

# Modélisation numérique des fluides viscoplastiques

## Application aux coulées de lave volcanique

Stage de Master 2  
Ingénierie de la modélisation et de la simulation  
numérique

par  
Noé Bernabeu

Responsable du master :

Eric Blayo (Laboratoire Jean Kuntzmann)

Responsable du stage :

Christophe Prud'homme (Laboratoire Jean Kuntzmann)

Encadreurs du stage :

Pierre Saramito (Laboratoire Jean Kuntzmann)

Claude Smutek (Laboratoire Géosciences à Saint-Denis)





## Table des matières

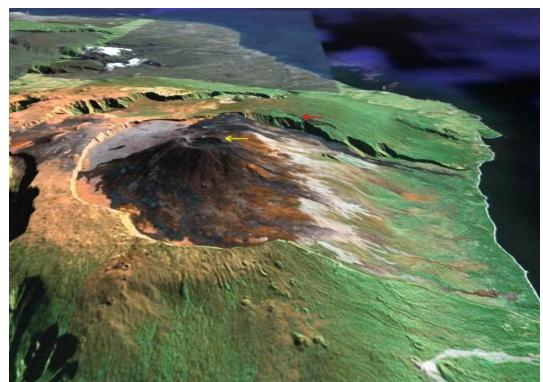
<b>1</b>	<b>Le problème général</b>	<b>2</b>
1.1	Le contexte général . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>3</b>
2.1	Le problème d'écoulement tridimensionnel . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Adimensionnement des équations</b>	<b>5</b>
3.1	Adimensionnement des variables . . . . .	5
3.2	Réécriture des équations . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Équations réduites par analyse asymptotique</b>	<b>8</b>
4.1	Le problème à l'ordre 0 en $\varepsilon$ . . . . .	8
4.2	Le problème parabolique non-linéaire en $h$ . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Retour aux équations dimensionnelles</b>	<b>12</b>
5.1	Écriture du problème réduit dimensionnel . . . . .	12
5.2	Écriture du problème réduit adimensionné . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>13</b>
6.1	Discrétisation temporelle . . . . .	13
6.2	Adaptation du maillage . . . . .	15
6.3	Formulation variationnelle . . . . .	16
6.4	Structure générale du code numérique . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>17</b>
7.1	Expérience de N. J. Balmforth et R. V. Craster . . . . .	17
7.1.1	Présentation . . . . .	17
7.1.2	Comparaison . . . . .	18
7.2	Expérience de S. Cochard et C. Ancey . . . . .	18
7.2.1	Présentation . . . . .	18
7.2.2	Comparaison . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Modélisation des coulées de lave</b>	<b>24</b>
8.1	Les données . . . . .	24
8.2	Le modèle . . . . .	26
8.3	Le modèle adimensionné . . . . .	27
<b>A</b>	<b>Exemple d'un code rhéolef</b>	<b>28</b>

## Table des figures

1	Vue schématique du problème d'écoulement en coupe verticale. . . . .	3
2	Maillage initial à gauche et maillage adapté à droite . . . . .	16
3	Zoom sur le maillage adapté . . . . .	16
4	Visualisation du Kaolin au début puis à la fin de l'expérience, $\alpha = 9.6^\circ$ . . . .	18
5	Visualisation du Kaolin au début puis à la fin de l'expérience, $\alpha = 3.4^\circ$ . . . .	18
6	Schéma de l'expérience réalisée . . . . .	19
7	Visualisation du Carbopol à la fin de l'ouverture de la porte à $t=0.19$ s, $\alpha = 12^\circ$ . . . . .	20
8	Vue tridimensionnelle du Carbopol ( $C = 0.30\%$ ) et $\alpha = 12^\circ$ aux temps : (b) $t = 0.3$ s, (c) $t = 0.6$ s, (d) $t = 1.4$ s et (d) $t = 52$ min. . . . .	21
9	Vue tridimensionnelle du Carbopol ( $C = 0.30\%$ ) et $\alpha = 12^\circ$ aux temps : $t = 0.2$ s, $t = 0.6$ s, $t = 1$ s et $t = 2$ s. . . . .	22
10	Vue tridimensionnelle du Carbopol ( $C = 0.30\%$ ) et $\alpha = 12^\circ$ aux temps : $t = 0.3$ s, $t = 0.6$ s, $t = 1.4$ s et $t = 12$ min. . . . .	23
11	Vue des lignes de fronts, en noir ce sont les courbes expérimentales et en couleurs celles numériques respectives. . . . .	23
12	Topographie du volcan et hauteur de lave après la coulée d'avril 2007 . . . .	24
13	Évolution de la coulée . . . . .	26
14	Débit de lave durant l'éruption d'avril 2007, (D. Coppola 2008) . . . . .	27

