

# Modélisation multicouche d'écoulements visqueux minces et calculs thermiques appliqués à la simulation d'épanchements de lave

Olivier Ozenda

23 juin 2014

Encadrants :

Pierre Saramito  
Directeur de Recherches  
CNRS, LJK  
Grenoble

Noé Bernabeu  
Doctorant  
LJK  
Grenoble

Claude Smutek  
Enseignant chercheur  
LGSR  
La Réunion

Université  
**Joseph Fourier**  
GRENOBLE





*Je remercie mes encadrants Pierre Saramito, Noé Bernabeu et Claude Smutek pour leur aide, leurs conseils précieux et leur soutien tout au long de ce stage. Je remercie aussi tous ceux qui ont m'ont accompagné, tendu la main, ceux qui ont souri à mes extravagances, cru en mes idées, ceux qui ont veillé ou veillent sur moi.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Approximation discontinue pour un problème de diffusion convection</b>	<b>11</b>
1.1	Enjeux et démarche . . . . .	11
1.2	Problème de diffusion pure . . . . .	11
1.3	Résultats numériques . . . . .	14
1.4	Problème de diffusion convection . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Application à un modèle multicouche tridimensionnel</b>	<b>17</b>
2.1	Problème physique . . . . .	17
2.2	Problème adimensionné . . . . .	19
2.3	Problème à l'ordre zéro en $\varepsilon$ . . . . .	20
2.4	Problème réduit . . . . .	20
2.5	Redimensionnement . . . . .	21
2.6	Discretisation en temps . . . . .	21
2.7	Approximation du flux dans le substrat . . . . .	22
2.8	Définition du problème thermique discrétisé en temps . . . . .	23
2.9	Adimensionnement isotrope . . . . .	24
2.10	Discrétisation spatiale . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>27</b>
3.1	Mesures thermiques de référence . . . . .	27
3.2	Validation du calcul dynamique . . . . .	27
3.3	Validation du calcul thermique . . . . .	28
3.4	Intérêt pour les applications à la volcanologie . . . . .	29



## Notations générales

ouvert modélisant la surface du substrat	$\Omega \subset \mathbb{R}^2$
normale extérieure à $\Omega$	$\boldsymbol{\nu}$
intérieur du dôme	$\Lambda \subset \mathbb{R}^3$
bord de $\Lambda$	$\Gamma_f \cup \Gamma_s \cup \Gamma_a$
normale extérieure à $\Lambda$	$\mathbf{n}$
profil de vitesse à la sortie de l'orifice	$u_s$
nombre de couches	$n$
hauteur d'une couche	$h = \frac{\delta}{n}$
nombre de pas de temps	$M$
m-ième pas de temps	$\Delta_t^m$
	unité
vitesse du fluide	$\mathbf{u}$ m·s <sup>-1</sup>
pression	$p$ Pa
température dans le fluide	$T$ K
température de l'interface avec le substrat	$T_b$ K

## Table de constantes physiques

		unité	valeur pour l'expérience avec du silicone	valeur pour des relevés sur une coulée de lave
durée de l'expérience	$t_f$	s	3420	
température ambiante	$T_0$	K	293	293
température de la source	$T_1$	K	329	973 ou 1373
débit de la source	$Q$	m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup>	$7 \cdot 10^{-8}$	1
rayon de l'orifice	$r_0$	m	0.01	
viscosité du fluide	$\eta$	Pa·s	[2.7, 5.2]	$10^9$ ou $10^3$
capacité thermique du fluide	$C_p$	J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	1500	$10^3$
capacité thermique du substrat	$C_{ps}$	J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	-	-
masse volumique du fluide	$\rho$	kg·m <sup>-3</sup>	[942, 974]	2300
masse volumique du substrat	$\rho_s$	kg·m <sup>-3</sup>	-	-
conductivité thermique du fluide	$k$	W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	0.15	3
conductivité thermique du substrat	$k_s$	W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	$3 \cdot 10^{-2}$	
diffusivité thermique du fluide	$\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$	m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup>	$10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-6}$
diffusivité thermique du substrat	$\kappa_s = \frac{k_s}{\rho C_{ps}}$	m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup>	$6 \cdot 10^{-7}$	
émissivité du fluide	$\epsilon_r$	-	0.96	0.97
coefficient de transfert convectif	$\lambda$	W·m <sup>-2</sup> ·K <sup>-1</sup>	2	10
constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$			
intensité de la pesanteur terrestre	$g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$			

## Nombres utilisés dans l'analyse asymptotique

		unité	valeur pour l'expérience avec du silicone	valeur pour des relevés sur une coulée de lave
hauteur caractéristique	$H$	m	$2 \cdot 10^{-3}$	
longueur caractéristique	$L$	m	0.5	
rapport d'aspect	$\varepsilon = \frac{H}{L}$	-	0.4	$10^{-4}$ ou $10^{-3}$
vitesse caractéristique anisotrope	$U = \frac{\rho g H^3}{\eta L}$	m·s <sup>-1</sup>	$3.8 \cdot 10^{-3}$	
nombre de Reynolds	$Re = \frac{\rho^2 g H^3}{\eta^2}$	-	$4.6 \cdot 10^{-3}$	
nombre de Péclet aniso- trophe	$Pe = \frac{\rho^2 g C_p H^3}{k \eta L^2}$	-	$7.2 \cdot 10^6$	

## Nombres utilisés dans les calculs numériques

		unité	valeur pour l'expérience avec du silicone	valeur pour des relevés sur une coulée de lave
vitesse caractéristique isotrope	$V = \frac{\rho g H^2}{\eta}$	m·s <sup>-1</sup>	$9.5 \cdot 10^{-3}$	
nombre de Péclet iso- trophe	$\hat{P}e = \frac{\rho^2 C_p g H}{\eta k}$	-	$4.6 \cdot 10^7$	$8.6 \cdot 10^7$
constante de convection avec l'air	$C_u = \frac{H \lambda}{k}$	-	$2.7 \cdot 10^{-3}$	
constante de diffusion dans le substrat	$C_d = \frac{H}{k} \left( \frac{\rho_s C_{ps} k_s \rho g H}{\pi \eta} \right)^{\frac{1}{2}}$	-	0.64	
nombre ed Nusselt (rayonnement)	$N_u = \frac{H \epsilon_r \sigma \Delta T^3}{k}$	-	$3.4 \cdot 10^{-5}$	
écart de température caractéristique	$\Delta T = T_1 - T_0$	K	36	
coefficient de rayonne- ment	$\alpha = \frac{T_0}{\Delta T}$	-	8.14	



## Introduction

La prévision des risques liés aux écoulements géophysiques tels que les coulées de lave volcaniques pose de véritables défis aux méthodes de modélisation numériques. En effet, ces écoulements à surface libres couplent les équations de la dynamique des fluides, type Navier-Stokes, avec des phénomènes thermiques de diffusion-convection ainsi que du rayonnement, de la convection dans l'air et de la diffusion dans le sous-sol. De plus, ces écoulements s'étendent sur de très grandes longueurs pour une épaisseur relativement faible.

Une approche possible est d'utiliser cette structure d'écoulement en couche mince pour effectuer une analyse asymptotique et aboutir à certaines simplifications. Dans le cas d'un écoulement rapide, on obtient les équations de Saint-Venant [2] pour la partie dynamique. Dans le cas d'un écoulement plus lent, on obtient des équations différentes, de type parabolique dégénéré [9, 3]. Dans les deux cas, le système tridimensionnel à surface libre se réduit à un problème bidimensionnel sur la surface. Cependant, pour la partie thermique, les choses sont plus complexes : l'analyse asymptotique ne permet pas de réduire le problème, qui reste tridimensionnel. De plus, la température présente des gradients importants suivant la verticale, avec l'apparition de couches limites au voisinage de la surface libre.

Nous nous inspirons ici d'idées déjà développées dans le cadre des écoulements rapides, pour les adapter au cas des écoulements lents, et proposer un approche multi-couche suivant la verticale pour approcher le problème thermique. L'approximation multi-couche a été récemment analysée par Audusse et Bristeau [1]. Elle est couramment utilisée en océanographie [8, 10] le cadre des écoulements rapides (équations de Saint-Venant). Pour les écoulements lents, comme les écoulements de lave volcanique, on peut trouver une première approche dans le cadre de la modélisation de la calotte polaire antarctique [7, 11]. C'est cette approche que nous allons approfondir ici.

La première partie du rapport présente la discrétisation unidimensionnelle suivant la verticale d'un problème de diffusion-convection par une méthode de Galerkin discontinu de degré zéro (fonctions constantes par morceaux). Cette partie préliminaire sera utilisée pour la modélisation multi-couche, présentée dans la deuxième partie qui représente le coeur de ce rapport. La troisième partie regroupe les simulations numériques pour la croissance d'un dôme de lave : nous étudions la convergence de la méthode et donnons des comparaisons avec des mesures pour une maquette de laboratoire sur des fluides réels et non-isothermes.





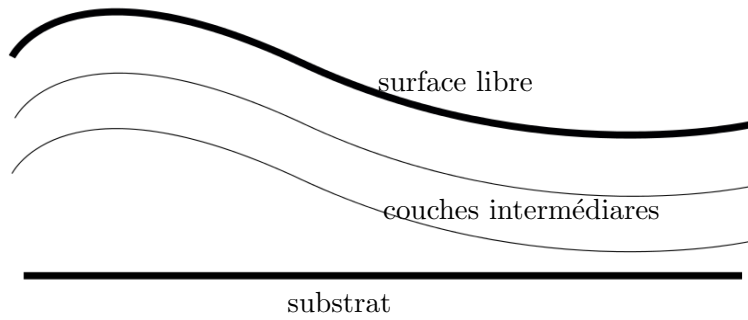


FIGURE 1 – Principe d'un écoulement mince multicouches

## 1 Approximation discontinue pour un problème de diffusion convection

### 1.1 Enjeux et démarche

Dans ce paragraphe, nous présentons une méthode de résolution par éléments finis discontinus  $P_0$  d'un problème de diffusion convection unidimensionnel. Cette méthode sera intégrée par la suite pour résoudre un problème d'écoulement visqueux de type couche mince avec une modélisation multicouche (voir figure 1). Plus précisément, les différentes couches sont couplées par une équation de diffusion convection unidimensionnelle que nous résoudrons par une méthode de type Galerkin discontinu. L'enjeu dans ce type de problème est de trouver des définitions consistantes permettant de définir des opérateurs différentiels approchés sur des espaces de fonctions polynomiales par morceaux. Dans l'article [4], il est présenté une méthode de résolution de l'équation de Poisson avec conditions au bord de type Dirichlet homogène par éléments finis  $P_0$  centrés. La seule contrainte imposée a priori sur le point d'interpolation est qu'il soit à l'intérieur de la maille. En appliquant cette idée, nous donnons une méthode de résolution d'un problème unidimensionnel de diffusion pure avec des conditions au bord de type Dirichlet, Neumann ou Robin, ce dernier cas est le plus intéressant car il approche correctement les différents échanges thermiques à l'interface entre deux matériaux. Nous nous focaliserons ensuite sur le problème qui sera utile par la suite : le problème de diffusion convection.

### 1.2 Problème de diffusion pure

Nous résolvons ici numériquement un problème de diffusion pure unidimensionnel

**P1D** : Trouver une fonction  $v$  définie dans  $[0, 1]$  vérifiant

$$-v'' = f \text{ dans } ]0, 1[$$

et différentes conditions au bord.

