance. Pour  $n = 1$  on retrouve  $\eta = C$ . Ici nous choisissons  $n = 3$ .

On note  $B$  la fluidité de la glace, on suppose qu'elle reste constante, alors  $C = B^{-\frac{1}{n}}$ . D'autre part dans cette loi :

$$\xi = |2D(\vec{u})|$$

Ainsi :

$$\sigma_D = 2B^{-\frac{1}{n}} (|2D(\vec{u})|)^{-1+\frac{1}{n}} D(\vec{u})$$

Dans la suite, par souci de simplicité on notera simplement :

$$\sigma_D = 2\eta (|2D(\vec{u})|) D(\vec{u})$$

Il s'ensuit :

$$\sigma = 2\eta (|2D(\vec{u})|) D(\vec{u}) - pI$$

### 3.3 Equations des surfaces libres

La surface supérieure de la glace en contact avec l'air et la surface inférieure de la glace en contact avec l'eau sont des surfaces libres dont les altitudes respectives sont données par des équations aux dérivées partielles. Dans cette partie nous donnons ces équations en expliquant comment nous les obtenons.

Les lignes de niveau des cartes IGN peuvent être vues comme des courbes iso-valeur d'une fonction  $\phi$  donnée. Ainsi si l'on se donne  $c$ , la courbe de niveau  $c \in \mathbb{R}$  est l'ensemble  $\Gamma(c)$  défini par :

$$\Gamma(c) = \{\phi(x, y) = c\}$$

Nous faisons l'hypothèse que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma(c)$$

c'est-à-dire que  $\phi$  n'admet pas de point de rebroussement, nous pouvons alors écrire :

$$\phi(x, y, t) = y - y_s(x, t)$$

On définit ainsi une carte du relief de notre écoulement. Quand le fluide bouge, la surface supérieure de la glace est entraînée :

$$\frac{D\phi}{Dt} = a \tag{5}$$

où  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$  est l'opérateur de dérivation lagrangienne et où  $a$  est une fonction d'accumulation/ablation ( $m.a^{-1}$ ) qui correspond à un flux vertical au niveau de la surface libre.

On peut réécrire l'équation (5) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = a$$

Or :

$$\vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial y_s}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en conclut que l'équation (5) peut se réécrire :

$$-\frac{\partial y_s}{\partial t} - u_x \frac{\partial y_s}{\partial x} + u_y = a$$

De la même manière si on note  $z_b$  l'altitude de la surface inférieure de la glace on a l'équation :

$$-\frac{\partial y_b}{\partial t} - u_x \frac{\partial y_b}{\partial x} + u_y = 0$$

Ici le second membre de l'équation est nul car on néglige les phénomènes de fonte/accrétion sur la surface inférieure de la glace

### 3.4 Condition d'impénétrabilité du socle rocheux

La glace ne peut pas pénétrer le socle rocheux décrit par l'équation  $y = b(x)$  ce qui se traduit par l'inéquation suivante :

$$y_b(x, t) \geq b(x) \quad \forall (x, t) \in [0; x_e] \times \mathbb{R}^+ \quad (6)$$

Si on note  $\forall t : d_t(x) = d(x, t) = z_b(x, t) - b(x)$  la fonction qui définit la distance de la surface inférieure de la glace au socle on a d'après (6) :

$$d(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in [0; x_e] \times \mathbb{R}^+$$

### 3.5 Conditions aux limites

Afin de présenter les conditions aux limites du domaine nous introduisons la fonction  $p_w$  qui donne la pression de l'eau qui s'exerce sur la glace immergée en fonction de l'altitude au point considéré :

$$\begin{cases} p_w(y, t) = \rho_w g (l_w(t) - y), & y < l_w(t) \\ p_w(y, t) = 0, & y \geq l_w(t) \end{cases} \quad (7)$$

où  $\rho_w$  est la densité de l'eau de mer donnée et  $l_w(t)$  le niveau de la mer au temps  $t$  donné également.

On définit également la pression effective  $N$  comme étant la différence entre la pression de l'eau et la contrainte normale soit :

$$N = -p_w - \sigma_N$$

On définit alors les conditions aux limites sur chacun des bords du domaine :

**Sur**  $\Gamma_y = \{x = 0\}$

S'agissant d'un problème 2D,  $u_N(0, y; t) = 0, \forall y \geq 0, \forall t > 0$ . De plus la contrainte de cisaillement est nulle sur l'axe de symétrie, autrement dit :

$$\sigma_T(0, y; t) = 0 \quad \forall y \geq 0, \forall t > 0$$

**Sur**  $\Gamma_a(t) = \{y = y_s(x; t)\}$

La contrainte tangentielle à la surface est nulle et la contrainte normale à la surface est égale à la pression atmosphérique que l'on néglige soit :

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

avec :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial y_s}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_s}{\partial x}\right)^2}}$$

**Sur**  $\Gamma_e = \{x = x_e\}$

La contrainte normale qui s'exerce sur la partie immergée du front de l'écoulement est égale à la pression de l'eau suivant la formule donnée en (7). De plus les frottements étant nuls sur cette frontière on a :

$$\begin{cases} \sigma_N(x_e, y, t) = -p_w(y, t) \\ \sigma_T(x_e, y, t) = 0 \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall t > 0$$

**Sur**  $\Gamma_S(t)$

Les conditions sur la surface inférieure de la glace sont de deux types selon que la distance de la glace au socle est nulle ou strictement positive :

- Si  $d_t > 0$  alors la glace glisse sur l'eau : la contrainte tangentielle ainsi que la pression effective  $N$  sont nulles. Autrement dit on a :  $\sigma_N = -p_w$  et  $\sigma_T = 0$
- Si  $d_t = 0$  alors soit la pression effective est nulle  $N = 0$ , et alors les frottements s'annulent i-e  $\sigma_T = 0$ . Soit la pression effective est strictement positive  $N > 0$  et alors la glace est en contact avec le socle et une loi de frottement s'applique. Dans la suite on appliquera la loi de frottement suivante :

$$\mathcal{F}(\sigma_N, u_T) = -\frac{N^q}{A_s} u_T = -\frac{(-p_w - \sigma_N)^q}{A_s} u_T$$

où  $A_s$  est un coefficient de frottement qui dépend de la géométrie du socle rocheux et  $q > 0$  est un index de la loi de puissance. Pour  $q = 1$  on retrouve le frottement de Coulomb. Ici nous choisissons  $q = \frac{1}{3}$

Ainsi on définit comme conditions au bord sur  $\Gamma_S(t)$  :

$$\begin{cases} d_t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{cases} \\ d_t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N \leq -p_w \\ \sigma_T = \mathcal{F}(\sigma_N, u_T) \end{cases} \end{cases}$$

### 3.6 Formulation mathématiques continue en temps

Maintenant que nous avons posé les équations sur le domaine et que nous avons établi les conditions au bord de celui-ci, nous pouvons donner la formulation complète de notre problème :

Trouver  $(\vec{u}, p)$  définis sur  $\Omega \times ]0, T[$  tel que :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \operatorname{div} \{2\eta (|2D(\vec{u})|) D(\vec{u}) - pI\} = \rho \vec{g} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (8)$$

et

$$\begin{cases} \begin{cases} \sigma_T = 0 \\ u_N = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_y \\ \sigma \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a(t) \\ \begin{cases} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_e \\ d_t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_S(t) \\ d_t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N \leq -p_w \\ \sigma_T = \mathcal{F}(\sigma_N, u_T) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_S(t) \end{cases}$$

Après avoir dans cette première partie introduit le problème et posé les équations mathématiques qui le régissent, nous allons dans une seconde partie présenter comment nous pouvons discrétiser celui-ci en temps et quels sont les algorithmes que nous pouvons utiliser dans ce cadre.

## Deuxième partie

# Formulation semi-discrétisée en temps

Dans cette partie nous donnons une discrétisation en temps suivant un schéma implicite de notre problème. Dans un premier temps nous précisons quel problème nous résolvons à chaque pas de temps avant de discrétiser celui-ci en temps puis de donner deux algorithmes de résolution : un premier algorithme dit algorithme d'Uzawa puis un second algorithme, l'algorithme des ensembles actifs. Nous évoquons ensuite la discrétisation en espace et le type d'éléments finis que nous pouvons utiliser dans ce cadre.

## 4 Algorithme en temps complet

On se place désormais dans le cadre d'une discrétisation en temps de notre problème. Nous désignons dans la suite par  $t_k = k\Delta t$  le pas de temps. Nous conserverons les notations utilisées précédemment auxquelles nous rajouterons l'indice  $k$  afin de désigner le pas de temps auxquelles elles sont désignées. Par exemple  $\vec{u}^k$  désigne le vecteur vitesse  $\vec{u}$  au temps  $t_k$ .

Nous pouvons alors présenter l'algorithme que nous suivons à chaque pas de temps.

Au temps  $t_{k+1}$  on suppose  $z_s^k, z_b^k$  et  $\vec{u}^k$  connus :

– Dans un premier temps on résout les problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } z_b^{k+1} \text{ tel que :} \\ \frac{z_b^{k+1} - z_b^k}{\Delta t} + u_x^k \frac{\partial z_b^{k+1}}{\partial x} = u_y^k \quad \text{sur } \Gamma_S^{k+1} \end{array} \right. \quad (9)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } z_s^{k+1} \text{ tel que :} \\ \frac{z_s^{k+1} - z_s^k}{\Delta t} + u_x^k \frac{\partial z_s^{k+1}}{\partial x} = u_y^k - a \quad \text{sur } \Gamma_a^{k+1} \end{array} \right.$$

– Ensuite on résout un problème de type Signorini afin de calculer  $(\vec{u}^{k+1}, p^{k+1})$

On présente dans la section suivante le problème de type Signorini.