## Introduction

Les phénomènes naturels et procédés industriels faisant intervenir les fluides viscoplastiques sont nombreux, comme par exemple les coulées de boue, les avalanches, les coulées de lave volcanique, la circulation sanguine... Nous nous intéresserons dans ce stage au cas des coulées de lave volcanique. La dynamique des laves est très complexe car elle fait intervenir des problèmes mécaniques de fluides à seuil mais aussi des problèmes thermiques multiples (diffusion, convection, radiation, changement de phase). Nous travaillerons uniquement sur l'aspect mécanique avec des fluides isothermes. Les méthodes numériques correspondantes sont elles-même délicates : éléments finis dans un cadre dynamique, non-linéarités, maillages adaptatifs. Les simulations peuvent être faites sur des topographies simplifiées, correspondant à des expériences maquettes de laboratoires, ou bien avec des topographies réalistes, issues de relevés numériques de terrain. Nous nous intéresserons principalement sur une coulée datant d'avril 2007 du Piton de la Fournaise sur l'île de la Réunion. Cette coulée a été suivie de près par le laboratoire de Géosciences de Saint-Denis à la Réunion qui dispose de plusieurs données sur celle-ci comme la topographie du terrain avant et après l'éruption, l'évolution du débit de lave, la quantité de lave ... L'objectif de ce stage est de comprendre la dynamique des laves, et de manière plus général la dynamique des fluides viscoplastique. Nous travaillerons avec des fluides de faibles épaisseur dans le cas d'écoulement laminaire. Nous utiliserons le modèle de fluide de Herschel-Bulkley qui généralise le modèle des fluides Newtoniens, des fluides de Bingham et des fluides en loi de puissance qui ne sont que des cas particuliers de ce modèle. Dans un premier temps nous mettrons en équations le problème d'écoulement sur une topographie quelconque, nous verrons ensuite comment obtenir un problème réduit bidimensionnel à l'aide d'un développement asymptotique et une moyenne du champs de vitesse dans l'épaisseur de fluide, ensuite nous montrerons les méthodes numériques utilisée pour résoudre le problème ainsi que les résultats numériques obtenus que nous comparerons à des données expérimentales, enfin nous traiterons de l'objectif final, la modélisation de coulée de lave où nous essayerons de reproduire la coulée d'avril 2007 par simulation numérique.



# 1 Le problème général

## 1.1 Le contexte général

Nous présentons d'abord le modèle dans le cas général avec les différents choix possibles pour le tenseur des contraintes avant de se concentrer sur notre problème d'écoulement sur une topographie donnée où nous choisirons le modèle de Herschel-Bulkley.

Le modèle se présente de la manière suivante : trouver le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ , définis pour tout temps  $t > 0$  dans un domaine  $\Omega(t)$  dépendant du temps, tel que :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

où  $\rho$  est la densité constante (on suppose le fluide incompressible),  $\mathbf{g}$  la gravité et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes totales.

L'équation (1) traduit la conservation de la quantité de mouvement tandis que l'équation (2) traduit la conservation de la masse. En plus de ces deux équations on ajoute une loi constitutive afin de relier le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  avec les inconnus  $\mathbf{u}$  et  $p$ . C'est le choix de cette loi qui va déterminer le modèle que nous utilisons. Généralement, on décompose  $\boldsymbol{\sigma}$  de la manière suivante :  $\boldsymbol{\sigma} = -pI + \tau$  où  $\tau$  est le déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}$  de trace nulle et  $I$  le tenseur identité. Lorsque l'on parlera de contrainte ou de tenseur des contraintes, on fera référence à  $\tau$ .

**Choix 1 :**

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (3)$$

où  $\eta$  désigne la viscosité du volume du fluide et  $\dot{\gamma} = 2D(\mathbf{u})$  avec  $D(\mathbf{u})$  le tenseur symétrique de déformation  $D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}$ . Ce choix est utilisé pour modéliser les fluides Newtoniens (eau, air, miel ...). Il correspond aux équations de Navier-Stokes (XIX<sup>e</sup> siècle).