La fonction  $f$  considérée est supposée très régulière, le but de cette partie étant simplement d'écrire un schéma pour l'équation de poisson 1D faisant intervenir seulement un unique point à l'intérieur de chaque maille. Les conditions aux limites peuvent être de type Neumann, Dirichlet ou Robin. On note  $n$  le nombre de maille,  $h = \frac{1}{n}$  et par commodité on note  $v_\alpha = v(\frac{\alpha}{n})$ . Sur les mailles intérieures, le schéma ressemble à un schéma de type différences finies avec grilles décalées. Sur les mailles extrêmes, on ajuste le point d'interpolation pour obtenir la consistance. On explicite la condition de Robin, on impose

$$-v'_0 + \alpha_b v_0 = g_b, \quad v'_n + \alpha_u v_n = g_u.$$

#### Schéma centré dans les mailles intérieures

$$\forall i \in [1, n-1], \quad v_{i-\frac{1}{2}} - 2v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{3}{2}} = h^2 v''_{i+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^4) \quad (1a)$$

**Schéma décentré si  $i = 0$**  On considère les 3 développements limités suivants

$$\begin{aligned}v_{\frac{1}{2}} &= v_0 + \frac{h}{2}v'_0 + \frac{h^2}{8}v''_0 + \frac{h^3}{48}v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\v_{\frac{3}{2}} &= v_0 + \frac{3h}{2}v'_0 + \frac{9h^2}{8}v''_0 + \frac{27h^3}{48}v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\v''_{\beta} &= v''_0 + h\beta v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

On en déduit les combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned}v_{\frac{3}{2}} - 3v_{\frac{1}{2}} &= -2v_0 + \frac{3h^2}{4}v''_{\beta} + h^3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\beta\right)v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\v_{\frac{3}{2}} - v_{\frac{1}{2}} &= hv'_0 + h^2v''_{\beta} + h^3\left(\frac{26}{48} - \beta\right)v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

En prenant  $\beta = \frac{2}{3}$  on obtient un schéma pour une conditions de Dirichlet :

$$\frac{4}{3}v_{\frac{3}{2}} - 4v_{\frac{1}{2}} = -\frac{8}{3}v_0 - h^2f_{\beta} + \mathcal{O}(h^4). \quad (1b)$$

En prenant  $\beta = \frac{13}{24}$  on obtient un schéma pour une conditions de Neumann :

$$v_{\frac{3}{2}} - v_{\frac{1}{2}} = hv'_0 - h^2f_{\beta} + \mathcal{O}(h^4) \quad (1c)$$

Si on réécrit les développements limités avec  $g_b = -v'_0 + \alpha_b v_0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}v_{\frac{1}{2}} &= v_0 \left(1 + \frac{\alpha_b h}{2}\right) - \frac{h}{2}g_b + \frac{h^2}{8}v''_0 + \frac{h^3}{48}v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\v_{\frac{3}{2}} &= v_0 \left(1 + \frac{3\alpha_b h}{2}\right) - \frac{3h}{2}g_b + \frac{9h^2}{8}v''_0 + \frac{27h^3}{48}v_0^{(3)} + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

On peut éliminer  $v_0$  et trouver le schéma correspondant à la condition de Robin, on note  $\epsilon = h\alpha_b$

$$\begin{aligned}v_{\frac{3}{2}} - v_{\frac{1}{2}} \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon} &= \frac{-g_b h}{2} \left(3 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) + \frac{v''_{\beta} h^2}{8} \left(9 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) \\&\quad + h^3 v_0^{(3)} \left( \left(27 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) \frac{1}{48} - \beta \left(9 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) \right) + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

On prend  $\beta = \frac{6\epsilon+13}{9\epsilon+24}$  et on obtient

$$v_{\frac{3}{2}} - v_{\frac{1}{2}} \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon} = -g_b h \frac{2}{2+\epsilon} + \frac{v''_{\beta} h^2}{4} \frac{8+3\epsilon}{2+\epsilon} + \mathcal{O}(h^4),$$

soit

$$v_{\frac{3}{2}} \frac{8+4\epsilon}{8+3\epsilon} - v_{\frac{1}{2}} \frac{8+12\epsilon}{8+3\epsilon} = -g_b h \frac{8}{8+3\epsilon} - f_{\beta} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \quad (1d)$$

**Schéma décentré si  $i = n - 1$**  On considère les 3 développements limités suivants

$$\begin{aligned}v_{n-\frac{1}{2}} &= v_n - \frac{h}{2}v'_n + \frac{h^2}{8}v''_n - \frac{h^3}{48}v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\v_{n-\frac{3}{2}} &= v_n - \frac{h}{2}v'_n + \frac{9h^2}{8}v''_n - \frac{27h^3}{48}v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\v''_{n-\beta} &= v''_n - \beta h v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

On en déduit les combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} v_{n-\frac{3}{2}} - 3v_{n-\frac{1}{2}} &= -2v_n + \frac{3h^2}{4}v''_{n-\beta} - h^3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\beta\right)v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\ v_{n-\frac{3}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}} &= -hv'_n + h^2v''_{n-\beta} - h^3\left(\frac{26}{48} - \beta\right)v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

En prenant  $\beta = \frac{2}{3}$  on obtient un schéma pour une conditions de Dirichlet :

$$\frac{4}{3}v_{n-\frac{3}{2}} - 4v_{n-\frac{1}{2}} = -\frac{8}{3}v_n - h^2f_{n-\beta} + \mathcal{O}(h^4). \quad (1e)$$

En prenant  $\beta = \frac{13}{24}$  on obtient un schéma pour une conditions de Neumann :

$$v_{n-\frac{3}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}} = -hv'_n - h^2f_{n-\beta} + \mathcal{O}(h^4). \quad (1f)$$

Si on réécrit les développements limités avec  $g_u = v'_n + \alpha_u v_n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} v_{n-\frac{1}{2}} &= v_n\left(1 + \frac{\alpha_u h}{2}\right) - \frac{h}{2}g_u + \frac{h^2}{8}v''_n - \frac{h^3}{48}v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \\ v_{n-\frac{3}{2}} &= v_n\left(1 + \frac{3\alpha_u h}{2}\right) - \frac{3h}{2}g_u + \frac{9h^2}{8}v''_n - \frac{27h^3}{48}v_n^{(3)} + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

On peut éliminer  $v_n$  et trouver le schéma correspondant à la condition de Robin, on note  $\epsilon = h\alpha_u$

$$\begin{aligned} v_{n-\frac{3}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}} \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon} &= \frac{-g_u h}{2} \left(3 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) + \frac{v''_{n-\beta} h^2}{8} \left(9 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) \\ &\quad - v_n^{(3)} h^3 \left( \left(27 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) \frac{1}{48} - \beta \left(9 - \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon}\right) \right) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

On prend  $\beta = \frac{6\epsilon+13}{9\epsilon+24}$  et on obtient

$$v_{n-\frac{3}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}} \frac{2+3\epsilon}{2+\epsilon} = -g_u h \frac{2}{2+\epsilon} + \frac{v''_{n-\beta} h^2}{4} \frac{8+3\epsilon}{2+\epsilon} + \mathcal{O}(h^4),$$

soit

$$v_{n-\frac{3}{2}} \frac{8+4\epsilon}{8+3\epsilon} - v_{n-\frac{1}{2}} \frac{8+12\epsilon}{8+3\epsilon} = -g_u h \frac{8}{8+3\epsilon} - f_{n-\beta} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \quad (1g)$$

Le problème discret s'énonce ainsi

**PDIF** : Trouver  $(v_i + \frac{1}{2})_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant les relations suivantes

$$\forall i \in [1, n-2], \quad -v_{i-\frac{1}{2}} + 2v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{3}{2}} = h^2 f_{i+\frac{1}{2}}$$

Ainsi que deux conditions aux limites parmi :

Conditions de Dirichlet : Les constantes  $\bar{v}_0$  et  $\bar{v}_n$  sont données

$$-v_{\frac{3}{2}} + 3v_{\frac{1}{2}} = 2\bar{v}_0 + h^2 \frac{3}{4} f_\beta \quad \beta = \frac{2}{3}$$

$$-v_{n-\frac{3}{2}} + 3v_{n-\frac{1}{2}} = 2\bar{v}_n + h^2 \frac{3}{4} f_{n-\beta} \quad \beta = \frac{2}{3}$$

Conditions de Neumann : Les constantes  $-v'_0$  et  $v'_n$  sont données

$$-v_{\frac{3}{2}} + v_{\frac{1}{2}} = -h\bar{v}'_0 + h^2 f_\beta \quad \beta = \frac{13}{24}$$

$$-v_{n-\frac{3}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} = h\bar{v}'_n + h^2 f_{n-\beta} \quad \beta = \frac{13}{24}$$

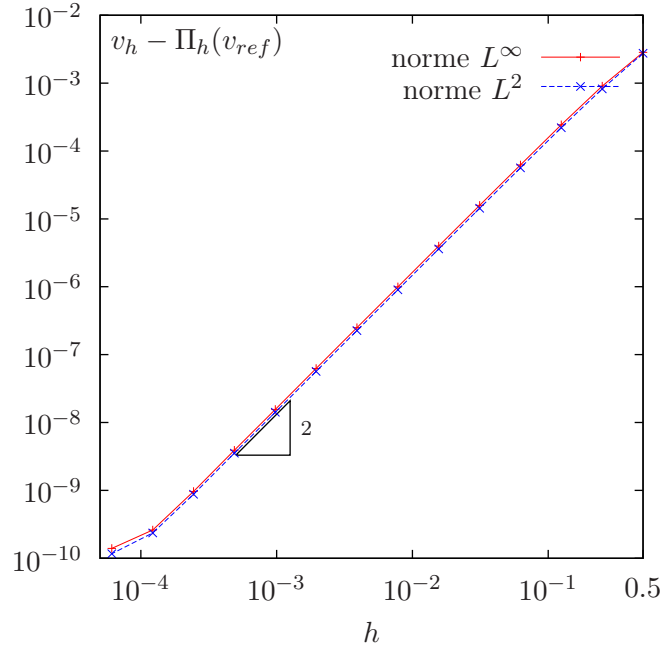


FIGURE 2 – Mesure de l'écart entre la solution numérique présentée  $v_h$  et la solution explicite interpolée  $\Pi_h(v_{ref})$

Condition de Robin, Les constantes  $\alpha_u$ ,  $g_u$  et  $\alpha_b$ ,  $g_b$  sont données. On impose  $-v'_0 + \alpha_b v_0 = g_b$  et  $v'_n + \alpha_u v_n = g_u$ .

$$-v_{\frac{3}{2}} + v_{\frac{1}{2}} \frac{2 + 3\epsilon_b}{2 + \epsilon_b} = g_b h \frac{2}{2 + \epsilon_b} + \frac{8 + 3\epsilon_b}{8 + 4\epsilon_b} f_{\beta_b} h^2$$

$$\epsilon_b = h\alpha_b, \quad \beta_b = \frac{6\epsilon_b + 13}{9\epsilon_b + 24}$$

$$-v_{n-\frac{3}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \frac{2 + 3\epsilon_u}{2 + \epsilon_u} = g_u h \frac{2}{2 + \epsilon_u} + \frac{8 + 3\epsilon_u}{8 + 4\epsilon_u} f_{n-\beta_u} h^2$$

$$\epsilon_u = h\alpha_u, \quad \beta_u = \frac{6\epsilon_u + 13}{9\epsilon_u + 24}$$

On remarque que l'on a construit un système linéaire tridiagonal symétrique qui peut être résolu très efficacement en effectuant une factorisation de Choleski (voir [12]).

### 1.3 Résultats numériques

On présente ici un calcul numérique du problème **PDIF** suggérant que le schéma converge en  $\mathcal{O}(h^2)$  vers l'interpolée  $P_0$  au centre de chaque maille de la solution du problème **P1D**, notée  $\Pi_h(v_{ref})$ . On fixe  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{4x}{\pi} + \frac{\pi}{8}\right)$ , si bien que l'on connaît la solution explicitement  $v_{ref} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\pi^2}{16} \sin\left(\frac{4x}{\pi} + \frac{\pi}{8}\right)$ . Les résultats sont sensiblement identiques quelles que soient les conditions au bord. Seul le résultat pour des conditions de Robin est présenté (voir la figure 2). Les résultats obtenus sont conformes au théorème démontré dans [4] qui prévoit de la convergence d'ordre en  $\mathcal{O}(h)$  dans le cas général pour un problème de diffusion pure avec conditions au bord de Dirichlet. Cet article prévoit en outre une convergence en  $\mathcal{O}(h^2)$  en norme  $L^2$  pour des problèmes auxquels on peut appliquer la méthode de Aubin-Nietsche.