## 5 Formulation semi-discrétisée en temps

### 5.1 Formulation semi-discrétisée en temps sur le domaine

Pour discrétiser en temps notre problème nous faisons le choix d'un schéma d'Euler implicite. Ainsi à chaque pas de temps nous résolvons le problème :

$$\rho \frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} - \text{div} \{ 2\eta (|2D(\vec{u}^{k+1})|) D(\vec{u}^{k+1}) - p^{k+1} I \} = \rho \vec{g} \quad (10)$$

$$\text{div}(\vec{u}^{k+1}) = 0 \quad (11)$$



(10) est équivalent à :

$$\frac{\rho}{\Delta t} \bar{u}^{k+1} - \operatorname{div} \{ 2\eta (|2D(\bar{u}^{k+1})|) D(\bar{u}^{k+1} - p^{k+1}I) \} = \rho \vec{g} + \frac{\rho}{\Delta t} \bar{u}^k \quad (12)$$

A l'itération  $k + 1$  on suppose  $\bar{u}^k$  connu, on pose :  $\zeta = \frac{\rho}{\Delta t}$  et  $\vec{f}^k = \rho \vec{g} + \frac{\rho}{\Delta t} \bar{u}^k$ , alors (12) s'écrit :

$$\zeta \bar{u}^{k+1} - \operatorname{div} \{ 2\eta (|2D(\bar{u}^{k+1})|) D(\bar{u}^{k+1} - p^{k+1}I) \} = \vec{f}^k$$

Ainsi à chaque pas de temps on résout le problème suivant sur  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \zeta \bar{u}^{k+1} - \operatorname{div} \{ 2\eta (|2D(\bar{u}^{k+1})|) D(\bar{u}^{k+1} - p^{k+1}I) \} = \vec{f}^k & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{u}^{k+1}) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites sur  $\Gamma_y$ ,  $\Gamma_a^k$  et  $\Gamma_e$  :

$$\begin{cases} \begin{cases} \sigma_T^{k+1} = 0 \\ u_N^{k+1} = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_y \\ \sigma^{k+1} \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a^{k+1} \\ \begin{cases} \sigma_N^{k+1} = -p_w^{k+1} \\ \sigma_T^{k+1} = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_e \end{cases}$$

où :

$$\sigma^{k+1} = 2\eta (|2D(\bar{u}^{k+1})|) D(\bar{u}^{k+1} - p^{k+1}I)$$

Il reste alors à discrétiser la condition sur  $\Gamma_S^{k+1}$

## 5.2 Formulation semi-discrétisée en temps de la condition de Signorini

On rappelle l'équation de transport d'une surface  $\Gamma$  donnée par l'équation :  $\Phi(x, y; t) = 0$  avec :

$$\Phi(x, y; t) = y - y_b(x; t)$$

L'équation de transport de cette surface est :

$$-\frac{\partial y_b}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (13)$$

où :

$$\vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial y_b}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si on discrétise en temps (13) avec un schéma d'Euler implicite on peut obtenir :

$$y_b^{k+1} = y_b^k + \Delta t \vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1}$$

D'où :

$$d^{k+1} = d^k + \Delta t \vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1}$$

Or d'après la condition d'imperméabilité du socle rocheux par la glace on a  $\forall k \in \mathbb{N} : d^k \geq 0$

Alors si  $d^k = 0$  cela signifie qu'au temps  $k$  la glace était en contact avec le socle rocheux et on a :  $\vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1} \geq 0$ , alors :

- si  $\vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1} = 0$  alors  $d^{k+1} = 0$  i-e la glace reste en contact avec la roche au temps  $k + 1$  ;
- si  $\vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1} > 0$  alors  $d^{k+1} > 0$  i-e la glace n'est plus en contact avec la roche au temps  $k + 1$  ;

Sinon si  $d^k > 0$  cela signifie qu'au temps  $k$  la glace n'était pas en contact avec la roche et on a :  $\vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1} \geq -\frac{d^k}{\Delta t}$  et alors :

- si  $\vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1} = -\frac{d^k}{\Delta t}$  alors  $d^{k+1} = 0$  i-e la glace rentre en contact avec la roche au temps  $k + 1$  ;
- si  $\vec{u}^{k+1} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{k+1} > -\frac{d^k}{\Delta t}$  alors  $d^{k+1} > 0$  i-e la glace n'est toujours pas en contact avec la glace au temps  $k + 1$  ;

On note que  $\forall k \in \mathbb{N} : |\vec{\nabla} \Phi^{k+1}| \neq 0$  et :

$$-\frac{\vec{\nabla} \Phi^{k+1}}{|\vec{\nabla} \Phi^{k+1}|} = \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire extérieure au domaine  $\Omega^{k+1}$ .

Ainsi si l'on note  $\kappa^{k+1} = \frac{d^k}{\Delta t |\vec{\nabla} \Phi^{k+1}|}$  et  $u_N^{k+1} = \vec{u}^{k+1} \cdot \vec{n}$  alors :

$$u_N^{k+1} \leq \kappa^{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

On souligne le fait que par définition  $\kappa^{k+1}$  est indépendant de  $\vec{u}^{k+1}$

On peut alors écrire la condition de Signorini discrétisée en temps sur  $\Gamma_S^{k+1}$  :

$$\begin{cases} u_N^{k+1} < \kappa^{k+1} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N^{k+1} = -p_w^{k+1} \\ \sigma_T^{k+1} = 0 \end{cases} \\ u_N^{k+1} = \kappa^{k+1} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N^{k+1} \leq -p_w^{k+1} \\ \sigma_T^{k+1} = -\alpha^{k+1} u_T^{k+1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{avec } \alpha^{k+1} = \frac{(-p_w^{k+1} - \sigma_N^{k+1})^q}{A_s} = \frac{N_{k+1}^q}{A_s}$$

On écrit dans la partie suivante le sous-problème de Signorini qu'on résout à chaque pas de temps.

### 5.3 Sous-problème de type Signorini

Afin d'alléger les notations nous noterons dans la suite :

$$\vec{u} = \vec{u}^{k+1} \quad \sigma = \sigma^{k+1} \quad \vec{f} = \vec{f}^k \quad \kappa = \kappa^{k+1} \quad \alpha = \alpha^{k+1} \quad \Omega = \Omega^{k+1} \quad p_w = p_w^{k+1}$$

Ainsi à chaque pas de temps, si le problème (9) est résolu on est amené à résoudre un problème du type :

Trouver  $\vec{u}$  et  $p$  définis dans  $\Omega$  tels que :

$$\begin{cases} \zeta \vec{u} - \operatorname{div} \left\{ 2\eta \left( \sqrt{2} |D(\vec{u})| \right) D(\vec{u}) - pI \right\} = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (14)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \begin{cases} \sigma_T = 0 \\ u_N = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_y \\ \sigma \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a \\ \begin{cases} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_e \\ u_N < \kappa \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_S \\ u_N = \kappa \Rightarrow \begin{cases} \sigma_N \leq -p_w \\ \sigma_T = -\frac{(-p_w - \sigma_N)^q}{A_s} u_T \end{cases} & \text{sur } \Gamma_S \end{cases}$$

Dans la prochaine partie nous verrons deux algorithmes de résolution

## 6 Construction de solutions au problème semi-discrétisé en temps

### 6.1 Un premier algorithme : construction d'une solution selon un processus itératif

Le problème de type Signorini auquel on a abouti à la fin du paragraphe précédent est tant du point de vue mathématiques que du point de vue numérique difficile à traiter. Pour contourner ces difficultés nous allons dans cette partie nous intéresser à un problème plus simple qui nous permettra néanmoins de résoudre le problème précédent de manière itérative quand de telles solutions existent.

#### 6.1.1 Un problème simplifié

Afin de simplifier le problème (14) nous allons utiliser une loi de comportement linéaire, c'est-à-dire on fixe  $\eta = \text{Cte}$ . De plus on considère qu'il n'y a pas de cavité sous glaciaire avec présence d'eau sous pression. Ainsi là où la glace est en contact

avec le socle rocheux la pression hydrostatique est nulle et il y a frottement de la glace sur le socle rocheux, ce qu'on peut traduire mathématiquement :

$$u_N < \kappa \Rightarrow \sigma_N < -p_w$$

avec  $p_w = 0$

D'autre part afin de linéariser la loi de frottement on remplace dans l'expression de celle-ci la pression effective par une fonction  $g_N \in L^2(\Gamma_S)$  donnée, la loi de frottement s'écrit :

$$\sigma_T = -\frac{(-p_w - \sigma_N)^q}{A_s} u_T = -\frac{g_N^q}{A_s} u_T = -\alpha(g_N) u_T$$

On considère alors le problème suivant :

Trouver  $\vec{u}$  et  $p$  définis dans  $\Omega$  tels que :

$$\begin{cases} \zeta \vec{u} - \operatorname{div} \{2\eta D(\vec{u}) - pI\} = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (15)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \begin{cases} \sigma_T = 0 \\ u_N = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_y \\ \sigma \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a \\ \begin{cases} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma_e \\ \begin{cases} u_N < \kappa \Rightarrow \sigma_N = -p_w \\ u_N = \kappa \Rightarrow \sigma_N < -p_w \end{cases} & \text{sur } \Gamma_S \\ \sigma_T = -\alpha(g_N) u_T & \text{sur } \Gamma_S \end{cases}$$

### 6.1.2 Définitions préliminaires

Avant de poursuivre il nous faut donner les définitions suivantes, on définit :

$$V = \left\{ \vec{v} \in (H_1(\Omega^{k+1}))^2 \mid v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_y \right\}$$

et le sous-ensemble convexe de  $V$  :

$$K = \left\{ \vec{v} \in V \mid \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \text{ sur } \Omega^{k+1} \text{ et } v_N \leq \kappa^{k+1} \text{ sur } \Gamma_S^{k+1} \right\}$$

On définit également :

$$H = (H(\Omega^{k+1}))^2$$

$$Q = L^2(\Omega^{k+1})$$

On définit enfin la forme bilinéaire sur  $a$  sur  $V \times V$  :

$$a(\vec{u}; \vec{v}) = \int_{\Omega} \zeta \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\eta D(\vec{u}) : D(\vec{v}) d\Omega$$

la forme linéaire  $F$  définie sur  $V$  :

$$F(\vec{u}) = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_e} p_w u_N d\Gamma$$

la fonctionnelle  $J$  définie sur  $V$  :

$$J(\vec{u}) = \frac{1}{2}a(\vec{u}; \vec{u}) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_S} \alpha(g_N) |u_T|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_S} p_w u_N d\Gamma - F(\vec{u})$$

### 6.1.3 Enoncé

On considère le problème suivant :

Trouver  $\vec{u} \in V$  tel que :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) + \int_{\Gamma_S} \alpha(g_N) u_T (v_T - u_T) + p_w (v_N - u_N) d\Gamma \geq F(\vec{v} - \vec{u}) \quad \forall \vec{v} \in K \quad (16)$$

ainsi que le problème :

$$\text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que : } \quad \vec{u} = \underset{\vec{v} \in K}{\operatorname{arg\,inf}} J(\vec{v}) \quad (17)$$

Les problèmes (15), (16) et (17) sont équivalents (au sens où la solution à l'un de ces problèmes est solution des autres).