**Choix 2 :**

$$\tau = \kappa |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma} \quad (4)$$

où  $\kappa$  est la constante de consistance,  $n$  l'indice de la loi de puissance et où  $|\cdot|$  désigne la norme matricielle  $|M_{ij}| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij}^2}$ . On appelle cette loi une loi de puissance (proposée pour la première fois par Ostwald en 1925). Lorsque le fluide est Newtonien,  $n = 1$  et on retrouve le modèle précédent. Lorsque  $0 < n < 1$  on parle de fluide rhéofluidifiant (exemple bonne peinture, colle ...). Ce sont les liquides qui ont une viscosité qui décroît avec le taux de cisaillement. Lorsque  $n > 1$  (plus rare), on parle de fluide rhéoépaississant (maïzena ...) où l'on retrouve cette fois le comportement inverse. Les valeurs de  $\kappa$  et  $n$  sont déterminées expérimentalement.

**Choix 3 :**

$$\begin{aligned} \tau &= \eta \dot{\gamma} + \tau_0 \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} && \text{si } |\dot{\gamma}| \neq 0 \\ & && |\tau| < \tau_0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\tau_0$  est une contrainte seuil. Ce choix de  $\tau$  correspond au modèle de Bingham (début XX<sup>e</sup>). Il permet de modéliser les fluides à seuil. Si les contraintes sont trop faibles ( $|\tau| < \tau_0$ ),

le fluide reste rigide, par contre si elles dépassent le seuil de contrainte, le fluide se met à s'écouler. Remarquons que lorsque  $\tau_0 = 0$ , on retrouve le modèle pour les fluides Newtoniens.

**Choix 4 :**

$$\begin{aligned} \tau &= \kappa |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma} + \tau_0 \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} && \text{si } |\dot{\gamma}| \neq 0 \\ |\tau| &< \tau_0 && \text{sinon.} \end{aligned} \quad (6)$$

Ce modèle est un mixte du modèle de Bingham et du modèle en loi de puissance (proposé par Herschel et Bulkley en 1923). Lorsque  $n = 1$ , on retrouve les fluides de Bingham, lorsque  $\tau_0 = 0$ , on retrouve un loi de puissance, et lorsque  $n = 1$  et  $\tau_0 = 0$ , on retrouve le modèle de Navier-Stokes.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Le problème d'écoulement tridimensionnel

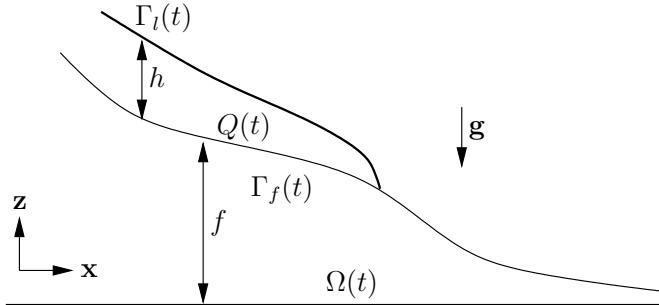


FIGURE 1 – Vue schématique du problème d'écoulement en coupe verticale.

Dans cette partie, nous présentons allons détailler le problème de l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley sur un relief.

L'intérieur du fluide  $Q(t)$  est composé d'un support bidimensionnel  $\Omega(t)$  décrit par les variables  $(x, y)$  et d'un intervalle de hauteur  $z \in [f(x, y), h(t, x, y)]$  où  $h$  est la hauteur du fluide :

$$Q(t) = \{(x, y, z); (x, y) \in \Omega(t), f(x, y) \leq z \leq f(x, y) + h(t, x, y)\}$$

Ce domaine évolue au cours du temps.

La frontière  $\partial Q(t)$  se décompose en trois parties :

- le fond :

$$\Gamma_f(t) = \{(x, y, z); (x, y) \in \Omega(t), z = f(x, y)\}$$

- la surface libre :

$$\Gamma_l(t) = \{(x, y, z); (x, y) \in \Omega(t), z = f(x, y) + h(t, x, y)\}$$

- les parois latérales :

$$\Gamma_p(t) = \{(x, y, z); (x, y) \in \partial\Omega(t), f(x, y) \leq z \leq f(x, y) + h(t, x, y)\}$$

Dans ce contexte, le problème est le suivant :  
trouver un champs de vitesse  $\mathbf{u}(t, x, y, z)$  et une pression  $p(t, x, y, z)$ , pour tout  $t > 0$  et dans  $Q(t)$  tel que :

$$\partial_t u_x + u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x + u_z \partial_z u_x = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\rho} (\partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}), \quad (7)$$

$$\partial_t u_y + u_x \partial_x u_y + u_y \partial_y u_y + u_z \partial_z u_y = -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \frac{1}{\rho} (\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} + \partial_z \tau_{yz}), \quad (8)$$

$$\partial_t u_z + u_x \partial_x u_z + u_y \partial_y u_z + u_z \partial_z u_z = -\frac{1}{\rho} \partial_z p - g + \frac{1}{\rho} (\partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \tau_{zz}). \quad (9)$$

Ces trois équations sont issues de la conservation de la quantité de mouvement. La conservation de la masse nous donne :

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0, \quad (10)$$

où  $\rho$  est la densité constante du fluide,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  la force de gravité et  $\tau_{ij}$  les contraintes (les composantes de  $\tau$ ).