### 1.4 Problème de diffusion convection

On considère une fonction  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On reprend les notations précédentes, nous présentons ici la résolution numérique d'un problème de convection diffusion du même type celui que nous intégrerons dans le calcul multicouche. Le problème s'énonce ainsi

(PU) : Trouver  $v$  définie dans  $[0, 1]$  vérifiant :

$$av' - v'' = f \text{ dans } ]0, 1[ \quad (2a)$$

$$-v'(0) + \alpha_b v(0) = g_b, \quad v'(1) + \alpha_u v(1) = g_u \quad \text{ou bien} \quad v(0) = v_b, \quad v(1) = v_u \quad (2b)$$

En appliquant une méthode de type Galerkin discontinu, pour les termes de transport et en conservant la discrétisation précédente du terme d'ordre deux, on obtient :

$$h \left( \frac{a_i + |a_i|}{2} (v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{a_{i+1} - |a_{i+1}|}{2} (v_{i+\frac{3}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}}) \right) - v_{i-\frac{1}{2}} + 2v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{3}{2}} = h^2 f_{i+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3a)$$

Pour définir les conditions au bord, on écrit les relations de saut entre les mailles extrêmes et les mailles extérieures,

$$v_0 = \frac{v_{\frac{1}{2}} + v_{-\frac{1}{2}}}{2} \quad v'_0 = \frac{v_{\frac{1}{2}} - v_{-\frac{1}{2}}}{h} \quad v_n = \frac{v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}}}{2} \quad v'_n = \frac{v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}}{h} \quad (3b)$$

On obtient les relations pour les conditions de Dirichlet :

$$\frac{3h}{4} \left( \frac{a_0 + |a_0|}{2} (2v_{\frac{1}{2}} - 2v_0) + \frac{a_1 - |a_1|}{2} (v_{\frac{3}{2}} - v_{\frac{1}{2}}) \right) - v_{\frac{3}{2}} + 3v_{\frac{1}{2}} = 2v_0 + h^2 \frac{3}{4} f_{\frac{2}{3}} \quad (3c)$$

$$\frac{3h}{4} \left( \frac{a_{n-1} + |a_{n-1}|}{2} (v_{n-\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{3}{2}}) + \frac{a_n - |a_n|}{2} (2v_n - 2v_{n-\frac{1}{2}}) \right) - v_{n-\frac{3}{2}} + 3v_{n-\frac{1}{2}} = 2v_n + h^2 \frac{3}{4} f_{n-\frac{2}{3}} \quad (3d)$$

On obtient les relations pour les conditions de Robin, en notant  $\epsilon_u, \epsilon_b, \beta_u, \beta_b$  comme précédemment :

$$\begin{aligned} & h \frac{8+3\epsilon_b}{8+4\epsilon_b} \left( \frac{a_0 + |a_0|}{2} \left( \frac{2\epsilon_b}{\epsilon_b+2} v_{\frac{1}{2}} - \frac{2h}{\epsilon_b+2} g_b \right) \right. \\ & \left. + \frac{a_1 - |a_1|}{2} (v_{\frac{3}{2}} - v_{\frac{1}{2}}) \right) - v_{\frac{3}{2}} + v_{\frac{1}{2}} \frac{2+3\epsilon_b}{2+\epsilon_b} = g_b h \frac{2}{2+\epsilon_b} + h^2 \frac{8+3\epsilon_b}{8+4\epsilon_b} f_{\beta_b} \end{aligned} \quad (3e)$$

$$\begin{aligned} & h \frac{8+3\epsilon_u}{8+4\epsilon_u} \left( \frac{a_{n-1} + |a_{n-1}|}{2} (v_{n-\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{3}{2}}) \right. \\ & \left. + \frac{a_n - |a_n|}{2} \left( \frac{2h}{\epsilon_u+2} g_u - \frac{2\epsilon_u}{\epsilon_u+2} v_{n-\frac{1}{2}} \right) \right) - v_{n-\frac{3}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \frac{2+3\epsilon_u}{2+\epsilon_u} = g_u h \frac{2}{2+\epsilon_u} + h^2 \frac{8+3\epsilon_u}{8+4\epsilon_u} f_{n-\beta_u} \end{aligned} \quad (3f)$$

On écrit les relations précédentes en mettant en évidence le fait qu'il s'agit d'un système tridigonal non symétrique.

$$\begin{aligned} & -v_{i-\frac{1}{2}} \left[ \frac{h}{2} (a_i + |a_i|) + 1 \right] \\ & + v_{i+\frac{1}{2}} \left[ \frac{h}{2} (a_i + |a_i| - a_{i+1} + |a_{i+1}|) + 2 \right] \\ & - v_{i+\frac{3}{2}} \left[ \frac{h}{2} (|a_{i+1}| - a_{i+1}) + 1 \right] \\ & = h^2 f_{i+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (4a)$$

Conditions de Dirichlet :

$$\begin{aligned} & -v_{\frac{3}{2}} \left[ \frac{3h}{8} (|a_1| - a_1) + 1 \right] \\ & + v_{\frac{1}{2}} \left[ \frac{3h}{8} (2(a_0 + |a_0|) - a_1 + |a_1|) + 3 \right] \\ & = \bar{v}_0 \left[ \frac{3h}{4} (a_0 + |a_0|) + 2 \right] + \frac{3}{4} h^2 f_{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} & -v_{n-\frac{3}{2}} \left[ \frac{3h}{8} (a_{n-1} + |a_{n-1}|) + 1 \right] \\ & + v_{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{3h}{8} (a_{n-1} + |a_{n-1}| + 2(|a_n| - a_n)) + 3 \right] \\ & = \bar{v}_n \left[ \frac{3h}{4} (|a_n| - a_n) + 2 \right] + \frac{3}{4} h^2 f_{n-\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (4c)$$

Conditions de Robin

$$\begin{aligned}
& -v_{\frac{3}{2}} \left[ \frac{h}{2} \cdot \frac{8 + 3\epsilon_b}{8 + 4\epsilon_b} (|a_1| - a_1) + 1 \right] \\
& + v_{\frac{1}{2}} \left[ \frac{h}{2} \cdot \frac{8 + 3\epsilon_b}{8 + 4\epsilon_b} \left( \frac{2\epsilon_b}{2 + \epsilon_b} (a_0 + |a_0|) - a_1 + |a_1| \right) + \frac{2 + 3\epsilon_b}{2 + \epsilon_b} \right] \\
& = g_b \left[ \frac{h^2}{2 + \epsilon_b} \frac{8 + 3\epsilon_b}{8 + 4\epsilon_b} (a_0 + |a_0|) + \frac{2h}{2 + \epsilon_b} \right] + \frac{8 + 3\epsilon_b}{8 + 4\epsilon_b} h^2 f_{\beta_b}
\end{aligned} \tag{4d}$$

$$\begin{aligned}
& -v_{n-\frac{3}{2}} \left[ \frac{h}{2} \cdot \frac{8 + 3\epsilon_u}{8 + 4\epsilon_u} (a_{n-1} + |a_{n-1}|) + 1 \right] \\
& + v_{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{h}{2} \cdot \frac{8 + 3\epsilon_u}{8 + 4\epsilon_u} \left( a_{n-1} + |a_{n-1}| - \frac{2\epsilon_u}{2 + \epsilon_u} (a_n - |a_n|) \right) + \frac{2 + 3\epsilon_u}{2 + \epsilon_u} \right] \\
& = g_u \left[ \frac{h^2}{2 + \epsilon_u} \frac{8 + 3\epsilon_u}{8 + 4\epsilon_u} (|a_n| - a_n) + \frac{2h}{2 + \epsilon_u} \right] + \frac{8 + 3\epsilon_u}{8 + 4\epsilon_u} h^2 f_{n-\beta_u}
\end{aligned} \tag{4e}$$

Le problème discret s'énonce ainsi

**PUD** : Trouver  $(v_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  vérifiant les relations (4)



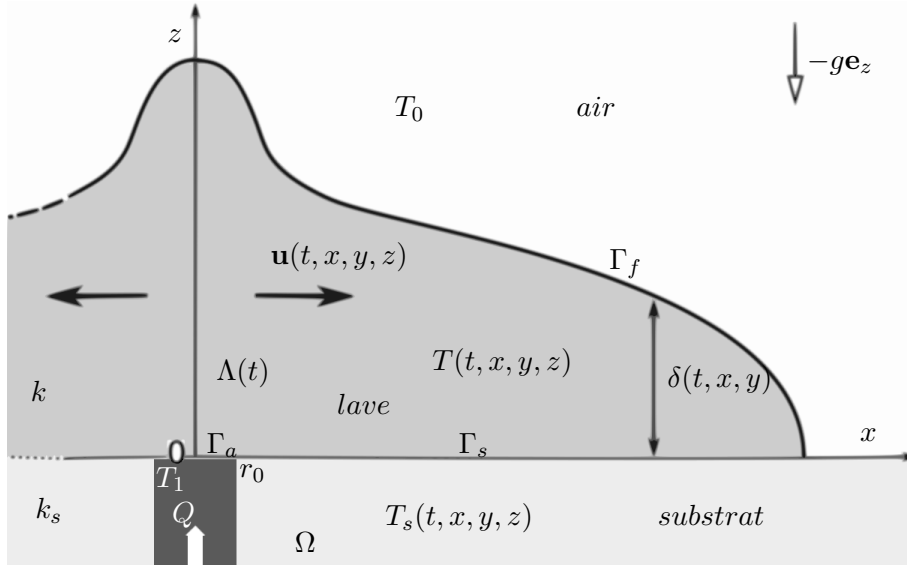


FIGURE 3 – Schéma de l'expérience d'après [5]

## 2 Application à un modèle multicouche tridimensionnel

### 2.1 Problème physique

Le but est de comparer un calcul thermique multicouche à une expérience de laboratoire modélisant la croissance d'un dôme de lave. Nous utiliserons les données expérimentales présentées dans l'article [6], dont nous donnons le protocole. Du silicone à température  $T_1$  est injecté par un orifice vertical à travers une table horizontale à la manière d'un écoulement de lave sortant d'une cheminée volcanique (voir la figure 3). On considère que le silicone est une fluide newtonien à viscosité constante. On introduit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  représentant la table et l'intervalle de temps  $]0, t_f[$  représentant l'intervalle de temps durant lequel l'expérience se déroule. On note  $\Lambda(t)$  l'ouvert qui représente la région du demi espace  $z > 0$  où le silicone est présent. Sa frontière se décompose en trois zones,  $\partial\Lambda(t) = \Gamma_s(t) \cup \Gamma_a \cup \Gamma_f(t)$ . Les équations considérés sont la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à l'intérieur du fluide.