**Remarque :** La démonstration de ce résultat est donnée dans la section "Appendice".

### 6.1.4 Lien avec le problème semi-discrétisé en temps

On peut montrer que la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe, les problèmes (15), (16) et (17) admettent une unique solution qui dépend de  $g_N : u(g_N)$ . On peut alors définir une application :

$$\begin{aligned} L^2(\Gamma_S) &\rightarrow L^2(\Gamma_S) \\ B : & \\ g_N &\mapsto \sigma_N(u(g_N)) \end{aligned} \quad (18)$$

Il apparaît alors que si l'application  $B$  admet un point fixe que l'on note  $g_B$  alors  $u(g_B)$  est solution du problème (14) dans le cadre d'une loi de comportement linéaire.

Supposons qu'un tel point fixe existe et est unique et que l'application  $B$  est contractante alors la suite définie par induction :  $g_N^0 \in L^2(\Gamma_S)$  et  $g_N^{m+1} = B(g_N^m)$  est convergente et converge vers ce point fixe  $g_B$ . Montrer que  $B$  est contractante est généralement difficile et dépasse le cadre de ce travail. Néanmoins on peut signaler que dans le cadre du problème de Signorini classique Kikuchi et Oden dans [6] ont

montré l'existence et l'unicité de ce point fixe pour une loi de frottement non locale et non linéaire. Hlavacek et Haslinger dans [7] et [8] ont montré l'existence et l'unicité d'un tel point pour une loi de frottement de Coulomb.

## 6.2 Un second algorithme : construction d'une solution avec l'algorithme des ensembles actifs

Dans cette partie nous exposons comment construire une solution à notre problème en utilisant l'algorithme des ensembles actifs.

### Initialisation

On suppose dans un premier temps qu'à l'itération  $k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  le problème (14) est résolu et que l'on connaît  $z_b^{k+1}$ . On note  $z_b^{k+1} = z_b$  et on définit les ensembles :

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i=0)} = \{(x, y) \in \Gamma_S^{k+1} | z_b(x) = b(x)\}$$

$$\mathcal{E}_N^{(k+1,i=0)} = \Gamma_S^{k+1} \setminus \mathcal{E}_R^{(k+1,i=0)}$$

### Itération

On se donne un entier  $i_{max} \in \mathbb{N}$  tel que  $i_{max} \geq 1$  alors pour  $i = 1, \dots, i_{max}$  et si :

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i)} \neq \mathcal{E}_R^{(k+1,i-1)}$$

on applique l'algorithme suivant :

#### Etape 1

On suppose les ensembles  $\mathcal{E}_R^{(k+1,i)}$  et  $\mathcal{E}_N^{(k+1,i)}$  connus et définis par :

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i)} = \{(x, y) \in \Gamma_S^{k+1} | z_b(x) = b(x)\}$$

$$\mathcal{E}_N^{(k+1,i)} = \Gamma_S^{k+1} \setminus \mathcal{E}_R^{(k+1,i)}$$

Par définition ces deux ensembles vérifient :

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i)} \cap \mathcal{E}_N^{(k+1,i)} = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_R^{(k+1,i)} \cup \mathcal{E}_N^{(k+1,i)} = \Gamma_S^{k+1}$$

On résout le problème suivant :

Trouver  $(\vec{u}^{(k+1,i)}, p^{(k+1,i)})$  tel que :

$$\begin{cases} \zeta \vec{u}^{(k+1,i)} - \operatorname{div}\{2\eta (D(\vec{u}^{(k+1,i)})) D(\vec{u}^{(k+1,i)}) - p^{(k+1,i)}\} & = \vec{f}^{(k,i)} \\ \operatorname{div}(\vec{u}^{(k+1,i)}) & = 0 \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_T^{(k+1,i)} = 0 \\ u_N^{(k+1,i)} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_y \\ \sigma^{(k+1,i)} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_a^{k+1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^{(k+1,i)} = -p_w^{(k+1,i)} \\ \sigma_T^{(k+1,i)} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_e \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^{(k+1,i)} = -p_w^{(k+1,i)} \\ \sigma_T^{(k+1,i)} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathcal{E}_N^{(k,i)} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_N^{(k+1,i)}(x, y) = \kappa \\ \sigma_T^{(k+1,i)} = -\frac{(-p_w - \sigma_N^{(k+1,i)})q}{A_s} u_T \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathcal{E}_R^{(k,i)} \end{array} \right.$$

## Etape 2

$\vec{u}^{(k+1,i)}$  connu on calcule :

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i),restant} = \left\{ (x, y) \in \Gamma_S^{k+1} \mid z_b^{k+1}(x) = b(x) \text{ et } \sigma_N^{(k+1,i)} < -p_w^{(k+1,i)} \right\}$$

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i),sortant} = \mathcal{E}_R^{(k,i)} \setminus \mathcal{E}_R^{(k,i),restant}$$

$$\mathcal{E}_N^{(k+1,i),restant} = \left\{ (x, y) \in \Gamma_S^{k+1} \mid z_b^{k+1}(x) > b(x) \text{ et } u_N^{(k+1,i)}(x, y) < \kappa \right\}$$

$$\mathcal{E}_N^{(k+1,i),sortant} = \mathcal{E}_N^{(k,i)} \setminus \mathcal{E}_N^{(k,i),restant}$$

On pose alors :

$$\mathcal{E}_R^{(k+1,i+1)} = \mathcal{E}_R^{(k+1,i),restant} \cup \mathcal{E}_N^{(k+1,i),sortant}$$

$$\mathcal{E}_N^{(k+1,i+1)} = \Gamma_S^{k+1} \setminus \mathcal{E}_R^{(k+1,i+1)}$$

## 7 Discrétisation en espace

Pour résoudre le sous-problème de l'algorithme, à savoir les extensions des équations de Navier-Stokes on utilise des éléments finis mixtes.

Dans Elmer/Ice (logiciel que nous avons utilisé pour traiter ce problème) on peut utiliser les éléments suivants :

- Des éléments de Taylor-Hood  $P_2/P_1 : P_2$  pour la vitesse et  $P_1$  pour la pression ;
- Une extension des éléments de Taylor-Hood aux quadrangles, les éléments  $Q_{2i}/Q_1$  où les éléments  $Q_{2i}$  sont des éléments  $Q_2$  à huit noeuds où ceux-ci sont situés aux sommets du quadrangle et au milieu des arêtes de celui-ci. Ici la paire d'éléments  $Q_{2i}/Q_1$  est utilisée pour la discrétisation des variables  $\vec{u}$  et  $p$ , respectivement du sous-problème de Signorini ;
- Les éléments bulles sont des éléments  $P_1, P_2, Q_1$  ou encore  $Q_2$  à huit noeuds auxquels on rajoute au moment de l'assemblage un noeud au centre ;

- Les éléments  $p$  bulles : ce sont des éléments  $P_1$  ou  $Q_1$  auxquels on a rajouté au centre des arêtes au moment de l'assemblage ;

A noter que dans ce travail, pour les calculs numériques nous avons utilisé des éléments bulles.



## Troisième partie

# Résultats numériques

Dans cette partie nous exposons les premiers résultats numériques que nous avons obtenus au cours de ce travail.

## 8 Préliminaires

Afin de saisir les phénomènes en jeu dans la glace nous avons dans un premier temps visualisé certaines grandeurs telles la vitesse ou les contraintes. Nous avons notamment obtenu la figure (3).

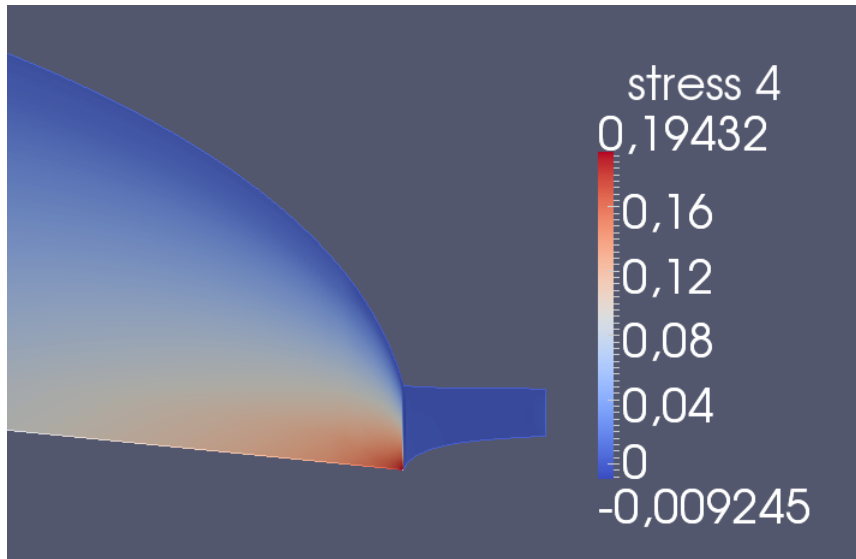


FIGURE 3 – Contraintes de cisaillement au voisinage du point  $x_G$

Nous avons alors observé un pic au niveau du point  $x_G$  et avons fait l'hypothèse de l'existence d'une singularité en ce point relativement au module du tenseur des contraintes déviatoires. De plus nous avons été confortés dans cette hypothèse par l'idée qu'avant le point  $x_G$  la glace s'écoule et est soumise à des contraintes longitudinales tandis qu'après ce point la glace est soulevée par l'eau et est donc soumise à des contraintes latérales, les contraintes au niveau du point  $x_G$  sont donc très importantes.