Dans le cas de fluide de Herschel-Bulkley, elles ont pour expression :

$$\tau_{ij} = (\kappa |\dot{\gamma}|^{n-1} + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|}) \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{pour } |\tau| \geq \tau_0 \quad (11)$$

et

$$\dot{\gamma}_{ij} = 0 \quad \text{pour } |\tau| < \tau_0, \quad (12)$$

où  $\dot{\gamma}_{ij}$  sont les composantes du tenseur  $2D(\mathbf{u})$ ,

$$\dot{\gamma}_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (13)$$

On complète ces équations par une condition initiale pour  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ dans } Q(0) \quad (14)$$

et des conditions aux bords  $\forall t > 0$  :

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_l(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_f(t) \cup \Gamma_p(t) \quad (16)$$

La condition (15) traduit le comportement libre de la surface du fluide, la condition (16) traduit l'adhérence du fluide le long des parois.

Le problème n'est pas encore entièrement posé car on ne connaît pas l'expression de la hauteur du fluide  $h$  qui intervient dans la condition (15). Pour cela, on doit ajouter une équation et des conditions sur  $h$ .

On introduit la fonction de niveau :

$$\varphi(t, x, y, z) = z - f(x, y) - h(t, x, y).$$

On constate que  $\varphi(t, x, y, z) = 0$  correspond à l'équation de la surface libre,  $\varphi(t, x, y, z) < 0$  la zone au dessous de la surface libre et  $\varphi(t, x, y, z) > 0$  la zone au dessus de la surface libre.

Les lignes de niveau sont transportées par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0,$$

ce qui devient au niveau la surface libre  $z = f + h$  associée à la ligne de niveau zéro :

$$\partial_t h + u_x \partial_x(f + h) + u_y \partial_y(f + h) - u_z = 0, \quad \forall t > 0 \text{ et } (x, y) \in \Omega(t). \quad (17)$$

Cette équation d'évolution de la surface libre est complétée par une condition initial pour  $h$  :

$$h(t = 0, x, y) = h_{init}(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \Omega(0). \quad (18)$$

Remarque : la normale extérieure unitaire à la surface libre est :

$$\mathbf{n}(x, y, z) = f(x, y) + h(t, x, y) = \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla(f + h)|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x(f + h) \\ -\partial_y(f + h) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

On peut réécrire la condition sur  $\Gamma_l$  de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_x(f + h) \\ -\partial_y(f + h) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

### 3 Adimensionnement des équations

Dans cette partie, nous allons adimensionner nos équations. Le principe est de choisir une échelle bien adaptée à une quantité pour avoir des grandeurs de l'ordre de l'unité. Explicitement, si une quantité  $A$  est de l'ordre de  $A_0$ , on écrira  $A = A_0 \tilde{A}$  où  $A_0$  est une quantité physique dans les mêmes unités que  $A$  et  $\tilde{A}$  une grandeur de l'ordre de l'unité sans dimension. Cette technique permet de comparer les différentes variables adimensionnées et va permettre dans notre cas d'interpréter l'hypothèse de couche mince en vue d'un développement asymptotique.

#### 3.1 Adimensionnement des variables

Soit  $L$  une longueur caractéristique du domaine bidimensionnel  $\Omega$ ,  $H$  une hauteur caractéristique de la couche de fluide. Introduisons le paramètre  $\varepsilon = H/L$  et les dimensions caractéristiques suivantes :

- $U = \rho g H^3 / (\eta L)$  une vitesse caractéristique dans le plan  $(x, y)$ , où  $\eta = \kappa \left(\frac{U}{H}\right)^{n-1}$  est une viscosité représentative. En particulier, on obtient une expression de  $U$  ne faisant pas intervenir  $\eta$  :

$$U = \left(\frac{\rho g H^2}{\kappa L}\right)^{\frac{1}{n}} H$$

- $W = \varepsilon U$  une vitesse caractéristique dans la direction  $z$ ,

- $T = L/U$  un temps caractéristique,
- $P = \rho g H$  une pression caractéristique.