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (5a)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla p + 2 \operatorname{div}(\eta D(\mathbf{u})) = -\rho g \mathbf{e}_z \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (5b)$$

$$\rho C_p (\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T) - k \Delta T = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (5c)$$

Avec les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(0) = 0 \quad \text{dans } \Lambda(0) \quad (5d)$$

$$T(0) = T_0 \quad \text{dans } \Lambda(0) \quad (5e)$$

$$(5f)$$

On impose en outre les conditions au bord. La frontière  $\Gamma_f(t)$  représente la surface libre du dôme, en contact avec l'air ambiant à température  $T_0$ . D'un point de vue mécanique cela se traduit par l'annulation du tenseur de contrainte le long de la normale à l'interface  $\mathbf{n}$ , d'un point de vue thermique, on écrit que le flux de chaleur à travers l'interface est dissipé en partie par rayonnement, en partie par convection. La frontière  $\Gamma_s(t)$  représente le contact avec le substrat, on y impose une condition de non glissement l'égalité des flux de thermiques de part et d'autre de l'interface. La frontière  $\Gamma_a$  représente la zone d'alimentation du fluide,

on y impose la vitesse et la température d'injection.

$$\begin{cases} (2\eta D(\mathbf{u}) - pI) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ -k\partial_{\mathbf{n}}T = \epsilon_r\sigma(T^4 - T_0^4) + \lambda(T - T_0) \end{cases} \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_f(t) \quad (5g)$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ k\partial_{\mathbf{n}}T = k_s\partial_{\mathbf{n}}T_s \end{cases} \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_s(t) \quad (5h)$$

$$\begin{cases} u(t, x, y, 0) = u_a \mathbf{n} \\ T = T_1 \end{cases} \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_a \quad (5i)$$

Où  $u_a = -c(x^2 + y^2 - r_0^2)$  et  $c$  est une constante positive telle que  $\int_{\Gamma_a} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -Q \Leftrightarrow u_a(x, y) = -\frac{2Q}{\pi r_0^4}(x^2 + y^2 - r_0^2)$ . Le domaine  $\Lambda(t)$  défini par

$$\Lambda(t) = \{(x, y, z), | 0 < z < \delta(t, x, y), \forall (x, y) \in \Omega\}$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné et  $\delta(t)$  représente la hauteur de fluide. Remarquons que  $\delta(t)$  est lui aussi une inconnue du problème (voir figure 3). Remarquons que cette hypothèse exclue les fronts avec rebroussement car  $\delta$ , en tant que fonction, doit être mono-valuée. L'interface avec le substrat est définie par

$$\Gamma_s(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \delta(t, x, y) > 0, x^2 + y^2 > r_0^2\}.$$

La sortie de l'orifice d'injection est définie par

$$\Gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r_0^2\}.$$

On définit la ligne de niveau  $\phi(t, x, y, z) = z - \delta(t, x, y)$  La surface libre  $\Gamma_f(t)$  est définie par

$$\Gamma_f(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \phi(t, x, y, z) = 0\}$$

Le transport de la surface libre s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} &= 0 \text{ dans } ]0, t_f[ \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi &= 0 \text{ dans } ]0, t_f[ \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \partial_t \delta + u_x \partial_x \delta + u_y \partial_y \delta &= u_z \text{ dans } ]0, t_f[ \times \Omega \end{aligned} \quad (5j)$$

Cette équation est complétée par une condition initiale

$$\delta(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (5k)$$

Il faut rajouter une condition amont pour  $\delta$

$$\delta = \delta_{ext} \text{ sur } ]0, t_f[ \times \partial\Omega_- \text{ où } \partial\Omega_- = \{(x, y) \in \partial\Omega | u_x \nu_x + u_y \nu_y < 0\},$$

$\nu$  étant la normale extérieure à  $\Omega$ . Nous supposons que le domaine  $\Omega$  est assez grand pour que le fluide n'atteigne pas le bord  $\partial\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $]0, t_f[$ . D'autre part, on peut par convention prolonger  $\mathbf{u}$  en prenant  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\Omega \setminus \partial\Omega$ , cela implique  $\partial\Omega_- = \emptyset$ . On ne donnera donc pas de conditions au bord pour  $\delta$ . A noter que  $\Lambda(0) = \emptyset$  si bien que les conditions initiales en vitesse et température sont inutiles. Le problème tridimensionnel s'annonce ainsi :

**(P3D)** : Trouver  $\delta$  défini dans  $]0, t_f[ \times \Omega$  et  $\mathbf{u}, T$  définis dans  $]0, t_f[ \times \Lambda(t)$  vérifiant les relations (5a)-(5j).

La notation  $\nabla_{||}$ , appliquée à un vecteur  $\mathbf{v}$ , est une projection sur le plan  $z = 0$ . Lorsque celle-ci est appliquée sur un opérateur différentiel, elle correspond plutôt à une restriction aux variables  $(x, y)$ , nous en explicitons le sens :

$$\begin{aligned} \nabla_{||} w &= \begin{bmatrix} \partial_x w \\ \partial_y w \end{bmatrix} & \nabla_{||} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} \partial_x w_x & \partial_y w_x \\ \partial_x w_y & \partial_y w_y \end{bmatrix} & \text{div}_{||} \mathbf{w} &= \partial_x w_x + \partial_y w_y \\ \Delta_{||} w &= \text{div}_{||}(\nabla_{||} w) & D_{||} \mathbf{w} &= \frac{\nabla_{||} \mathbf{w} + \nabla_{||} \mathbf{w}^T}{2} \end{aligned}$$

## 2.2 Problème adimensionné

Afin d'effectuer une analyse asymptotique en couche mince, nous adimensionnons le problème en suivant la méthode présentée dans [3]. On note  $L$  la dimension caractéristique de  $\Lambda(t)$  sur les directions  $x$  et  $y$  et  $H$  la dimension caractéristique du problème selon l'axe de  $z$ ,  $U = \frac{\rho g H^3}{\eta L}$  la vitesse caractéristique et  $\tau = \frac{L}{U}$  le temps caractéristique,  $\varepsilon = \frac{H}{L}$ . On considère les grandeurs adimensionnées,  $\tilde{\mathbf{u}} = (\frac{u_x}{U}, \frac{u_y}{U}, \frac{u_z}{\varepsilon U})$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{L}$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{L}$ ,  $\tilde{z} = \frac{z}{H}$ ,  $\tilde{p} = \frac{p}{\rho g H}$ ,  $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ ,  $\tilde{r}_0 = \frac{r_0}{L}$ . On adimensionne aussi le débit :

$$\tilde{Q} = - \int_{\tilde{\Gamma}_a} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\tilde{\Gamma}_a} \frac{-u_a}{\varepsilon U} d\tilde{x}d\tilde{y} = \frac{Q}{LUH}.$$

On introduit les nombres de Péclet et de Reynolds définis respectivement par

$$Pe = \frac{\rho^2 g C_p H^3}{k \eta L^2} \quad Re = \frac{\rho^2 g H^3}{\eta^2}.$$

On suppose ici que les nombres  $Re$  et  $Pe$  sont indépendants de  $\varepsilon$ . Remarquons que cette hypothèse diffère de celle effectuée pour obtenir les équations de Saint-venant, en effet, dans ce dernier cas, il est supposé  $Re = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$  et les équations privilégient un régime inertiel. Ici, nous privilégions les termes de diffusion visqueuse. Cette situation correspond à l'écoulement de laves volcaniques. A noter que l'étude asymptotique effectuée fonctionnerait toujours si on prenait  $Re = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$  au lieu de  $Re = \mathcal{O}(1)$ . Dans ce système de coordonnées, on a les relations :

$$\tilde{D}(\mathbf{u}) = \frac{U}{L} \begin{pmatrix} \tilde{D}_{||}(\tilde{\mathbf{u}}_{||}) & \dot{\gamma}_s \\ \dot{\gamma}_s^T & \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_z \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}_s = \varepsilon \tilde{\nabla}_{||}(\tilde{u}_z) + \frac{\partial_{\tilde{z}} \tilde{\mathbf{u}}_{||}}{\varepsilon} \quad (6)$$

Les relations (5a)-(5j) deviennent

$$\tilde{\text{div}}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{dans } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Lambda}(\tilde{t}) \quad (7a)$$

$$\frac{\rho g H}{L} \left( \varepsilon^2 Re (\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}}_{||} \cdot \tilde{\nabla}_{||}) \tilde{\mathbf{u}}_{||} + \tilde{\nabla}_{||}(\tilde{p}) - \varepsilon^2 \left( \tilde{\text{div}}_{||}(2\tilde{D}_{||}\tilde{\mathbf{u}}_{||}) + \frac{\partial_{\tilde{z}} \dot{\gamma}_s}{\varepsilon} \right) \right) = 0 \quad \text{dans } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Lambda}(\tilde{t}) \quad (7b)$$

$$\frac{\rho g H}{L} \left( \varepsilon^3 Re (\partial_{\tilde{t}} + \tilde{u}_z \partial_{\tilde{z}}) \tilde{u}_z + \frac{\partial_{\tilde{z}} \tilde{p}}{\varepsilon} - \varepsilon^2 \left( \tilde{\text{div}}_{||}(\dot{\gamma}_s^T) + 2 \frac{\partial_{\tilde{z}\tilde{z}} \tilde{u}_z}{\varepsilon} \right) \right) = -\rho g \quad \text{dans } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Lambda}(\tilde{t}) \quad (7c)$$

$$Pe (\partial_{\tilde{t}} \tilde{T} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T}) - \left( \varepsilon^2 \tilde{\Delta}_{||} \tilde{T} + \partial_{\tilde{z}\tilde{z}} \tilde{T} \right) = 0 \quad \text{dans } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Lambda}(\tilde{t}) \quad (7d)$$

$$\text{Par convention,} \quad \tilde{T}(0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{u}}(0) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad (7e)$$

$$\begin{cases} \frac{\rho g H^2}{L} \left( 2\varepsilon^2 \tilde{D}_{||} \tilde{\mathbf{u}}_{||} \tilde{\nabla}_{||} \tilde{\delta} - \varepsilon \dot{\gamma}_s \right) = \tilde{p} \frac{\rho g H^2}{L} \tilde{\nabla}_{||} \tilde{\delta} \\ \rho g H \left( \varepsilon^3 \dot{\gamma}_s^T \cdot \tilde{\nabla}_{||} \tilde{\delta} - 2\varepsilon^2 \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_z \right) = \rho g H \tilde{p} \\ -k \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{T} = \epsilon_r \sigma (\tilde{T}^4 - \tilde{T}_0^4) + \lambda (\tilde{T} - \tilde{T}_0) \end{cases} \quad \text{sur } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Gamma}_f(\tilde{t}) \quad (7f)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = 0 \\ k \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{T} = k_s \partial_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{T}_s \end{cases} \quad \text{sur } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Gamma}_s(\tilde{t}) \quad (7g)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(t, x, y, 0) = -\tilde{u}_a(t, x, y) \mathbf{e}_z \\ \tilde{T} = \tilde{T}_1 \end{cases} \quad \text{sur } ]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Gamma}_a \quad (7h)$$

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\delta} + \tilde{\mathbf{u}}_{||} \cdot \tilde{\nabla}_{||} \tilde{\delta} - \tilde{u}_z = 0 \quad \text{dans } ]0, \tilde{t}_f[ \times \Omega \quad (7i)$$

$$\tilde{\delta}(0) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad (7j)$$

Le problème adimensionné s'énonce ainsi

**(PA)** : Trouver  $\tilde{\delta}$  défini dans  $]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}$  définis dans  $]0, \tilde{t}_f[ \times \tilde{\Lambda}(\tilde{t})$  vérifiant les relations (7a)-(7j).