## 9 Aspects théoriques

Nous faisons l'hypothèse que  $x_G$  est un point singulier pour le tenseur des contraintes déviatoires, ainsi on suppose qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_G$ , un réel  $\beta < 0$  et une constante  $C_1$  tels que :

$$|\sigma_D| = C_1 |x - x_G|^\beta \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad (19)$$

D'autre part par définition de la loi de Glen il existe une constante réelle  $C_2 > 0$  telle que :

$$|\sigma_D| = C_2 |D(\vec{u})|^{\frac{1}{n}} \quad (20)$$

On déduit alors de (19) et (20) :

$$|D(\vec{u})| = C_3 |x - x_G|^{\beta n} \quad (21)$$

avec  $C_3 = \frac{C_1}{C_2}$ . On en déduit alors la relation :

$$|\vec{u}| = C_3 |x - x_G|^{\beta n + 1} + v_G$$

où  $v_G = |\vec{u}(x_G)|$

On peut encore réécrire (9) :

$$||\vec{u}| - v_G| = C_3 |x - x_G|^{\beta n + 1} \quad (22)$$

Réciproquement on montre que si (22) est vérifiée alors (19).

Numériquement nous nous sommes donc attachés à vérifier que le logiciel Elmer/Ice "capturait" cette singularité relativement au tenseur des contraintes déviatoires au point  $x_G$ . On a donc cherché un réel  $\beta$  tel que la relation (19) soit vérifiée. Afin de valider cette valeur de  $\beta$  nous nous sommes également attachés à retrouver les relations (21) et (22).

## 9.1 Deux minoration de $\beta$

Dans un premier temps on considère l'énergie de dissipation (c'est-à-dire l'énergie produite par la déformation) dans le voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_G$  :

$$E(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \sigma_D : D(\vec{u}) d\mathcal{V} \quad (23)$$

Or d'après (20) il existe une constante  $C$  telle que :

$$\sigma_D : D(\vec{u}) = C |D(\vec{u})|^{\frac{1}{n} + 1} \quad (24)$$

et d'après (21) si on note  $r = |x - x_G|$  alors :

$$|D(\vec{u})| = Cr^{\beta n} \quad (25)$$

Par suite (24) s'écrit :

$$\sigma_D : D(\vec{u}) = Cr^{\beta n (\frac{1}{n} + 1)} = Cr^{\beta + \beta n} \quad (26)$$

D'autre part on peut considérer que le voisinage  $\mathcal{V}$  est une portion de disque incluse dans le domaine  $\Omega$  on note :

$$\mathcal{V} = \{(r, \theta) | 0 < r \leq r_0 \text{ et } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\} \quad (27)$$

Alors d'après (26) et (27), (23) se réécrit :

$$E(\mathcal{V}) = \int_0^{r_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} C r^{\beta+\beta n} r d\theta$$

Soit :

$$E(\mathcal{V}) = C \int_0^{r_0} r^{1+\beta+\beta n} dr$$

D'où finalement :

$$E(\mathcal{V}) = C [r^{2+\beta+\beta n}]_0^{r_0} \quad (28)$$

Or l'énergie de dissipation étant finie l'égalité (28) est vraie si et seulement si :  $2 + \beta + \beta n > 0$  c'est-à-dire si et seulement si :

$$\beta > -\frac{2}{n+1} = -\frac{1}{2}$$

Néanmoins on peut obtenir une meilleure minoration de  $\beta$  plus facilement, en effet la vitesse étant continue il vient de (22) que  $\beta n + 1 \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$\beta \geq -\frac{1}{n} = -\frac{1}{3} \quad (29)$$

## 10 Test numérique du maillage

Avant d'exposer les premiers résultats numériques que nous avons obtenus il est nécessaire d'exposer comment nous avons obtenu la géométrie et comment nous avons maillé celle-ci.

### 10.1 Construction de la géométrie

Pour construire les maillages que nous avons utilisés dans ce travail nous nous sommes basés sur une géométrie et un maillage fournis par l'équipe du LGGE avec laquelle nous avons travaillé. Tout d'abord, cette géométrie est obtenue en simulant une couche de glace de faible épaisseur (quelques dizaines de mètres) que l'on laisse évoluer suffisamment longtemps pour obtenir une solution stationnaire. Nous donnons en figure (4) une image de cette géométrie.

Nous pouvons ensuite mailler cette géométrie de différentes manières.

### 10.2 Les différents maillages

Pour mailler cette géométrie nous commençons par mailler un rectangle puis nous extrudons ce maillage pour qu'il corresponde à la géométrie présentée en figure (4).

L'équipe du LGGE nous a fourni un maillage. Ce maillage que nous désignerons dans la suite par "drastic" a été conçu de manière très pragmatique en vue de capter les phénomènes physiques qui ont lieu au niveau de la ligne d'échouage et de

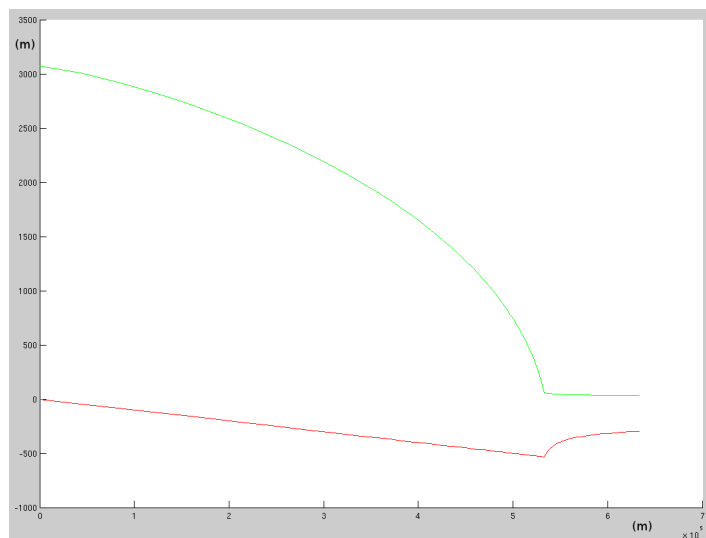


FIGURE 4 – Géométrie utilisée pour les calculs numériques

limiter les coûts de calcul en limitant le nombre d'éléments dans les zones qui ne sont pas à proximité de la ligne d'échouage. Ce maillage est formé de quadrangles et de triangles. Autour du point  $x_G$  il y a une zone de raffinement composée de quadrangles. L'accroissement horizontal des mailles à partir de  $x_G$  se fait selon une suite géométrique de raison 2. En dehors de la zone de raffinement l'espacement horizontal des mailles est régulier. Verticalement il y a deux fois plus de mailles dans la zone de raffinement qu'à l'extérieur de cette zone. De plus, verticalement les mailles sont régulièrement espacées, il n'y a pas de progression géométrique de la taille de celles-ci. La jonction entre la zone de raffinement et l'extérieur de cette zone se fait avec des éléments triangulaires. La figure (5) présente une image du maillage "drastic".

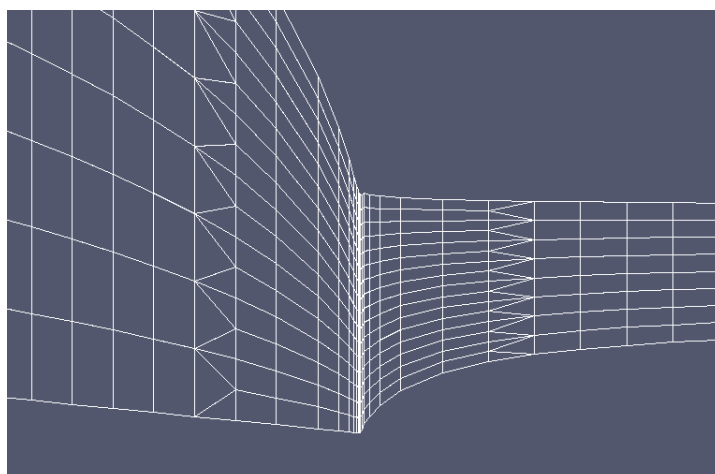


FIGURE 5 – Visualisation avec Paraview du maillage "drastic" après transformation

Afin de saisir la singularité autour du point  $x_G$  nous avons utilisé différents

maillages basés sur le principe du maillage "drastic" et qui diffèrent les uns des autres par la taille de la première maille autour de  $x_G$ , le nombre de mailles selon l'axe des ordonnées la taille des mailles en dehors de la zone de raffinement. On appelle drastic\_XX\_YY ces maillages où XX désigne la taille de la première maille autour de  $x_G$  et YY le nombre de mailles selon l'axe des ordonnées dans la zone de raffinement. Dans notre travail nous avons utilisé trois maillages : drastic\_10\_65, drastic\_20\_33 et drastic\_40\_17. De plus à chaque fois que nous avons augmenté la taille de la première maille autour de  $x_G$  nous avons divisé par deux la taille des éléments en dehors de la zone de raffinement afin d'avoir un maillage fin qui courbe uniformément le domaine.

### 10.3 Test numérique des maillages

Pour tester numériquement si les maillages capturaient la singularité au niveau du point  $x_G$  nous avons tracé en échelle log-log les courbes du module du tenseur des contraintes suivant plusieurs lignes choisies de manière à "quadriller" le voisinage du point  $x_G$ . Voir la figure (6) pour la position de ces lignes.

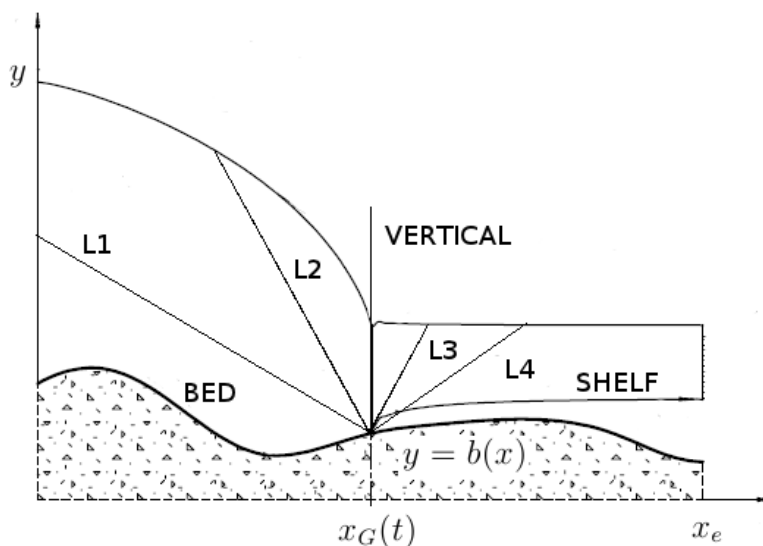


FIGURE 6 – Lignes selon lesquelles nous avons effectué les calculs

Les lignes BED et SHELF désignant respectivement la partie de la glace en contact avec le socle rocheux et la partie flottante de la glace. A noter que dans les calculs que nous avons effectués et contrairement à ce qui apparaît sur le schéma la ligne L4 passe intégralement dans la glace.