Les variables et les inconnues sont transformées en quantités adimensionnelles, notées avec des tildes :

$$t = T\tilde{t}, \quad x = L\tilde{x}, \quad y = L\tilde{y}, \quad z = H\tilde{z}, \quad p = P\tilde{p}, \quad h = H\tilde{h},$$

$$u_x = U\tilde{u}_x, \quad u_y = U\tilde{u}_y, \quad u_z = \varepsilon U\tilde{u}_z,$$

Cherchons à présent des formules d'adimensionnement des contraintes. Nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta, \quad \alpha, \beta \in \{x, y\} \\ \dot{\gamma}_{\alpha z} &= \partial_z u_\alpha + \partial_\alpha u_z, \quad \alpha \in \{x, y\} \\ \dot{\gamma}_{zz} &= 2\partial_z u_z,\end{aligned}$$

ce qui devient pour les variables sans dimension :

$$\begin{aligned}\tilde{\dot{\gamma}}_{\alpha\beta} &= \partial_{\tilde{\beta}} \tilde{u}_\alpha + \partial_{\tilde{\alpha}} \tilde{u}_\beta, \quad \alpha, \beta \in \{x, y\} \\ \tilde{\dot{\gamma}}_{\alpha z} &= \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_\alpha + \varepsilon^2 \partial_{\tilde{\alpha}} \tilde{u}_z, \quad \alpha \in \{x, y\} \\ \tilde{\dot{\gamma}}_{zz} &= 2\partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_z.\end{aligned}$$

De même, par définition de  $|\dot{\gamma}|$  et de l'équation (10) :

$$\begin{aligned}|\dot{\gamma}| &= [(\partial_x u_y + \partial_y u_x)^2 + 2(\partial_x u_x)^2 + 2(\partial_y u_y)^2 \\ &\quad + 2(\partial_x u_x + \partial_y u_y)^2 + (\partial_z u_x + \partial_x u_z)^2 + (\partial_z u_y + \partial_y u_z)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{21}$$

devient

$$|\tilde{\dot{\gamma}}| = \frac{1}{\varepsilon} E,$$

avec

$$\begin{aligned}E &= [\varepsilon^2 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_y + \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_x)^2 + 2\varepsilon^2 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x)^2 + 2\varepsilon^2 (\partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y)^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y)^2 + (\partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_x + \varepsilon^2 \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_z)^2 + (\partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_y + \varepsilon^2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_z)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{22}$$

et les relations :

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= (U/L) \tilde{\dot{\gamma}}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{x, y\} \\ \dot{\gamma}_{\alpha z} &= (U/H) \tilde{\dot{\gamma}}_{\alpha z}, \quad \alpha \in \{x, y\} \\ \dot{\gamma}_{zz} &= (U/L) \tilde{\dot{\gamma}}_{zz}, \\ |\dot{\gamma}| &= (U/L) |\tilde{\dot{\gamma}}|.\end{aligned}$$

On introduit le nombre de Bingham  $Bi$  sans dimension qui est le rapport du seuil de contrainte sur les contraintes visqueuses :

$$Bi = \frac{\tau_0 H}{\eta U} = \varepsilon^{-1} \frac{\tau_0}{\rho g H},$$

On va supposer que  $Bi = \mathcal{O}(1)$  en  $\varepsilon$ , ce qui peut s'interpréter comme  $\tau_0/(\rho g H) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Autrement dit, la contrainte seuil  $\tau_0$  est petite devant les contraintes dues à la gravité

$\rho g H$ .

On obtient alors de (11) les contraintes adimensionnées (toujours pour  $|\tau| \geq \tau_0$ ) :

$$\tilde{\tau}_{ij} = \left[ \frac{Bi}{E} + E^{n-1} \right] \tilde{\gamma}_{ij} \quad (23)$$

avec les relations :

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \eta(U/L)\tilde{\tau}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{x, y\} \\ \tau_{\alpha z} &= \eta(U/H)\tilde{\tau}_{\alpha z}, \quad \alpha \in \{x, y\} \\ \tau_{zz} &= \eta(U/L)\tilde{\tau}_{zz}. \end{aligned}$$

On en déduit une expression de  $|\tau|$  :

$$|\tau| = \eta(U/L)|\tilde{\tau}| \quad (24)$$

avec

$$|\tilde{\tau}| = \frac{1}{\varepsilon} T,$$

où

$$T = [\tilde{\tau}_{xz}^2 + \tilde{\tau}_{yz}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\tilde{\tau}_{xx}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\tilde{\tau}_{yy}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\tilde{\tau}_{zz}^2 + \varepsilon^2\tilde{\tau}_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

La condition de contrainte seuil  $|\tau| \geq \tau_0$  peut alors s'écrire avec des variables sans dimension :  $T \geq Bi$ .