### 2.3 Problème à l'ordre zéro en $\varepsilon$

En suivant la méthode présentée dans [3] on suppose que  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{\delta}$  admettent un développement

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\tilde{\mathbf{u}}_1 + \varepsilon^2\tilde{\mathbf{u}}_2 + \dots \\ \tilde{T} = \tilde{T}_0 + \varepsilon\tilde{T}_1 + \varepsilon^2\tilde{T}_2 + \dots \\ \tilde{\delta} = \tilde{\delta}_0 + \varepsilon\tilde{\delta}_1 + \varepsilon^2\tilde{\delta}_2 + \dots \\ \tilde{p} = \tilde{p}_0 + \varepsilon\tilde{p}_1 + \varepsilon^2\tilde{p}_2 + \dots \end{cases}$$

Les grandeurs  $\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{T}_0, \tilde{\delta}_0$  vérifient les équations (7a)-(7j) à l'ordre zéro en  $\varepsilon$ . Pour simplifier, dans ce paragraphe, on omettra les tildes et les indices zéro, on écrira donc par exemple  $\mathbf{u}$  à la place de  $\tilde{\mathbf{u}}_0$ . La solution à l'ordre zéro vérifie :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (8a)$$

$$\nabla_{\parallel} p = \partial_{zz} \mathbf{u}_{\parallel} \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (8b)$$

$$\partial_z p = -1 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (8c)$$

$$Pe(\partial_t T + \tilde{u} \cdot \tilde{\nabla} T) - \tilde{\delta}_{zz} T = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (8d)$$

$$\begin{cases} -\partial_z \mathbf{u}_{\parallel} = p \nabla_{\parallel} \delta \\ 0 = p \\ -k \partial_z T = H(\epsilon_r \sigma (T^4 - T_0^4) + \lambda(T - T_0)) \end{cases} \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_f(t) \quad (8e)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 \\ k \partial_z T = k_s \partial_z T_s \end{cases} \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_s(t) \quad (8f)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, x, y, 0) = -u_a(t, x, y) \mathbf{e}_z \\ T = T_1 \end{cases} \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_a \quad (8g)$$

En effet,

$$H \partial \mathbf{n} = (1 + \varepsilon^2 \|\nabla_{\parallel} \delta\|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon \nabla_{\parallel} \delta \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \nabla_{\parallel} \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Par convention,} \quad T(0) = 0, \quad \mathbf{u}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (8h)$$

$$\partial_t \delta + \mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} \delta - u_z = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Omega \quad (8i)$$

$$\delta(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (8j)$$

Le problème adimensionné à l'ordre 0 (**P0**) s'énonce ainsi :

Trouver  $\delta$  défini dans  $]0, t_f[ \times \Omega$  et  $\mathbf{u}, T$  définis dans  $]0, t_f[ \times \Lambda(t)$  vérifiant les relations (8a)-(8j).

### 2.4 Problème réduit

Remarquons que les grandeurs  $\mathbf{u}$  et  $\delta$  ne sont pas couplées à la température  $T$ . Nous nous concentrons en premier lieu au problème

(**P0E**) : Trouver  $\delta$  défini dans  $]0, t_f[ \times \Omega$  et  $\mathbf{u}$ , défini dans  $]0, t_f[ \times \Lambda(t)$  vérifiant :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (9a)$$

$$\nabla_{\parallel} p = \partial_{zz} \mathbf{u}_{\parallel} \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (9b)$$

$$\partial_z p = -1 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (9c)$$

$$\partial_t \delta + \mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} \delta - u_z = 0 \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Omega \quad (9d)$$

$$-\partial_z \mathbf{u}_{\parallel} = p \nabla_{\parallel} (\delta) \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_f(t) \quad (9e)$$

$$0 = p \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_f(t) \quad (9f)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_s(t) \quad (9g)$$

$$\mathbf{u}(t, x, y, 0) = -u_a(t, x, y) \mathbf{e}_z \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_a \quad (9h)$$

$$\delta(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (9i)$$

On déduit par des calculs de primitive que  $\forall z \in ]0, \delta[$ ,  $p(\cdot, z) = \delta - z$ , puis  $\forall z \in ]0, \delta[$ ,  $\nabla_{\parallel} \delta(z - \delta) = \partial_z \mathbf{u}_{\parallel}(\cdot, z)$  et enfin, comme la vitesse sur  $]0, t_f[ \times \Gamma_a$  est verticale,

$$\nabla_{\parallel} \delta \left( \frac{z^2}{2} - \delta z \right) = \mathbf{u}_{\parallel}(\cdot, z) \Leftrightarrow \operatorname{div}_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \delta \left( \frac{z^2}{2} - \delta z \right)) = -\partial_z u_z(\cdot, z) \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (10a)$$

$$\Leftrightarrow [u_z]_0^z = \int_0^z -\operatorname{div}_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \delta \left( \frac{w^2}{2} - \delta w \right)) dw \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (10b)$$

$$\Rightarrow [u_z]_0^{\delta} = \mathbf{u}_{\parallel} \nabla_{\parallel} \delta + \operatorname{div}_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \delta \left( \frac{\delta^3}{3} \right)) \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_f(t) \quad (10c)$$

En injectant l'équation (9d), on obtient un problème

**(PH)** : Trouver  $\delta$  défini dans  $]0, t_f[ \times \Omega$  vérifiant

$$\partial_t \delta - \operatorname{div}_{\parallel} \left( \frac{\delta^3}{3} \nabla_{\parallel} \delta \right) = -u_a \chi_{|\Gamma_a} \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Omega \quad (11a)$$

$$(11b)$$

dont la solution définit explicitement  $\mathbf{u}$  par les relations (10) :

$$\mathbf{u}_{\parallel}(\cdot, z) = \left( \frac{z^2}{2} - \delta z \right) \nabla_{\parallel} \delta \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (11c)$$

$$u_z = -\operatorname{div}_{\parallel} \left( \left( \frac{z^3}{6} - \frac{\delta z^2}{2} \right) \nabla_{\parallel} \delta \right) - u_a \chi_{|\Gamma_a} \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (11d)$$

## 2.5 Redimensionnement

Dans ce paragraphe les grandeurs mentionnées sont dimensionnées. Les équations (11) deviennent

$$\partial_t \delta - \frac{\rho g}{\eta} \operatorname{div}_{\parallel} \left( \frac{\delta^3}{3} \nabla_{\parallel} \delta \right) = -u_a \chi_{|\Gamma_a} \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Omega \quad (12a)$$

$$\delta(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (12b)$$

Les équations (10) deviennent :

$$\mathbf{u}_{\parallel}(\cdot, z) = \frac{\rho g}{\eta} \left( \frac{z^2}{2} - \delta z \right) \nabla_{\parallel} \delta \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (12c)$$

$$u_z(\cdot, z) = -u_a \chi_{|\Gamma_a} - \frac{\rho g}{\eta} \operatorname{div}_{\parallel} \left( \left( \frac{z^3}{6} - \frac{\delta z^2}{2} \right) \nabla_{\parallel} \delta \right) \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (12d)$$

On rajoute les équations de température :

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \partial_{zz} T \quad \text{dans } ]0, t_f[ \times \Lambda(t) \quad (12e)$$

$$-k \partial_z T = H(\epsilon_r \sigma (T^4 - T_0^4) + \lambda(T - T_0)) \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_f(t) \quad (12f)$$

$$k \partial_z T = k_s \partial_z T_s \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_s(t) \quad (12g)$$

$$T = T_1 \quad \text{sur } ]0, t_f[ \times \Gamma_a \quad (12h)$$

Le problème réduit dimensionné s'énonce ainsi :

**(PRD)** : Trouver  $\delta$  défini dans  $]0, t_f[ \times \Omega$  et  $\mathbf{u}, T$  définis dans  $]0, t_f[ \times \Lambda(t)$  vérifiant les relations (12a)-(12h).

## 2.6 Discretisation en temps

On se donne un entier  $M$  et une subdivision  $(t_k)_{0 \leq k \leq M}$  de  $[0, t_f]$  on définit le pas de temps  $\Delta t_m t = t_{m+1} - t_m$ . Le problème discrétisé en temps revient à chercher  $\delta^{(m)}$ ,  $\mathbf{u}^{(m)}$  et  $T^{(m)}$  pour  $m \leq 0$ . Ces objets sont définis par récurrence :

Pour  $m = 0$

$$\delta^{(0)} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad T^{(0)} = 0 \text{ dans } \Omega' \quad (13a)$$

Où  $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$  est un ouvert dans lequel vit le dôme fluide.

Pour  $m \geq 0$  si  $\delta^{(m)}$ ,  $\mathbf{u}^{(m)}$  et  $T^{(m)}$  sont connus alors

1. chercher  $\delta^{(m+1)}$  vérifiant

$$\frac{\delta^{(m+1)} - \delta^{(m)}}{\Delta t_m} - \frac{\rho g}{\eta} \operatorname{div} \left( \frac{(\delta^{(m)})^3}{3} \nabla \delta^{(m+1)} \right) = -u_a \chi_{|\Gamma_a} \quad \text{dans } \Omega. \quad (13b)$$

Puis poser

$$\Lambda^{(m)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \delta^{(m)} > 0\}, \quad \Gamma_f^{(m)} = \{(x, y, \delta^{(m)}(x, y)) \mid \delta^{(m)}(x, y) > 0\}$$

$$\Gamma_s^{(m)} = \{(x, y, 0) \mid \delta^{(m)}(x, y) > 0, \ x^2 + y^2 > r_0^2\}.$$

2. Calculer explicitement

$$\mathbf{u}_{\parallel}^{(m+1)}(\cdot, z) = \frac{\rho g}{\eta} \left( \frac{z^2}{2} - \delta^{(m+1)} z \right) \nabla_{\parallel} \delta^{(m+1)} \quad \text{dans } \Lambda^{(m+1)} \times [0, \delta^{(m+1)}] \quad (13c)$$

$$u_z^{(m+1)}(\cdot, z) = -u_a \chi_{|\Gamma_a} + \frac{\rho g}{\eta} \left( -\frac{z^3}{6} \Delta_{\parallel} \delta^{(m+1)} + \frac{z^2}{4} \Delta_{\parallel} \delta^{(m+1)^2} \right) \quad \text{dans } \Lambda^{(m+1)} \times [0, \delta^{(m+1)}] \quad (13d)$$

3. Définir la caractéristique horizontale, pour tout  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Lambda^{(m+1)}$  par

$$X_{\parallel}^{(m+1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t_m \mathbf{u}_{\parallel}^{(m+1)}(\mathbf{x}) \quad (13e)$$

4. Trouver  $T^{(m+1)}$  vérifiant

$$\begin{cases} \frac{T^{(m+1)} - T^{(m)} \circ X_{\parallel}^{(m+1)}}{\Delta t_m} + u_z^{(m+1)} \partial_z T^{(m+1)} - \kappa \partial_{zz} T^{(m+1)} = 0 & \text{dans } \Lambda^{(m+1)} \\ k \partial_z T^{(m+1)} + \epsilon_r \sigma (T^{(m+1)})^4 - T_0 + \lambda (T^{(m+1)} - T_0) = 0 & \text{sur } \Gamma_f^{(m+1)} \\ k \partial_z T^{(m+1)} - k_s \partial_z T_s(t_{m+1}) = 0 & \text{sur } \Gamma_s^{(m+1)} \\ T^{(m+1)} = T_1 & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad (13f)$$

Le problème à l'étape 1 est un problème elliptique non linéaire dégénéré. Le problème à l'étape 4 est un problème linéaire elliptique avec des conditions aux limites non linéaires sur  $\Gamma_f^{(m)}$ . Nous allons en premier lieu donner une méthode d'approximation de la condition au bord sur le substrat.