Alors en nous basant sur la relation (19) nous avons cherché à voir si les courbes du module des contraintes avaient une allure proche de celle d'une droite en affichage log-log, ce qui mettrait en évidence l'existence d'une singularité au voisinage de  $x_G$ . Nous avons ainsi établi numériquement la valeur de  $\beta$ . Puis nous avons cherché à voir si la courbe du module du tenseur des taux de déformation et la courbe du module des vitesses avaient une allure proche de celle d'une droite dont les pentes

seraient données respectivement par les relations (21) et (22). En effet en affichage log-log ces courbes devraient suivre une droite de pente respective  $\beta n$  et  $\beta n + 1$ .

Nous avons reporté sur la figure (7) les mesures réalisées sur la ligne BED dans le cas du maillage `drastic_40_17`.

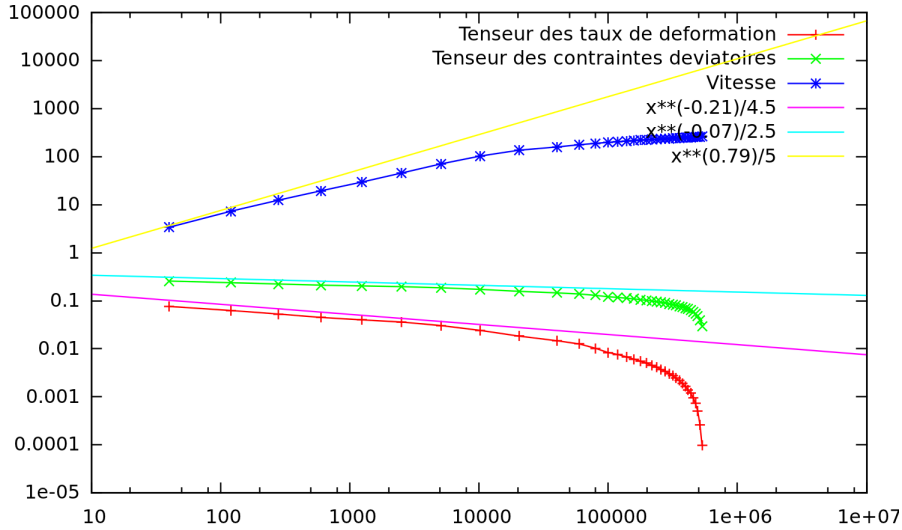


FIGURE 7 – Modules des tenseurs et de la vitesse sur la ligne BED avec le maillage `drastic_40_17`

On observe alors que conformément aux prévisions le graphe du module du tenseur des contraintes déviatoires en affichage log-log suit bien une droite, celle-ci étant de pente  $-0.07$ . Il est important de souligner que cette valeur de  $\beta$  déterminée expérimentalement vérifie l'inégalité (29). On remarque également que le graphe du module du tenseur des taux de déformation suit une droite de pente  $3 \times (-0.07)$ . Cependant la pente  $0.79$  semble être légèrement trop importante pour le module de la vitesse sans pour autant être excessive.

Nous reportons en figure (8) les mesures réalisées sur la ligne SHELF dans le cas du maillage `drastic_40_17`. Là encore il est important de souligner que la valeur de  $\beta$  déterminée expérimentalement ( $-0.11$ ) vérifie l'inégalité (29).

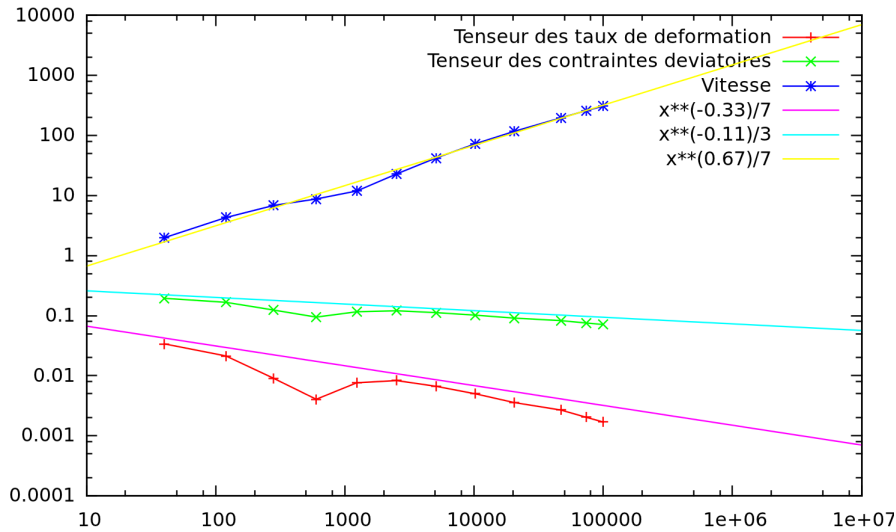


FIGURE 8 – Modules des tenseurs et de la vitesse sur la ligne SHELF avec le maillage drastic\_40\_17

On observe alors que d’une part le comportement des modules observés diffèrent des comportements observés sur la ligne BED (au sens où l’allure des courbes n’est pas la même) et d’autre part la pente des droites que l’on considère ici est légèrement plus prononcée dans le cas des modules des tenseurs que précédemment. Ainsi nous avons mis en évidence la présence d’une singularité selon les lignes BED et SHELF et que cette singularité avait un comportement différent selon que l’on considère la partie posée et flottante de la glace et est plus prononcée sur la partie flottante. Nous faisons l’hypothèse que cela peut être dû au fait que sur cette dernière partie la glace est soulevée du socle rocheux et est donc soumise à des contraintes relativement plus importantes.

D’autre part si l’on considère par exemple le module du tenseur des taux de déformation on observe la même singularité selon les lignes L1, L2, L3, L4 et VERTICAL comme on peut le voir sur la figure (9).

On observe la même singularité relativement au module du tenseur des contraintes déviatoires que celle observée sur les figures (7) et (8).

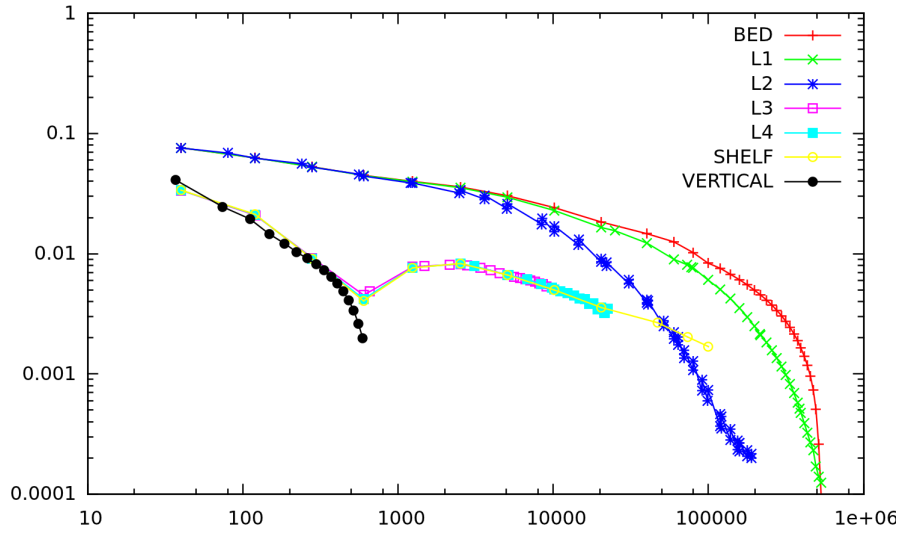


FIGURE 9 – Modules du tenseur des taux de déformation avec le maillage drastic\_40\_17 selon les différentes lignes

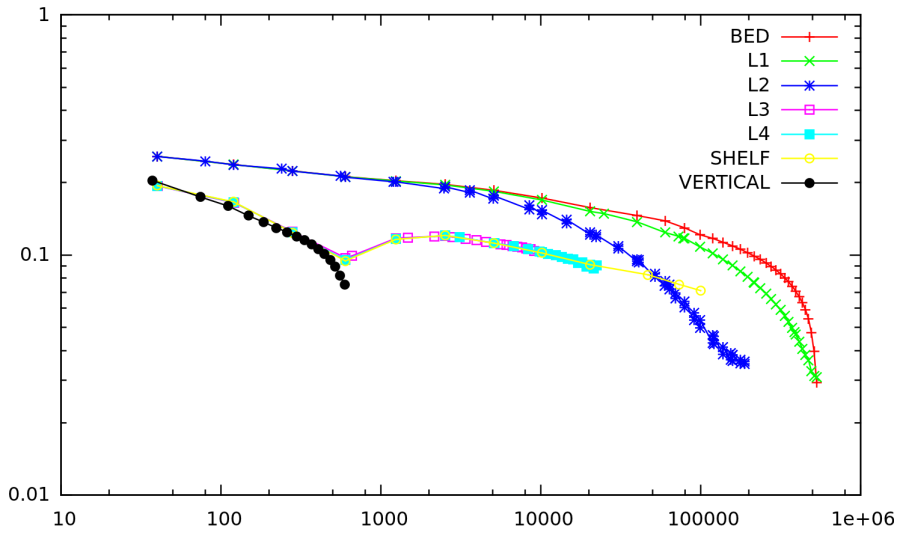


FIGURE 10 – Modules du tenseur contraintes déviatoires avec le maillage drastic\_40\_17 selon les différentes lignes

Enfin on observe que le module de la vitesse selon chacune des lignes a le même comportement que celui observé sur les figures (7) et (8) :

On a ainsi mis en évidence que le comportement du module du tenseur des taux de déformation diffère selon que l'on considère une ligne située dans la partie posée de la glace ou une ligne située dans la partie flottante de la glace. A noter que pour la ligne VERTICAL située entre les parties flottante et posée le module du tenseur adopte le même comportement que pour la partie flottante au voisinage du point  $x_G$ .