### 3.2 Réécriture des équations

Dans la partie précédente, nous avons donné l'expression de toutes les variables et inconnues du problème adimensionnée ainsi que la relation qui les lie avec la variable d'origine. Nous pouvons dès lors réécrire notre problème en utilisant ces expressions.

On introduit le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{\rho^2 g H^3}{\eta^2}.$$

On va supposer que ce nombre est en  $\mathcal{O}(1)$  en  $\varepsilon$ , autrement dit l'écoulement est supposé laminaire, et les termes d'inertie vont être négligés à l'ordre 0.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement (7)-(9) deviennent :

$$\varepsilon^2 Re(\partial_t \tilde{u}_x + \tilde{u}_x \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \tilde{u}_y \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_x + \tilde{u}_z \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_x) = -\partial_{\tilde{x}} \tilde{p} + \varepsilon^2 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{\tau}_{xx} + \partial_{\tilde{y}} \tilde{\tau}_{xy}) + \partial_{\tilde{z}} \tilde{\tau}_{xz}, \quad (26)$$

$$\varepsilon^2 Re(\partial_t \tilde{u}_y + \tilde{u}_x \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_y + \tilde{u}_y \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y + \tilde{u}_z \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_y) = -\partial_{\tilde{y}} \tilde{p} + \varepsilon^2 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{\tau}_{xy} + \partial_{\tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy}) + \partial_{\tilde{z}} \tilde{\tau}_{yz}, \quad (27)$$

$$\varepsilon^4 Re(\partial_t \tilde{u}_z + \tilde{u}_x \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_z + \tilde{u}_y \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_z + \tilde{u}_z \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_z) = -\partial_{\tilde{z}} \tilde{p} - 1 + \varepsilon^2 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{\tau}_{xz} + \partial_{\tilde{y}} \tilde{\tau}_{yz} + \partial_{\tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz}). \quad (28)$$

L'équation de conservation de la masse (10) devient simplement :

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y + \partial_{\tilde{z}} \tilde{u}_z = 0. \quad (29)$$

Les contraintes ont déjà été calculé dans la partie précédente, pour rappel :

$$\tilde{\tau}_{ij} = \left[ \frac{Bi}{E} + E^{n-1} \right] \tilde{\gamma}_{ij} \quad \text{pour } T \geq Bi, \quad (30)$$

et

$$\tau_{ij} = \dot{\gamma}_{ij} = 0 \quad \text{pour } T < Bi. \quad (31)$$

Les conditions initiales restent inchangées, la condition au niveau de la surface libre (20) en  $z = f + h$  s'écrit :

$$\begin{aligned} -(\tau_{xx} - p)\partial_x(f + h) - \tau_{xy}\partial_y(f + h) + \tau_{xz} &= 0 \\ -\tau_{xy}\partial_x(f + h) - (\tau_{yy} - p)\partial_y(f + h) + \tau_{yz} &= 0 \\ -\tau_{xz}\partial_x(f + h) - \tau_{yz}\partial_y(f + h) + \tau_{zz} - p &= 0 \end{aligned}$$

En grandeur sans dimensions, ces équations deviennent :

$$-(\varepsilon^2 \tilde{\tau}_{xx} - \tilde{p})\partial_{\tilde{x}}(\tilde{f} + \tilde{h}) - \varepsilon^2 \tilde{\tau}_{xy}\partial_{\tilde{y}}(\tilde{f} + \tilde{h}) + \tilde{\tau}_{xz} = 0 \quad (32)$$

$$-\varepsilon^2 \tilde{\tau}_{xy}\partial_{\tilde{x}}(\tilde{f} + \tilde{h}) - (\varepsilon^2 \tilde{\tau}_{yy} - \tilde{p})\partial_{\tilde{y}}(\tilde{f} + \tilde{h}) + \tilde{\tau}_{yz} = 0 \quad (33)$$

$$-\varepsilon^2 \tilde{\tau}_{xz}\partial_{\tilde{x}}(\tilde{f} + \tilde{h}) - \varepsilon^2 \tilde{\tau}_{yz}\partial_{\tilde{y}}(\tilde{f} + \tilde{h}) + \varepsilon^2 \tilde{\tau}_{zz} - \tilde{p} = 0 \quad (34)$$

où on introduit  $\tilde{f}$  tel que  $f = H\tilde{f}$ .