## 2.7 Approximation du flux dans le substrat

On introduit  $T_s$  la température dans le substrat et  $T_b$  la température du fluide à l'interface. Dans le substrat, le flux issu du contact avec le fluide est dissipé selon une loi de diffusion

$$\begin{cases} \partial_t T_s - \kappa_s \Delta T_s = 0 & \text{dans } ]t_m, t_{m+1}[ \times \Omega \times \mathbb{R}_-^* \\ T_s(\cdot, 0) = T_b(t_{m+1}) & \text{sur } ]t_m, t_{m+1}[ \times \Omega \times \mathbb{R}_-^* \\ T_s(t_m) = T_b(t_m)(\cdot, 0) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

Ceci exprime le fait que le substrat initialement à la température  $T^{(m)}(\cdot, 0)$  reçoit un choc thermique le long de la surface  $z = 0$ , avec la température imposée  $T_s = T^{(m+1)}$  durant tout le pas de temps  $[t_m, t_{m+1}]$ . On suppose que la diffusion s'effectue de façon privilégiée selon la direction verticale, on explicite les solutions de ce nouveau problème afin de transformer la condition de flux en condition de Robin, on impose dans un premier temps :

Pour  $m \in [0, M - 1]$ ,  $(x, y, 0) \in \Gamma_f(t_{m+1})$ , si on connaît  $T_b(t_m, x, y)$ , alors la fonction  $z \mapsto T_s(t_m + t, x, y, -z) - T_b(t_m, x, y)$  est solution de (14) avec  $\Theta_0 = T_b(t_{m+1}, x, y) - T_b(t_m, x, y)$  et  $t^* = \Delta t_m^m$

$$\begin{aligned}
\partial_t \Theta - \kappa_s \partial_{\xi\xi} \Theta &= 0 & \text{dans } ]0, t^*[\times]0, +\infty[ \\
\Theta &= 0 & \text{sur } \{0\}\times]0, +\infty[ \\
\Theta &= \Theta_0 & \text{sur } ]0, t^*[\times\{0\}
\end{aligned} \tag{14}$$

On recherche une solution autosimilaire de (14), c'est à dire

$$\Theta(\xi, t) = \phi(\xi t^{-\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow -\frac{\zeta}{2\kappa_s} \phi' + \phi'' = 0 \tag{15}$$

La résolution de l'équation différentielle ordinaire en  $\phi$  permet d'affirmer qu'il existe  $\alpha, \beta$  tels que

$$\Theta(\xi, t) = \alpha \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t\kappa_s}}\right) + \beta.$$

où erf est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  qui s'annule en 0. La condition initiale et la condition à l'interface impliquent

$$\Theta(\xi, t) = \Theta_0 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t\kappa_s}}\right)\right) \text{ d'où } \partial_{\xi} \Theta = \frac{-\Theta_0}{\sqrt{t\kappa_s\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t\kappa_s}}\right)^2\right) \tag{16}$$

De  $\Theta$ , on déduit  $T_s$  et la continuité du flux à l'interface implique :

$$k\partial_z T_b(t, x, y, 0) = k_s \partial_z T_s(t, x, y, 0) = k_s \frac{T_b(t_{m+1}, x, y) - T_b(t_m, x, y)}{\sqrt{(t - t^m)\kappa_s\pi}} \text{ sur } ]t_m, t_{m+1}[\times\Gamma_s^{(m+1)} \tag{17}$$

En prenant  $t = t_m$ , la condition au bord sur  $\Gamma_s^{(m+1)}$  (13f) devient :

$$\partial_z T_b(t) - \frac{k_s}{k} \frac{T^{(m+1)} - T^{(m)}}{\sqrt{\Delta t_m \kappa_s \pi}} = 0 \text{ sur } \Gamma_s^{(m+1)} \tag{18}$$

Il s'agit d'une condition de type Robin. On notera à présent  $g_b = \frac{k_s}{k} \frac{T_b(t_m)}{\sqrt{\Delta t_m^m \kappa_s \pi}}$ ,  $\alpha_b = \frac{k_s}{k} \frac{1}{\sqrt{\Delta t_m^m \kappa_s \pi}}$ .

## 2.8 Définition du problème thermique discrétisé en temps

**Conditions sur la surface libre.** Au niveau du bord supérieur, on interprète la condition de rayonnement comme une condition de Robin en écrivant,

$$-k\partial_z T(t) = \epsilon_r \sigma (T^3(t_m)T(t) - T_0^4) + \lambda(T(t) - T_0) \text{ sur } ]t_m, t_{m+1}[\times\Gamma_f^{(m+1)} \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \partial_z T(t) + \frac{\epsilon_r \sigma T^3(t_m) + \lambda}{k} T(t) = \frac{\epsilon_r \sigma T_0^4 + \lambda T_0}{k} \text{ sur } ]t_m, t_{m+1}[\times\Gamma_f^{(m+1)} \tag{20}$$

c'est à dire que  $T^3$  est évaluée au temps précédent. On notera désormais  $\alpha_u = \frac{\epsilon_r \sigma T^3(t_m) + \lambda}{k}$ ,  $g_u = \frac{\epsilon_r \sigma T_0^4 + \lambda T_0}{k}$ . On annonce le problème thermique discrétisé au temps  $m + 1$ ,

**(PT)** : Trouver  $T^{(m+1)}$  défini dans  $\Lambda^{(m+1)}$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\frac{T^{(m+1)} - T^{(m)} \circ X_{||}^{(m+1)}}{\Delta t_m} + u_z^{(m+1)} \partial_z T^{(m+1)} - \kappa \partial_{zz} T^{(m+1)} &= 0 & \text{dans } \Lambda^{(m+1)} \\
\partial_{\mathbf{n}} T^{(m+1)} + \alpha_u T^{(m+1)} &= g_u & \text{sur } \Gamma_f^{(m+1)} \\
\partial_{\mathbf{n}} T^{(m+1)} + \alpha_b T^{(m+1)} &= g_b & \text{sur } \Gamma_s^{(m+1)} \\
T^{(m+1)} &= T_1 & \text{sur } \Gamma_a
\end{array} \right. \tag{21}$$

Il s'agit d'un système elliptique linéaire.

## 2.9 Adimensionnement isotrope

On reprend les notations précédentes et on introduit une nouvelle vitesse caractéristique  $V = \frac{\rho g H^2}{\eta}$  et un écart de température caractéristique  $\Delta T = T_1 - T_0$ . On définit les grandeurs adimensionnées

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = V \hat{\mathbf{u}} \quad \delta = H \hat{\delta} \quad u_a = V \hat{u}_a \quad T = T_0 + \Delta T \hat{T} \quad t = \frac{H}{V} \hat{t} \quad \Delta t_m = \frac{H}{V} \hat{\Delta} t_m$$

On définit de même les domaines adimensionnés,  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{\Lambda}^{(m)}$ ,  $\hat{\Gamma}_a$ ,  $\hat{\Gamma}_s^{(m)}$ ,  $\hat{\Gamma}_f^{(m)}$ . On réécrit les équations semi-discrétisées pour la hauteur et la vitesse dans ce système de coordonnées

$$\frac{\hat{\delta}^{(m+1)} - \hat{\delta}^{(m)}}{\hat{\Delta} t_m} - \operatorname{div} \left( \frac{(\hat{\delta}^{(m)})^3}{3} \hat{\nabla} \hat{\delta}^{(m+1)} \right) = -\hat{u}_a \chi_{|\hat{\Gamma}_a} \quad \text{dans } \hat{\Omega} \quad (22a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^{(m+1)}(\cdot, z) = \left( \frac{\hat{z}^2}{2} - \hat{z} \hat{\delta}^{(m+1)} \right) \hat{\nabla}_{\parallel} \hat{\delta}^{(m+1)} \quad \text{dans } \hat{\Lambda}^{(m+1)} \quad (22b)$$

$$\hat{u}_z^{(m+1)}(\cdot, \hat{z}) = -\hat{u}_a \chi_{|\Gamma_a} + \left( -\frac{\hat{z}^3}{6} \hat{\Delta}_{\parallel} \hat{\delta}^{(m+1)} + \frac{\hat{z}^2}{4} \hat{\Delta}_{\parallel} \hat{\delta}^{(m+1)^2} \right) \quad \text{dans } \hat{\Lambda}^{(m+1)} \quad (22c)$$

Soit  $\hat{P}e$  le nombre de Péclet, sans dimension, défini par  $\hat{P}e = \frac{\rho^2 C_p g H}{\eta k}$ . On déduit une reformulation du problème **PT**

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}e \left( \frac{\hat{T}^{(m+1)} - \hat{T}^{(m)} \circ \hat{X}_{\parallel}^{(m+1)}}{\hat{\Delta} t_m} + \hat{u}_z^{(m+1)} \partial_z \hat{T}^{(m+1)} \right) - \partial_{\hat{z}\hat{z}} \hat{T}^{(m+1)} = 0 \quad \text{dans } \hat{\Lambda}^{(m+1)} \\ \partial_z \hat{T}^{m+1} + \hat{\alpha}_u \hat{T}^{(m+1)} = \hat{g}_u \quad \text{sur } \hat{\Gamma}_f^{(m+1)} \\ -\partial_z \hat{T}^{(m+1)} + \hat{\alpha}_b \hat{T}^{(m+1)} = \hat{g}_b \quad \text{sur } \hat{\Gamma}_s^{(m+1)} \\ \hat{T}^{(m+1)} = T_1 \quad \text{sur } \hat{\Gamma}_a \end{array} \right. \quad (23a)$$

En effet, la condition sur  $\hat{\Gamma}_f^{(m+1)}$  s'écrit

$$\partial_z \hat{T}^{(m+1)} + (N_u \hat{K}(\hat{T}^{(m)}) + C_u) \hat{T}^{(m+1)} = 0 \quad \text{sur } \hat{\Gamma}_f^{(n+1)} \quad (23b)$$

On introduit les grandeurs sans dimension

$$Nu = \frac{H \epsilon_r \sigma \Delta T^3}{k} \quad \text{nombre de Nussel} \quad (23c)$$

$$\alpha = \frac{T_0}{\Delta T}$$

$$C_u = \frac{H \lambda}{k} \quad \text{convection avec l'air} \quad (23d)$$

$$\hat{K}(\hat{T}) = \hat{T}^3 + 4\alpha \hat{T}^2 + 6\alpha^2 \hat{T} + 4\alpha^3$$

On définit  $\hat{\alpha}_u = (N_u \hat{K}(\hat{T}(\hat{t}_m)) + C_u) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z$  et  $\hat{g}_u = 0$ . La condition sur  $\Gamma_s(\hat{t})$  s'écrit,

$$-\partial_z \hat{T}_b + \frac{C_d}{\sqrt{\Delta t_m}} (\hat{T}_b - \hat{T}_b(\hat{t}_m)) = 0 \quad \text{dans } ]\hat{t}_m, \hat{t}_{m+1}[ \times \Lambda(\hat{t})_{\parallel} \quad (23e)$$

Où l'on a

$$C_d = \frac{H}{k} \left( \frac{\rho_s C_{ps} k_s V}{\pi H} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{diffusion dans le substrat} \quad (23f)$$

On définit  $g_b = \frac{C_d}{\hat{\Delta} t_m} \hat{T}_b^{(m)}$ ,  $\hat{\epsilon}_b = C_d^m$ .



Dans les applications, les nombres sans dimension importants seront  $\hat{P}e$  et  $C_d$  comme le montre la table des constantes physiques.

## 2.10 Discrétisation spatiale

Le problème est discrétisé en  $(x, y)$  par éléments finis et en  $z \in [0, \delta^{(m+1)}(x, y)]$  par le schéma donné dans la partie 1. On notera

$$\hat{\Lambda}_{||}^{(m)} = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega \mid \hat{\delta}(\hat{x}, \hat{y}) > 0\}$$

Ce problème conduit à résoudre à chaque pas de temps d'une part un problème elliptique bidimensionnel sur  $\Omega$  pour calculer la hauteur et d'autre part à résoudre autant de problèmes elliptiques monodimensionnels que de points de discrétisation dans  $\hat{\Omega}$  pour calculer la température. On doit aussi rajouter à chaque pas de temps le calcul de la température à l'interface à chaque pas de temps. On reprend les notations de la première partie c'est à dire, par exemple  $\hat{T}_{i+\frac{1}{2}}$  représente une approximation de  $\hat{T}(\cdot, \frac{i+\frac{1}{2}}{n})$  où  $n$  représente le

nombre de couches. A l'aide la condition de saut  $\hat{T}_b^{(m+1)} = \frac{\hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m+1)} + T_s^{(m+1)}(-\frac{\hat{h}}{2})}{2}$  dans  $\hat{\Lambda}_{||}^{(m+1)}$ , avec

$$T_s^{(m+1)}\left(-\frac{\hat{h}}{2}\right) = (T_b^{(m+1)} - T_b^{(m)}) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{h}}{4\sqrt{\Delta_t^m \kappa_s}}\right)\right) \text{ dans } \hat{\Lambda}_{||}^{(m+1)}$$

On initialise donc  $T_b^{(0)} = T_0$  dans  $\Omega_{||}$ , pour  $0 \leq m \leq M - 1$ , si on connaît  $\hat{T}_b^{(m)}$  et  $\hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m+1)}$  alors

$$\hat{T}_b^{(m+1)} = \frac{\hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m+1)} - \hat{T}_b^{(m)} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{h}}{4\sqrt{\Delta_t^m \kappa_s}}\right)\right)}{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{h}}{4\sqrt{\Delta_t^m \kappa_s}}\right)} \text{ dans } \Lambda_{||}^{(m+1)} \quad \hat{T}_b^{(m+1)} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Lambda_{||}^{(m+1)} \quad (24)$$