On a mis en évidence l'existence d'une singularité au niveau de la ligne d'échouage



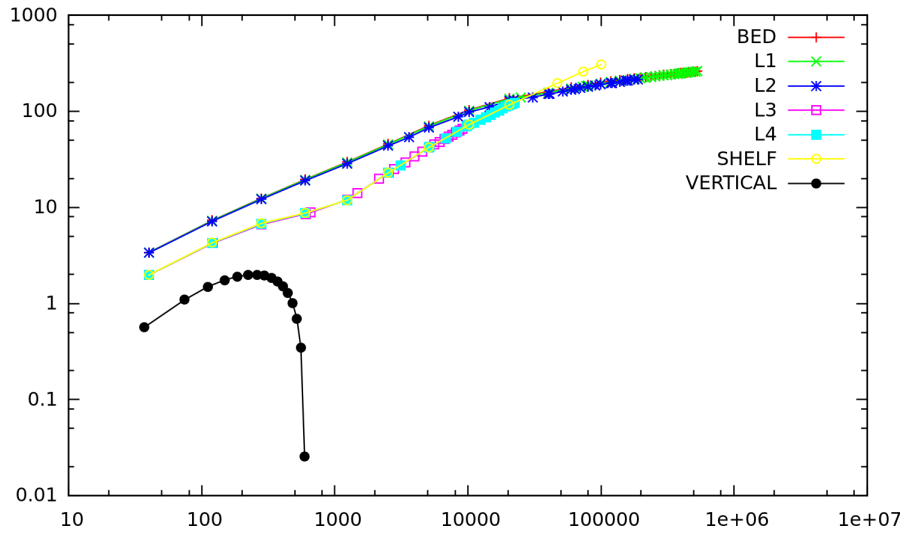


FIGURE 11 – Modules de la vitesse avec le maillage `drastic_40_17` selon les différentes lignes

dans le cas du maillage `drastic_40_17`. Il nous reste à voir que cela reste valable pour des maillages plus fins. Pour cela on trace sur les figures (12), (13) et (14), respectivement, le graphe du module du tenseur des taux de déformation, le graphe du module du tenseur des contraintes déviatoires et le graphe le module de la vitesse suivant la ligne BED pour les trois maillages `drastic_40_17`, `drastic_20_33` et `drastic_10_17`.

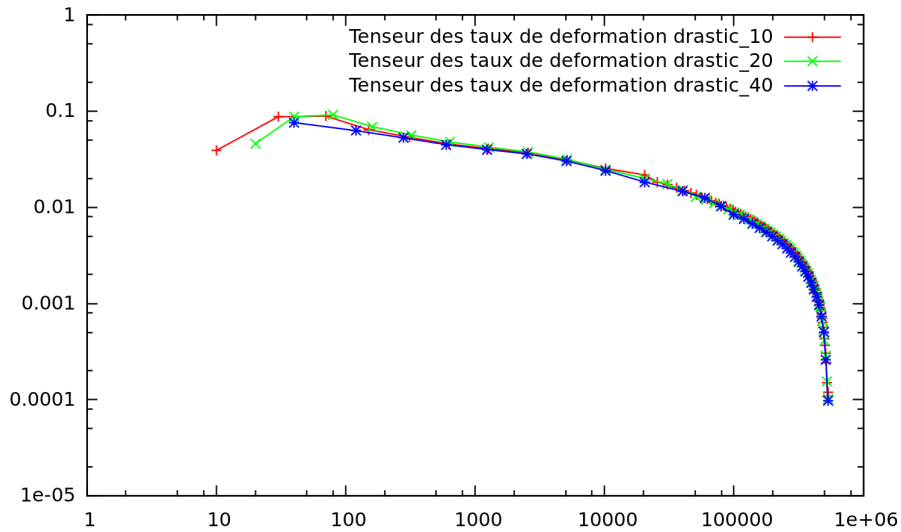


FIGURE 12 – Modules des tenseurs des taux de déformation pour les maillages `drastic_40_17`, `drastic_20_33` et `drastic_10_17` sur le BED

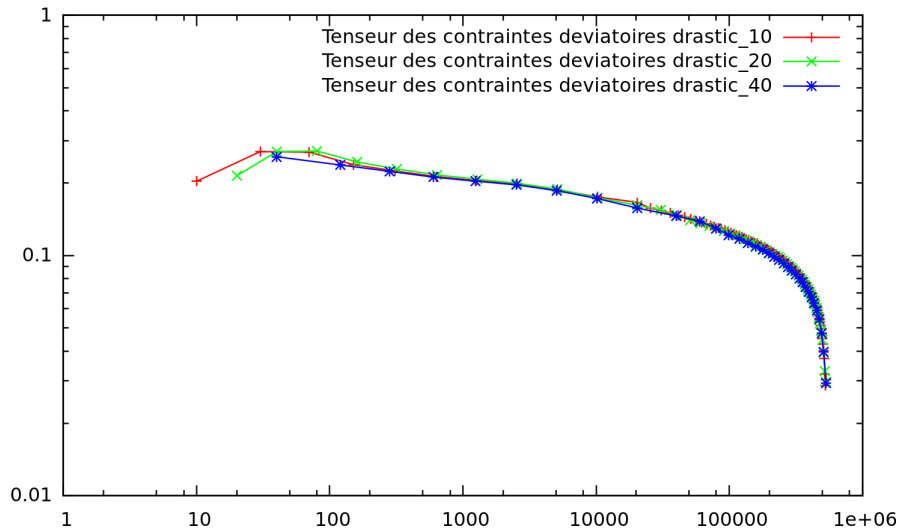


FIGURE 13 – Modules des tenseurs des taux de déformation pour les maillages drastic\_40\_17, drastic\_20\_33 et drastic\_10\_17 sur le BED

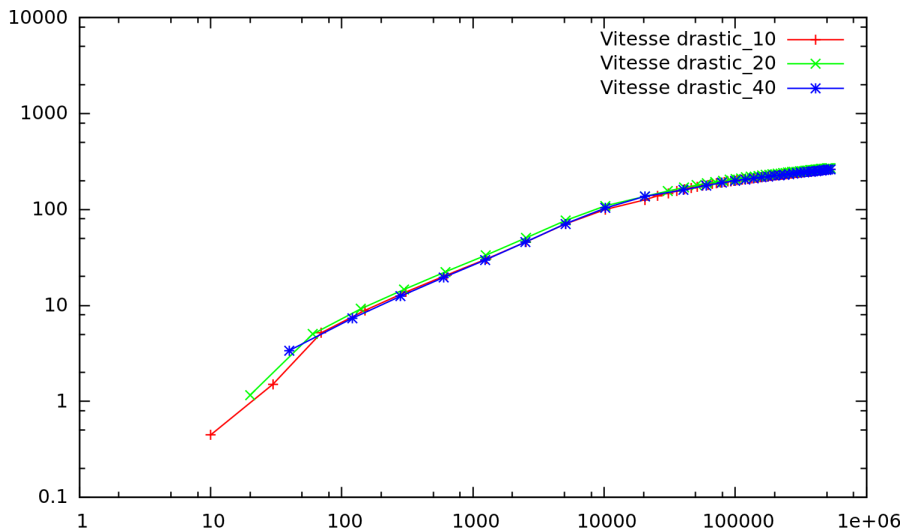


FIGURE 14 – Modules des tenseurs des taux de déformation pour les maillages drastic\_40\_17, drastic\_20\_33 et drastic\_10\_17 sur le BED

On constate que le comportement des différentes grandeurs observées reste le même dans le cas des maillages drastic\_20\_33 et drastic\_10\_17 que dans le cas du maillage drastic\_40\_17. Ce qui confirme le fait que les maillages drastic capturent la singularité dans le voisinage du point  $x_G$ . On a effectué ici les calculs dans le cas de ligne BED mais les calculs selon les autres lignes montrent que la singularité est toujours capturée quand on utilise des maillages plus fins.



# Conclusion et perspectives

En conclusion de ce travail nous pouvons dire que cette étude a mis en lumière les difficultés mathématiques de la modélisation des écoulements glaciaires (loi de frottement et loi de comportement non linéaires) et plus particulièrement l'approche comme un problème de type Signorini avec laquelle nous avons choisi d'aborder ce problème. En effet les problèmes de contact avec frottement sont réputés pour être un sujet difficile dans lequel de nombreuses questions restent ouvertes. Formuler le problème de la ligne d'échouage comme un problème de contact en est certes une application originale mais pose de nombreux problèmes mathématiques relativement à la loi de frottement choisie : en effet en glaciologie les lois de frottement peuvent changer selon la nature du socle rocheux considéré (rigide, sédimentaire ...) et de la présence ou non de cavité sous-glaciaire avec de l'eau sous pression qui sont donc autant de paramètres du modèle difficiles à évaluer. D'autre part la formulation du problème de la ligne d'échouage sous forme d'un problème de type Signorini pose également le problème de l'existence et de l'unicité de solution et plus particulièrement l'existence et l'unicité d'un point fixe à l'application  $B$  définie en (18). A notre connaissance il n'y a pas de travaux comparables à ceux cités dans [6], [7] et [8] pour le problème de type Signorini tel que nous l'avons énoncé ici, les questions restent donc nombreuses et ouvertes.

Numériquement nos premiers travaux nous ont permis comme on l'a vu de mettre en évidence l'existence d'une singularité au voisinage du point  $x_G$ , phénomène qui n'est pas pris en compte par les modèles qui approximent les équations de Navier-Stokes et qui a permis de ce point de vue de conforter l'approche adoptée au LGGE consistant justement à ne pas approximer ces équations, c'est le modèle "*full Stokes*".

D'autre part au cours de ces expériences numériques nous avons pu constater la dépendance de la solution au maillage, un nombre trop important de mailles ou des mailles trop fines conduisent à des résultats bien différents d'une expérimentation à l'autre. Cette dépendance de la solution au maillage appelle à mettre en oeuvre des méthodes de raffinement de maillage plus efficaces du type raffinement de maillage via les estimateurs d'erreur *a posteriori* pour pouvoir obtenir des solutions acceptables avec un coût de calcul optimal.