Au niveau des autres bords, sur  $\tilde{\Gamma}_f \cup \tilde{\Gamma}_p$ , on a maintenant :

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (35)$$

L'équation de la ligne de niveau reste inchangée par l'adimensionnement :

$$\partial_t \tilde{h} + \tilde{u}_x \partial_{\tilde{x}}(\tilde{f} + \tilde{h}) + \tilde{u}_y \partial_{\tilde{y}}(\tilde{f} + \tilde{h}) - \tilde{u}_z = 0. \quad (36)$$

Le problème adimensionné est clairement équivalent au problème original puisque ces deux problèmes diffèrent d'un changement d'inconnue linéaire.

## 4 Équations réduites par analyse asymptotique

### 4.1 Le problème à l'ordre 0 en $\varepsilon$

Dans cette partie, nous allons travailler uniquement sur le problème sans dimensions, ainsi, sauf en cas d'ambiguité, nous ne noterons plus les tildes sur les variables adimensionnelles. On suppose que les inconnues se développent suivant les puissances de  $\varepsilon$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \\ \tau &= \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 + \dots \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \end{aligned}$$

Ce développement repose sur l'hypothèse de couche mince qui se traduit par  $\varepsilon \ll 1$ . Il s'agit maintenant d'obtenir le problème réduit à l'ordre 0.

Afin d'alléger les notations, nous omettrons l'indexation par zéro aux inconnues et on ne considère dans la suite que les termes d'ordre 0. Les équations (26)-(29) deviennent :

$$-\partial_x p + \partial_z \tau_{xz} = 0, \quad (37)$$

$$-\partial_y p + \partial_z \tau_{yz} = 0, \quad (38)$$

$$-\partial_z p = -1, \quad (39)$$

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0. \quad (40)$$

Le vecteur des contraintes de cisaillement dans le plan  $(x, y)$  est noté  $\boldsymbol{\tau}_{||} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$  et le gradient dans ce même plan  $\nabla_{||} = (\partial_x, \partial_y)$ . Notons  $\mathbf{u}_{||} = (u_x, u_y)$  la composante de la vitesse dans le plan  $(x, y)$ . Pour tout vecteur  $\mathbf{v}_{||} = (v_x, v_y)$  du plan  $(x, y)$ , notons  $\text{div}_{||}\mathbf{v}_{||} = \partial_x v_x + \partial_y v_y$ .

Les quantités  $E$  et  $T$  deviennent :

$$E = [(\partial_z u_x)^2 + (\partial_z u_y)^2]^{1/2} = |\partial_z \mathbf{u}_{||}|, \quad T = [(\tau_{xz})^2 + (\tau_{yz})^2]^{1/2} = |\boldsymbol{\tau}_{||}|, \quad (41)$$

On peut alors exprimer les contraintes : lorsque  $|\boldsymbol{\tau}_{||}| \geq Bi$ , on a :

$$\tau_{\alpha\beta} = \left[ \frac{Bi}{|\partial_z \mathbf{u}_{||}|} + |\partial_z \mathbf{u}_{||}|^{n-1} \right] (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\} \quad (42)$$

$$\tau_{\alpha z} = \left[ \frac{Bi}{|\partial_z \mathbf{u}_{||}|} + |\partial_z \mathbf{u}_{||}|^{n-1} \right] \partial_z u_\alpha, \quad \alpha \in \{x, y\} \quad (43)$$

$$\tau_{zz} = 2 \left[ \frac{Bi}{|\partial_z \mathbf{u}_{||}|} + |\partial_z \mathbf{u}_{||}|^{n-1} \right] \partial_z u_z. \quad (44)$$

et lorsque  $|\boldsymbol{\tau}_{||}| < Bi$ , on a :

$$\partial_j u_i = 0. \quad (45)$$

Remarquons que (43) en norme donne :

$$|\boldsymbol{\tau}_{||}| = Bi + |\partial_z \mathbf{u}_{||}|^n. \quad (46)$$

De plus  $\frac{Bi}{|\partial_z \mathbf{u}_{||}|} + |\partial_z \mathbf{u}_{||}|^{n-1} \geq 0$  donc  $\text{dir}(\partial_z \mathbf{u}_{||}) = \text{dir}(\boldsymbol{\tau}_{||})$ , (où  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{dir}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$  représente la direction du vecteur  $\mathbf{v}$ ).

La condition au niveau de la surface libre en  $z = f(x, y) + h(t, x, y)$  devient :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} + p \partial_x (f + h) &= 0, \\ \tau_{yz} + p \partial_y (f + h) &= 0, \\ p &= 0. \end{aligned}$$

soit encore :

$$\boldsymbol{\tau}_{||}(z = f + h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$p(z = f + h) = 0. \quad (48)$$

L'équation (36) de cette ligne de niveau reste inchangée, de même que les conditions initiales et les conditions sur les bords  $\Gamma_f$  et  $\Gamma_p$ .