On explicite la discrétisation du problème **PT**. On note  $\hat{h}(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{n}$ ,  $\hat{\epsilon}_u = \hat{h}\hat{\alpha}_u$ ,  $\hat{\epsilon}_b = \hat{h}\hat{\alpha}_b$ ,  $\hat{\beta}_u = \frac{6\hat{\epsilon}_u+13}{9\hat{\epsilon}_u+24}$  et  $\hat{\beta}_b = \frac{6\hat{\epsilon}_b+13}{9\hat{\epsilon}_b+24}$ . Remarquons que  $(\hat{\mathbf{u}}_{\beta_d}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{n-\beta_u})$ ,  $(\hat{u}_{z,i})_{1 \leq i \leq n}$ ,  $(\hat{T}_{i+\frac{1}{2}})_{0 \leq i \leq n-1}$  sont définis sur  $\hat{\Omega}^n$ .

$$\begin{aligned}
& \forall i \in [|1n-2|] \\
-\hat{P}e \left( \frac{\hat{T}_{i+\frac{1}{2}}^{(m+1)} - \hat{T}_{i+\frac{1}{2}}^{(m)} \circ (-\hat{\Delta}_t^m \hat{\mathbf{u}}_{||i+\frac{1}{2}}^{(m)})}{\hat{\Delta}_t^m} \right) &= \frac{\hat{P}e}{\hat{h}} \left( \frac{\hat{u}_{z,i+|\hat{u}_{z,i}|}}{2} (\hat{T}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{T}_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{\hat{u}_{z,i+1} - |\hat{u}_{z,i+1}|}{2} (\hat{T}_{i+\frac{3}{2}} - \hat{T}_{i+\frac{1}{2}}) \right) \\
&+ \frac{1}{\hat{h}^2} \left( -\hat{T}_{i+\frac{3}{2}} + 2\hat{T}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{T}_{i-\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{25a}$$

dans  $\hat{\Lambda}_{||}^{(m+1)}$

$$\begin{aligned}
& \hat{T}_{n-\frac{3}{2}} \left[ -\hat{P}e \frac{\hat{h}}{2} \frac{8+3\hat{\epsilon}_u}{8+4\hat{\epsilon}_u} (\hat{u}_{z,n-1} + |\hat{u}_{z,n-1}|) - 1 \right] + \\
T_{n-\frac{1}{2}} \left[ \hat{P}e \frac{\hat{h}}{2} \frac{8+3\hat{\epsilon}_u}{8+4\hat{\epsilon}_u} (\hat{u}_{z,n-1} + |\hat{u}_{z,n-1}| - \frac{2\hat{\epsilon}_u}{2+\hat{\epsilon}_u} (\hat{u}_{z,n} - |\hat{u}_{z,n}|)) + \frac{2+3\hat{\epsilon}_u}{2+\hat{\epsilon}_u} \right] &= -\hat{P}e \frac{8+3\hat{\epsilon}_u}{8+4\hat{\epsilon}_u} \hat{h}^2 \left( \frac{\hat{T}_{n-\frac{1}{2}}^{(m+1)} - \hat{T}_{n-\frac{1}{2}}^{(m)} \circ (-\hat{\Delta}_t^m \hat{\mathbf{u}}_{||n-\beta_u}^{(m)})}{\hat{\Delta}_t^m} \right)
\end{aligned} \tag{25b}$$

dans  $\hat{\Gamma}_f^{(m+1)}$

$$\begin{aligned}
& \hat{T}_{\frac{3}{2}} \left[ \hat{P}e \frac{\hat{h}}{2} \frac{8+3\hat{\epsilon}_b}{8+4\hat{\epsilon}_b} (\hat{u}_{z,1} - |\hat{u}_{z,1}|) - 1 \right] + \\
\hat{T}_{\frac{1}{2}} \left[ \hat{P}e \frac{\hat{h}}{2} \frac{8+3\hat{\epsilon}_b}{8+4\hat{\epsilon}_b} (-\hat{u}_{z,1} + |\hat{u}_{z,1}|) + \frac{2+3\hat{\epsilon}_b}{2+\hat{\epsilon}_b} \right] &= \hat{g}_b \left[ \hat{h} \frac{2}{2+\hat{\epsilon}_b} \right] - \hat{P}e \frac{8+3\hat{\epsilon}_b}{8+4\hat{\epsilon}_b} \hat{h}^2 \left( \frac{\hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m+1)} - \hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m)} \circ (-\hat{\Delta}_t^m \hat{\mathbf{u}}_{||\hat{\beta}_d}^{(m)})}{\hat{\Delta}_t^m} \right)
\end{aligned} \tag{25c}$$

dans  $\hat{\Gamma}_s^{(m+1)}$

$$\begin{aligned}
& \hat{T}_{\frac{3}{2}} \left[ \hat{P}e \frac{3\hat{h}}{8} (\hat{u}_{z,1} - |\hat{u}_{z,1}|) - 1 \right] + \\
\hat{T}_{\frac{1}{2}} \left[ \hat{P}e \frac{3\hat{h}}{8} (2(\hat{u}_0 + |\hat{u}_0|) - \hat{u}_1 + |\hat{u}_1|) + 3 \right] &= \left[ \hat{P}e \frac{3\hat{h}}{4} (\hat{u}_0 + |\hat{u}_0|) + 2 \right] - \frac{3}{4} \hat{P}e \hat{h}^2 \left( \frac{\hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m+1)} - \hat{T}_{\frac{1}{2}}^{(m)} \circ (-\hat{\Delta}_t^m \hat{\mathbf{u}}_{||\frac{2}{3}}^{(m)})}{\hat{\Delta}_t^m} \right)
\end{aligned} \tag{25d}$$

dans  $\hat{\Gamma}_a$

La résolution se déroule de la façon suivante :

On impose la condition initiale :

$$\hat{\delta}^{(0)} = 0 \text{ dans } \Omega \quad \hat{\mathbf{u}}^{(0)} = 0 \text{ dans } \Omega^n \quad (\hat{T}_{i+\frac{1}{2}}^{(0)})_{0 \leq i \leq n-1} = 0 \text{ dans } \Omega^n \quad \hat{T}_b^{(0)} = 0 \text{ dans } \Omega \tag{26}$$

Pour  $m \in [|0, M-1|]$ , on suppose connu

$$\hat{\delta}^{(m)} \quad (\hat{T}_{i+\frac{1}{2}}^{(m)})_{0 \leq i \leq n-1}, \quad \hat{T}_b^{(m)}$$

On calcule  $\hat{\delta}^{(m+1)}$  par éléments fins grâce à l'équation (22a).

On calcule les  $(\hat{T}_{i+\frac{1}{2}}^{(m+1)})_{0 \leq i \leq n-1}$  grace aux équations (25)

On calcule  $(\hat{\mathbf{u}}_{\beta_d}^{(m+1)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{(m+1)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{n-\beta_u}^{(m+1)})$  grâce aux équations (22b)-(22c)

On calcule  $\hat{T}_b^{(m+1)}$  grâce a la relation 24

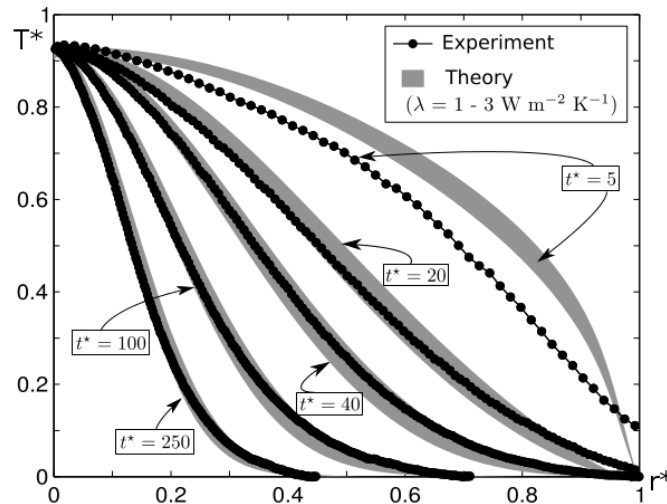
### 3 Résultats numériques

#### 3.1 Mesures thermiques de référence

Dans [6] sont présentées des mesures thermiques effectuées sur une expérience de laboratoire reproduisant la croissance d'un dôme de lave. La photographie suivante, provenant cet article permet de se représenter ce que nous devons simuler.



Il est de plus précisé dans [5] que la hauteur d'un dôme visqueux est bornée et que son rayon a un profil en  $\sqrt{t}$ . Nous comparerons des la température de surface donnée par le calcul numérique exposé dans la deuxième partie avec des données expérimentales exposées dans [6] sous la forme du tableau suivant

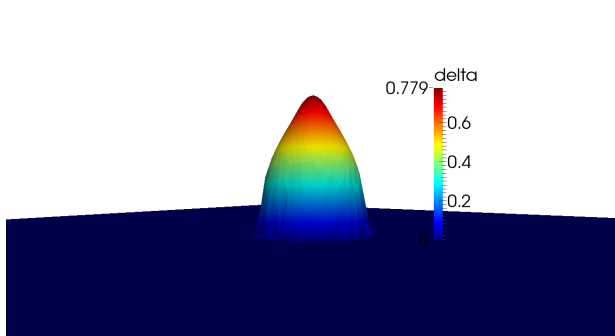


où  $T^* = \hat{T}$  et  $r^* = \frac{r}{r_f(t)}$  représentent respectivement une température et un rayon adimensionnés.  $r_f(t)$  représente la position du front du dôme à l'instant  $t$ .  $t^* = \frac{t}{\tau}$  est un temps adimensionné défini dans [6] avec

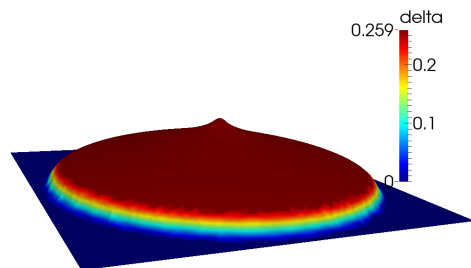
$$\tau = \frac{0.715^{\frac{4}{3}}}{\kappa} \left( \frac{3\eta Q}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

#### 3.2 Validation du calcul dynamique

On donne tout d'abord à titre d'exemple deux images d'une simulation de la croissance d'un dôme de silicone.