Au delà de l'intérêt purement mathématiques et numérique le problème de la ligne d'échouage et par suite le problème de la montée du niveau des mers sont des problèmes d'une importance cruciale qui vont se poser de manière de plus en plus aiguë dans les années à venir avec le réchauffement climatique. Les enjeux tant économiques (coût des destructions, des réparations, des aménagements ...) que humains (recul de la ligne côtière, déplacements de populations ...) sont colossaux et pouvoir prédire avec précision l'importance de ces changements permettrait d'en limiter l'impact à long terme.



# Annexes

## A Démonstration de l'énoncé section 6.1.3

Soit  $\vec{u} \in V$  solution du problème (15) et soit  $\vec{v} \in K$  alors :

$$\int_{\Omega} \zeta \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) + \operatorname{div} \{2\eta D(\vec{u}) - pI\} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Omega \quad (30)$$

D'après la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \{2\eta D(\vec{u}) - pI\} d\Omega = - \int_{\Omega} 2\eta D(\vec{u}) : D(\vec{v} - \vec{u}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Gamma \quad (31)$$

En injectant (31) dans (30) on obtient :

$$\int_{\Omega} \zeta \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) + 2\eta D(\vec{u}) : D(\vec{v} - \vec{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Omega \quad (32)$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} \sigma_T (v_T - u_T) + \sigma_N (v_N - u_N) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_S} -\alpha (g_N) u_T (v_T - u_T) + g_N (v_N - u_N) d\Gamma - \int_{\Gamma_e} p_w (v_N - u_N) d\Gamma \end{aligned}$$

Alors (32) s'écrit :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) - \int_{\Gamma_S} -\alpha (g_N) u_T (v_T - u_T) + g_N (v_N - u_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} p_w (v_N - u_N) d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) d\Omega$$

Soit encore :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) + \int_{\Gamma_S} \alpha (g_N) u_T (v_T - u_T) d\Gamma - F(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_S} g_N (v_N - u_N) d\Gamma \quad (33)$$

On ajoute alors  $\int_{\Gamma_S} p_w (v_N - u_N) d\Gamma$  à chaque membre de (33) :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) + \int_{\Gamma_S} \alpha (g_N) u_T (v_T - u_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_S} p_w (v_N - u_N) d\Gamma - F(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_S} (g_N + p_w) (v_N - u_N) d\Gamma \quad (34)$$

Or si  $u_N < \kappa$  alors  $g_N = -p_w$  et  $(g_N + p_w)(v_N - u_N) = 0$ .

Sinon si  $u_N = \kappa$  alors  $g_N < -p_w$  et :

$$(g_N + p_w)(v_N - u_N) = (g_N + p_w)(v_N - \kappa - (u_N - \kappa)) \geq 0$$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_S} (g_N + p_w)(v_N - u_N) d\Gamma \geq 0 \quad (35)$$

On déduit enfin de (34) et (35) :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) + \int_{\Gamma_S} \alpha(g_N)u_T(v_T - u_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_S} p_w(v_N - u_N) d\Gamma - F(\vec{v} - \vec{u}) \geq 0$$

Soit :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) + \int_{\Gamma_S} \alpha(g_N)u_T(v_T - u_T) + p_w(v_N - u_N) d\Gamma \geq F(\vec{v} - \vec{u})$$

Donc une solution du problème (15) vérifie le problème (16).

Soit maintenant  $\vec{u}$  solution du problème (16) alors :

$$a(\vec{u}; \vec{v} - \vec{u}) + \int_{\Gamma_S} \alpha(g_N)u_T(v_T - u_T) + p_w(v_N - u_N) d\Gamma - F(\vec{v} - \vec{u}) \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in K \quad (36)$$

Par définition de  $J$  (36) est équivalent à :

$$\hat{J}[\vec{u}](\vec{v} - \vec{u}) \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in K$$

$J$  étant strictement convexe on a :

$$J(\vec{v}) - J(\vec{u}) > \hat{J}[\vec{u}](\vec{v} - \vec{u}) \geq 0$$

On en déduit :

$$J(\vec{v}) > J(\vec{u}) \quad \forall \vec{v} \in K$$

si  $\vec{u} \neq \vec{v}$

Soit encore :

$$\vec{u} = \underset{\vec{v} \in K}{\operatorname{arginf}} J(\vec{v})$$

Ainsi toute solution du problème (16) est solution du problème (17). De plus la stricte convexité de  $J$  nous permet de conclure à l'unicité de cette solution.

Enfin on suppose qu'il existe  $\vec{u} \in V$  vérifiant le problème (17).

On définit l'indicatrice :

$$\mathbf{1}_{\mathcal{K}}(\vec{u}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_N > \kappa \text{ sur } \Gamma_S \\ 0 & \text{si } u_N \leq \kappa \text{ sur } \Gamma_S \end{cases}$$

Alors le problème (17) est équivalent au problème suivant :

$$\text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que : } \quad \vec{u} = \underset{\vec{v} \in V}{\operatorname{arginf}} (J(\vec{v}) + \mathbf{1}_{\mathcal{K}}(\vec{v})) \quad (37)$$

On introduit le lagrangien augmenté défini sur  $V \times H \times Q \times H$  par :

$$\begin{aligned}
L_a((\vec{u}, \vec{\gamma}), (p, \vec{\lambda})) &= J(\vec{u}) + \mathbf{1}_K(\vec{\gamma}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{u}) \, d\Omega \\
&\quad + \int_{\Gamma_S} \vec{\lambda} \cdot (\vec{u} - \vec{\gamma}) \, d\Gamma + \frac{a}{2} \int_{\Gamma_S} |\vec{u} - \vec{\gamma}|^2 \, d\Gamma
\end{aligned}$$

où  $a$  est une constante réelle strictement positive.

Le problème (37) est équivalent au problème suivant :

Trouver  $((\vec{u}, \vec{\gamma}), (p, \vec{\lambda})) \in V \times H \times Q \times H$  tel que :

$$((\vec{u}, \vec{\gamma}), (p, \vec{\lambda})) = \inf_{\substack{\vec{v} \in V \\ \vec{\delta} \in H}} \sup_{\substack{q \in Q \\ \vec{\mu} \in H}} L_a((\vec{v}, \vec{\delta}), (q, \vec{\mu})) \quad (38)$$

On définit alors la fonctionnelle duale de  $J$  sur  $H$  :

$$J^*(\vec{\lambda}) = - \inf_{\substack{\vec{u} \in V \\ \vec{\gamma} \in H}} \sup_{p \in Q} L_a((\vec{u}, \vec{\gamma}), (p, \vec{\lambda}))$$

Le problème (38) est équivalent à :

$$\text{Trouver } \vec{\lambda} \in H \text{ tel que : } \quad \vec{\lambda} = \operatorname{arginf}_{\vec{\mu} \in H} J^*(\vec{\mu}) \quad (39)$$

On résout (39) en utilisant un algorithme de descente à pas fixe sur  $J^*$ , l'algorithme d'Uzawa.

A chaque itération  $m$  on a :

$$\vec{\lambda}^{m+1} = \vec{\lambda}^m - \rho \overrightarrow{\nabla}_{\vec{\lambda}} J^*(\vec{\lambda}^m) \quad (40)$$

où  $\rho > 0$  désigne le pas de descente.

Or  $\overrightarrow{\nabla}_{\vec{\lambda}} J^* = \frac{\partial L_a}{\partial \vec{\lambda}} = \vec{u}^{m+1} - \vec{\gamma}^{m+1}$ , ainsi (40) s'écrit :

$$\vec{\lambda}^{m+1} = \vec{\lambda}^m - \rho(\vec{u}^{m+1} - \vec{\gamma}^{m+1})$$

A chaque itération il faut donc calculer :

$$((\vec{u}^{m+1}, \vec{\gamma}^{m+1}), p^{m+1}) = \operatorname{arg} \inf_{\substack{\vec{u} \in V \\ \vec{\gamma} \in H}} \sup_{p \in Q} L_a((\vec{u}, \vec{\gamma}), (p, \vec{\lambda}^m))$$

On résout donc le problème (38) en suivant l'algorithme :

### Initialisation

$\vec{\lambda}^{(0)}$  et  $\vec{\gamma}^{(0)}$  sont donnés.



## Itération

(1)  $\vec{\lambda}^m$  est connu, on résout le problème intermédiaire :

Trouver  $((\vec{u}^{m+1}, \vec{\gamma}^{m+1}), p^{m+1}) \in V \times H \times Q$  tel que :

$$((\vec{u}^{m+1}, \vec{\gamma}^{m+1}), p^{m+1}) = \arg \inf_{\substack{\vec{u} \in V \\ \vec{\gamma} \in H}} \sup_{p \in Q} L_a((\vec{u}, \vec{\gamma}), (p, \vec{\lambda}^m))$$

On décompose celui-ci en deux sous-problèmes :

(1a) Trouver  $(\vec{u}^{m+1}, p^{m+1}) \in V \times Q$  tel que :

$$(\vec{u}^{m+1}, p^{m+1}) = \arg \inf_{\vec{v} \in V} \sup_{q \in Q} L_a((\vec{v}, \vec{\gamma}^m), (q, \vec{\lambda}^m)) \quad (41)$$

(1b) Trouver  $\vec{\gamma}^{m+1} \in H$  tel que :

$$\vec{\gamma}^{m+1} = \arg \inf_{\vec{\delta} \in H} L_a((\vec{u}^{m+1}, \vec{\delta}), (p^{m+1}, \vec{\lambda}^m))$$

(2) On met à jour  $\vec{\lambda}$  :  $\vec{\lambda}^{m+1} = \vec{\lambda}^m - \rho(\vec{u}^{m+1} - \vec{\gamma}^{m+1})$

## Etape (1a)

Soit  $(\vec{\gamma}^m, \vec{\lambda}^m) \in H^2$ , résoudre le problème (41) est équivalent à résoudre le problème :

Trouver  $(\vec{u}^{m+1}, p^{m+1}) \in V \times Q$  tel que :  $\widehat{L}_a[(\vec{u}^{m+1}, \vec{\gamma}^m), (p^{m+1}, \vec{\lambda}^m)]((\vec{v}, \vec{0}), (q, \vec{0})) = 0$  (42)

où  $\widehat{L}_a$  désigne la dérivée de Fréchet de  $L_a$ .