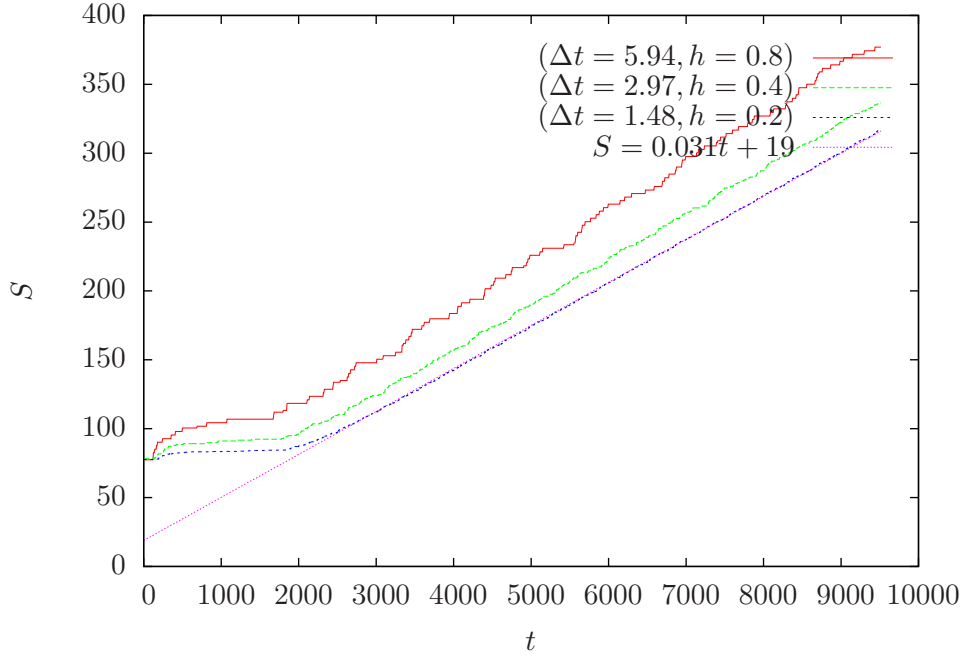


croissance verticale en temps très courts

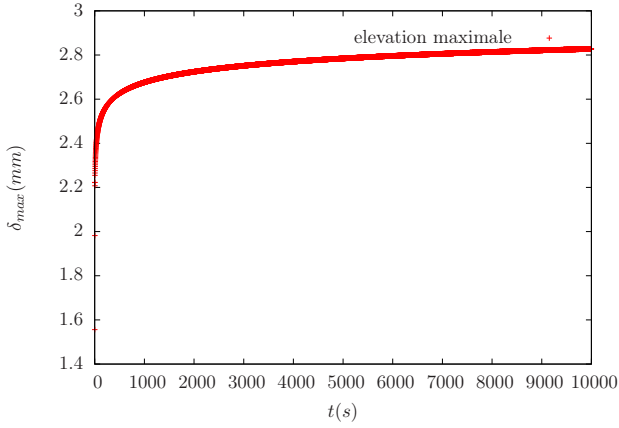


étalement en temps long

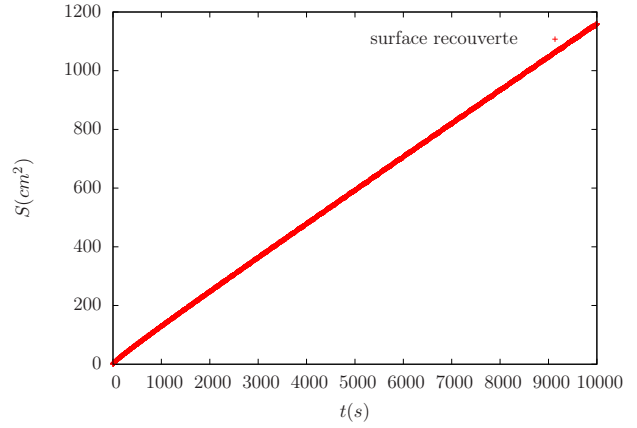
Nous avons effectué des tests de convergence, le graphique suivant indique l'évolution de la surface couverte par le dôme au cours du temps. On remarque la convergence des solutions numériques lorsque l'on divise simultanément  $\Delta t$  et la taille caractéristique de la maille,  $h$  par 2. Il est notable que la surface recouverte par le dôme a un profil linéaire ce qui est conforme aux profils théoriques.



Comme on peut le voir sur les deux graphique ci-dessous, l'évolution en temps long de la hauteur maximale et de la surface couverte par un dôme de silicone simulé avec les les mêmes paramètres physiques que celui dont sont issues les mesures de [6] est tout à fait conforme aux profils de référence. En particulier, l'élévation maximale tend vers une constante tandisque la surface recouverte par le dôme croit linéairement en temps.



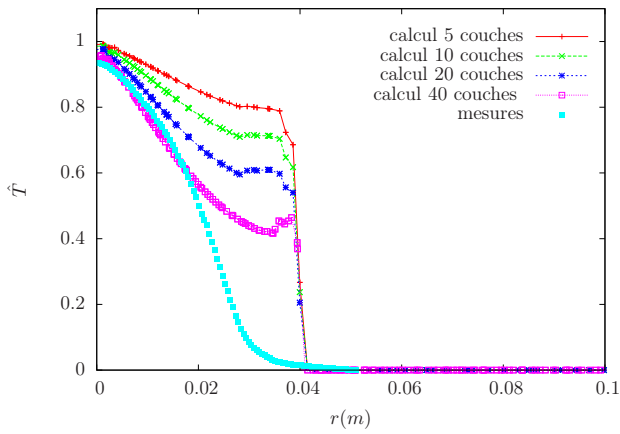
Hauteur maximale



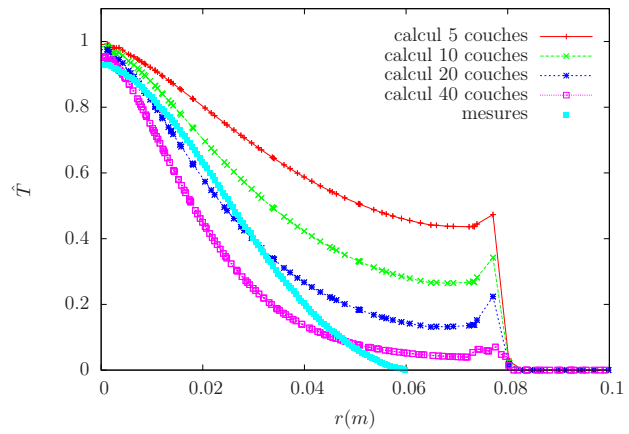
surface recouverte

### 3.3 Validation du calcul thermique

Nous présentons ici une comparaison entre les données issues de [6] et celles simulées par le code. Nous nous limiterons à  $t^* = 5$  et  $t^* = 20$ . Nous effectuons un test pour  $n = 5$  couches et un pas de temps  $\Delta t = 1$  s. Sur le même maillage horizontal, nous divisons le pas de temps par 2 tout en multipliant simultanément le nombre de couches par deux, nous répétons cette opération une fois sur le même maillage et une autre fois sur un maillage deux fois plus fin. Ainsi nous pouvons effectuer une première étude de convergence. On observe clairement une convergence pour  $t^* = 20$ . Pour  $t^* = 5$ , cette convergence est seulement amorcée, l'étude de laconvergence aux temps courts necessiterait de raffiner le maillage et le pas de temps, et d'augmenter le nombre de couches. Pour  $t^* = 20$ , la solution sur le maillage fin correspond globalement aux mesures expérimentales, les différences observées suggèrent des erreurs de modèle. D'autre part, il apparait de petites instabilités au bord  $\partial(\Omega \cap \Lambda)$ , cela est probablement lié au fait que la norme  $\|\nabla \delta\|$  est forte dans cette zone.



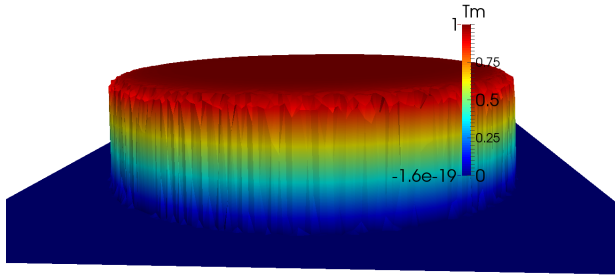
Comparaison à  $t^* = 5$



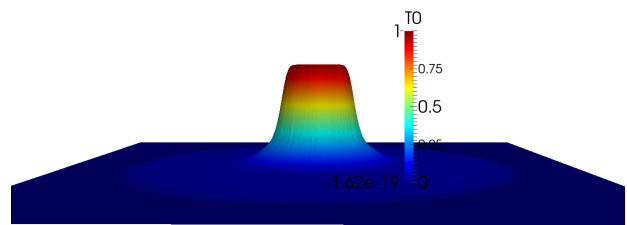
Comparaison à  $t^* = 20$

### 3.4 Intérêt pour les applications à la volcanologie

Contrairement au fluide newtonniens considérés, les laves ne sont pas des fluides isovisqueux c'est à dire que la vitesse de fluide et la température ne peuvent pas être découplées. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu des profils de température de surface. Observons à présent des profils de température dans des couches moins superficielles.



température dans une couche médiane



température dans la couche la plus basse

Les profils sont radicalement différents, cette approche constitue donc un apport en comparaison des modèles utilisés jusqu'à présent en volcanologie, qui n'utilisent qu'une seule couche.



## Conclusion

Nous avons ici présenté une méthode de résolution numérique d'un problème présentant plusieurs difficultés, telles que une grande anisotropie ou une surface libre. Il nous a de plus fallu développer des méthodes robustes compte tenu des constantes physiques mises en jeu, par exemple  $Pe = 10^7$ . Les résultats obtenus sont encourageants dans la mesure où l'on observe une convergence de la température de surface simulée vers une série de mesures physiques effectuées en laboratoire. L'idée de transformer un problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel et une pile de problèmes unidimensionnels est donc une piste intéressante lorsque l'on cherche à simuler des écoulements géophysiques visqueux en adaptant l'algorithme présenté.

Il reste cependant beaucoup à faire pour continuer dans cette voie, en premier lieu, il faudrait réécrire le code en axisymétrique pour pouvoir raffiner encore les pas de temps, d'espace et comparer les résultats numériques aux autres résultats expérimentaux, ce qui nécessite d'augmenter la taille du domaine horizontal  $\Omega$  ainsi que l'intervalle de temps  $]0, t_f[$ . Ensuite le but serait d'appliquer cette méthode sur des cas réalistes, cela signifie utiliser le code actuel sur un domaine plus complexe d'un point de vue géométrique, faire de l'adaptation de maillages afin de raffiner la discrétisation à la frontière  $\partial(\Lambda \cap \Omega)$ . Ce point améliorerait beaucoup la qualité de l'approximation dans la mesure où cette zone présente quelques instabilités. Enfin, on pourrait prendre une équation dynamique plus compliquée en considérant des fluides à seuils, coupler totalement la vitesse et la température en considérant des viscosités non isothermes.

On pourrait aussi considérer une suspension dont la fraction volumique est aussi régie par une équation de réaction diffusion plus complexe que celle que nous avons considérée pour la température, c'est l'objet de mon sujet de thèse.





## Références

- [1] E. Audusse and M.-O. Bristeau. Transport of pollutant in shallow water : a two time steps kinetic method. *ESAIM Math. Modell. Numer. Anal.*, 37(02) :389–416, 2003.
- [2] A. J. C. Barré de Saint-Venant. Théorie et équations générales du mouvement non permanent des eaux courantes. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, France, Séance 17*, 73 :147–154, 1871.
- [3] N. Bernabeu, P. Saramito, and C. Smutek. Numerical modeling of shallow non-newtonian flows : Part II. viscoplastic fluids and general tridimensional topographies. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 11(1) :213–228, 2014.
- [4] Daniele Antonio Di Pietro. Cell centered Galerkin methods. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(1-2) :31–34, January 2010.
- [5] F. Garel. *Modélisation de la dynamique et du refroidissement des coulées de lave : e utilisation de la télédétection thermique dans la gestion d'une éruption effusive*. PhD thesis, Institut de physique du globe, Paris, 2012.
- [6] F. Garel, E. Kaminski, S. Tait, and A. Limare. An experimental study of the surface thermal signature of hot subaerial isoviscous gravity currents : Implications for thermal monitoring of lava flows and domes. *J. of Geophysical Resaerch*, 117 :B02205, 2012.
- [7] P. Huybrechts and J. Oerlemans. Evolution of the east Antarctic ice sheet : a numerical study of thermo-mechanical response patterns with changing climate. *Ann. Glaciol.*, 11 :52–59, 1988.
- [8] Florian Lemarié, Laurent Debreu, AF Shchepetkin, and James C Mcwilliams. On the stability and accuracy of the harmonic and biharmonic isoneutral mixing operators in ocean models. *Ocean Modelling*, 52 :9–35, 2012.
- [9] K. F. Liu and C. C. Mei. Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 207 :505–529, 1989.
- [10] G. Madec. NEMO ocean engine. Technical report, Institut Pierre-Simon Laplace, France, 2008.
- [11] C. Ritz, A. Fabre, and A. Letrégully. Sensitivity of a greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters : consequences for the evolution through the last climatic cycle. *Climate Dyn.*, 13(1) :11–23, 1996.
- [12] Pierre Saramito. *Language C++ et calcul scientifique*. College Publications, London, 2013.