Or :

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_a[(\vec{u}^{m+1}, \vec{\gamma}^m), (p^{m+1}, \vec{\lambda}^m)]((\vec{v}, \vec{0}), (q, \vec{0})) \\ &= \int_{\Omega} (2\eta D(\vec{u}^{m+1}) : D(\vec{v}) + \zeta \vec{u}^{m+1} \cdot \vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} (p^{m+1} \operatorname{div}(\vec{v}) + q \operatorname{div}(\vec{u}^{m+1})) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_e \cup \Gamma_S} p_w v_N d\Gamma + \int_{\Gamma_S} \alpha u_T^{m+1} v_T d\Gamma + \int_{\Gamma_S} (\lambda_N^m v_N + \lambda_T^m v_T) d\Gamma + a \int_{\Gamma_S} (u_N^{m+1} v_N + u_T^{m+1} v_T) d\Gamma \\ &- a \int_{\Gamma_S} (v_N \gamma_N^m + v_T \gamma_T^m) d\Gamma \end{aligned}$$

$(\vec{\gamma}^m, \vec{\lambda}^m) \in H^2$  étant donné, (42) se reformule :

Trouver  $(\vec{u}^{m+1}, p^{m+1}) \in V \times Q$  tel que :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (2\eta D(\vec{u}^{m+1}) : D(\vec{v})) + \zeta \vec{u}^{m+1} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_S} a u_N^{m+1} v_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} (\alpha + a) u_T^{m+1} v_T \, d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} p^{m+1} \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_e} p_w v_N \, d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_S} (-p_w - \lambda_N^m + a\gamma_N^m) v_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} (-\lambda_T^m + a\gamma_T^m) v_T \, d\Gamma \quad \forall \vec{v} \in V \\
& \text{et } \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\vec{u}^{m+1}) \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q
\end{aligned} \tag{43}$$

Or  $p^{m+1} \operatorname{div}(\vec{v}) = p^{m+1} I : D(\vec{v})$  et d'après la formule de Green :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (2\eta D(\vec{u}^{m+1}) : D(\vec{v}) - p^{m+1} I : D(\vec{v})) \, d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(2\eta D(\vec{u}^{m+1}) - p^{m+1} I) \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma^{m+1} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} \, d\Gamma
\end{aligned}$$

où  $\sigma^{m+1} = 2\eta D(\vec{u}^{m+1}) - p^{m+1} I$

On note que :

$$\int_{\partial\Omega} (\sigma^{m+1} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} (\sigma_N^{m+1} v_N + \sigma_T^{m+1} v_T) \, d\Gamma$$

(43) se réécrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\zeta \vec{u}^{m+1} + \operatorname{div}(2\eta D(\vec{u}^{m+1}) - p^{m+1} I)) \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_S} a u_N^{m+1} v_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} (\alpha + a) u_T^{m+1} v_T \, d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_S} (\sigma_N^{m+1} v_N + \sigma_T^{m+1} v_T) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_a \cup \Gamma_e} (\sigma_N^{m+1} v_N + \sigma_T^{m+1} v_T) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_y} \sigma_T^{m+1} v_T \, d\Gamma \\
& = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_e} p_w v_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} (-p_w - \lambda_N^m + a\gamma_N^m) v_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} (-\lambda_T^m + a\gamma_T^m) v_T \, d\Gamma \quad \forall \vec{v} \in V
\end{aligned}$$

On en déduit la forme forte vérifiée à chaque itération par  $(\vec{u}^{m+1}, p^{m+1})$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\zeta \vec{u}^{m+1} - \operatorname{div}(2\eta D(\vec{u}^{m+1}) - p^{m+1}I) = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\
\operatorname{div}(\vec{u}^{m+1}) = 0 & \text{dans } \Omega \\
au_N^{m+1} + \sigma_N^{m+1} = -p_w - \lambda_N^m + a\gamma_N^m & \text{sur } \Gamma_S \\
(\alpha + a)u_T^{m+1} + \sigma_T^{m+1} = -\lambda_T^m + a\gamma_T^m & \text{sur } \Gamma_S \\
\sigma^{m+1} \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a \\
\sigma_T^{m+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_y \\
\left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^{m+1} = -p_w \\ \sigma_T^{m+1} = 0 \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_{ext}
\end{array} \right. \quad (44)$$

### Etape (1b)

On note que :

$$\inf_{\vec{\gamma} \in K} L_a((\vec{u}^{m+1}, \vec{\gamma}), (p^{m+1}, \vec{\lambda}^m)) = \inf_{\vec{\gamma} \in K} \left\{ \int_{\Gamma_S} -\vec{\lambda}^m \cdot \vec{\gamma} \, d\Gamma - a \int_{\Gamma_S} \vec{u} \cdot \vec{\gamma} \, d\Gamma + \frac{a}{2} \int_{\Gamma_S} |\vec{\gamma}|^2 \, d\Gamma \right\} \quad (45)$$

(45) est équivalent à :

$$\inf_{\gamma_N \leq \kappa} \left\{ -\lambda_N^m \gamma_N - au_N^{m+1} \gamma_N + \frac{a}{2} \gamma_N^2 \right\}$$

et :

$$\inf_{\gamma_T \in \mathbb{R}} \left\{ -\lambda_T^m \gamma_T - au_T^{m+1} \gamma_T + \frac{a}{2} \gamma_T^2 \right\}$$

On note :

$$h_T(\gamma_T) = -\lambda_T^m \gamma_T - au_T^{m+1} \gamma_T + \frac{a}{2} \gamma_T^2$$

et :

$$h_N(\gamma_N) = -\lambda_N^m \gamma_N - au_N^{m+1} \gamma_N + \frac{a}{2} \gamma_N^2$$

Alors :

$$h'_N(\gamma_N) = a\gamma_N - (au_N^{m+1} + \lambda_N^m)$$

et :

$$h'_N(\gamma_N) = 0 \quad \iff \quad \gamma_N = \min \left( 0; \frac{au_N^{m+1} + \lambda_N^m}{a} \right)$$

car  $\vec{\gamma} \in K$ .

D'autre part :

$$h'_T(\gamma_T) = a\gamma_T - (au_T^{m+1} + \lambda_T^m)$$

ainsi :

$$h'_T(\gamma_T) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_T = \frac{au_T^{m+1} + \lambda_T^m}{a}$$

On conclut alors :

$$\gamma_N^{m+1} = \min \left( 0; \frac{au_N^{m+1} + \lambda_N^m}{a} \right) \quad (46)$$

$$\gamma_T^{m+1} = \frac{au_T^{m+1} + \lambda_T^m}{a} \quad (47)$$

## Etape (2)

On met à jour  $\vec{\lambda} : \vec{\lambda}^{m+1} = \vec{\lambda}^m - \rho(\vec{u}^{m+1} - \vec{\gamma}^{m+1})$

## A convergence

On note :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} u_N^m = u_N \\ \lim_{m \rightarrow \infty} u_T^m = u_T \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_N^m = \gamma_N \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_T^m = \gamma_T \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_N^m = \lambda_N \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_T^m = \lambda_T \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_N = \gamma_N \\ u_T = \gamma_T \end{array} \right.$$

et :  $\lim_{m \rightarrow \infty} p^m = p$

Par suite on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_N^m = \sigma_N \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_T^m = \sigma_T \end{array} \right.$$

On déduit alors de (44) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \zeta \vec{u} - \operatorname{div}(2\eta D(\vec{u}) - pI) = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a \\ \sigma_T = 0 & \text{sur } \Gamma_y \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N = -p_w \\ \sigma_T = 0 \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_e \end{array} \right.$$

Mais également :

$$\left\{ \begin{array}{l} au_N + \sigma_N = -p_w - \lambda_N + au_N \\ (\alpha + a)u_T + \sigma_T = -\lambda_T + au_T \end{array} \right. \quad (48)$$

On déduit de (48) :

$$\lambda_N = -p_w - \sigma_N$$

$$\lambda_T = -\alpha u_T - \sigma_T$$

Or comme à convergence  $\vec{\gamma} = \vec{u}$  on déduit de (47) que  $\lambda_T = 0$ . Ainsi :

$$\sigma_T = -\alpha u_T$$

D'autre part comme  $\vec{\gamma} = \vec{u}$  on déduit de (46) :

$$u_N = \min \left( \kappa; \frac{au_N + \lambda_N}{a} \right)$$

Si  $u_N = \kappa$  alors :

$$\frac{au_N + \lambda_N}{a} \geq \kappa$$

par suite :

$$a\kappa + \lambda_N \geq a\kappa$$

c'est-à-dire  $\lambda_N \geq 0$  soit  $N \geq 0$

Sinon si  $u_N < \kappa$  alors  $au_N = au_N + \lambda_N$  soit  $\lambda_N = 0$ , c'est-à-dire  $\sigma_N = -p_w$ .

Donc  $\vec{u}$  vérifie le problème (15).



## Références

- [1] Gagliardini, *Modélisation d'écoulements complexes en glaciologie*, Thèse de HDR de l'UJF, 2007.
- [2] Durand, Gagliardini, Zwinger, Le Meur, Hindmarsch, *Full-Stokes modeling of marine ice-sheets : influence of the grid size*, *Annals of Glaciology*, 50(52), p. 109-114, 2009.
- [3] Gagliardini, Durand, Zwinger, Hindmarsch, Le Meur, *Coupling of ice-shelf and buttressing is a key process*, *Geophysical Research Letter*, 37, 2010.
- [4] Herbin, *A monotonic method for the numerical solution of some free boundary value problems*, *SIAM Journal on numerical analysis*, Vol.40, pp. 2292-2310, No 6, 2003.
- [5] Duvaut, Lions, *Les inéquations en physique et en mécanique*, Dunod, Paris, 1972.
- [6] Kikuchi, Oden, *Contact problems in elasticity, A study of variationnal inequalities and finite element method*, SIAM, 1988.
- [7] Haslinger, Jaroslav, Hlavacek, Necas, *Numerical methods for nonlinear variationnal problems*, Springer, 1984.
- [8] Hlavacek, Haslinger, Necas, Lovisek, *Solution of Variationnal Inequalities in Mechanics*, Springer, 1988.