## 4.2 Le problème parabolique non-linéaire en $h$

Nous allons voir maintenant que le problème réduit à l'ordre 0 peut se ramener à un problème non-linéaire en  $h$  de type parabolique où les autres inconnues  $(\tau, \mathbf{u}, p)$  se déduisent explicitement de  $h$ . C'est un modèle cinématique qui permettra de décrire la surface libre de l'écoulement. Nous allons établir dans la suite ce modèle cinématique donné sous forme conservative.

En intégrant selon  $z$  l'équation (40) et en utilisant la condition au bord (48) il vient :

$$p(t, x, y, z) = f(x, y) + h(t, x, y) - z, \quad (49)$$

Il s'en déduit immédiatement par intégration en  $z$  des équations (37), (38) et de la condition à la surface libre (47) que :

$$\boldsymbol{\tau}_{||} = -(f + h - z)\nabla_{||}(f + h). \quad (50)$$

Les contraintes de cisaillements étant continues, il en va de même pour  $|\boldsymbol{\tau}_{||}|$ . Si  $|\boldsymbol{\tau}_{||}| \geq Bi$  pour un certain  $z$ , et comme  $|\boldsymbol{\tau}_{||}| = 0$  sur la surface libre en  $z = f + h$ , par la continuité de  $|\boldsymbol{\tau}_{||}|$  en  $z$ , le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une valeur  $h_c(t, x, y) \in [0, h(t, x, y)]$  pour lequel  $|\boldsymbol{\tau}_{||}(z = f + h_c)| = Bi$ . En utilisant (50) en  $z = f + h_c$ , on obtient :

$$h_c(t, x, y) = \max \left( 0, h - \frac{Bi}{|\nabla_{||}(f + h)|} \right). \quad (51)$$

On peut alors écrire la condition de seuil  $|\boldsymbol{\tau}_{||}| \geq Bi$  de la manière suivante :

$$(f + h - z)|\nabla_{||}(f + h)| \geq Bi \quad (52)$$

autrement dit  $z \in [f, f + h_c]$ .

On en déduit des équations (46), (45), (50) et de l'expression (51) que :

$$|\partial_z \mathbf{u}_{||}| = \begin{cases} |\nabla_{||}(f + h)|^{\frac{1}{n}}(f + h_c - z)^{\frac{1}{n}} & \text{si } z \in [f, f + h_c] \\ 0 & \text{si } z \in ]f + h_c, f + h] \end{cases}$$

On sait de plus que  $\mathbf{dir}(\partial_z \mathbf{u}_{||}) = \mathbf{dir}(\boldsymbol{\tau}_{||}) = -\mathbf{dir}(\nabla_{||}(f + h))$ , d'où :

$$\partial_z \mathbf{u}_{||} = \begin{cases} -|\nabla_{||}(f + h)|^{\frac{1}{n}}(f + h_c - z)^{\frac{1}{n}}\mathbf{dir}(\nabla_{||}(f + h)) & \text{si } z \in [f, f + h_c] \\ 0 & \text{si } z \in ]f + h_c, f + h] \end{cases} \quad (53)$$

On constate dans ce problème réduit à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  que la surface  $z = f(x, y) + h_c(t, x, y)$  est une surface critique qui sépare le fluide en deux zones, la zone inférieure du fluide, pour  $z \leq f + h_c$  correspond à une zone fluide caractérisée par un mouvement de cisaillement, la deuxième zone, la partie supérieure du fluide, au dessus de la surface critique, correspond à une zone rigide. Remarquons qu'il est possible d'avoir qu'une seule zone rigide, dans le cas où les contraintes sont trop faibles, avec  $h_c = 0$ , c'est à dire :

$$|h\nabla_{||}(f + h)| < Bi \quad (54)$$

Ce cas correspond en fait à l'arrêt du fluide.

Après intégration en  $z$  avec  $z \in [f, f + h_c]$ , en utilisant la condition d'adhérence au fond  $\mathbf{u}_{||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour fixer la constante d'intégration et le racord continu de la vitesse au niveau de la surface critique  $z = f + h_c$ , il vient :

$$\mathbf{u}_{||} = \begin{cases} \frac{n}{n+1} |\nabla_{||}(f+h)|^{\frac{1}{n}} \mathbf{dir}(\nabla_{||}(f+h)) \left[ (f+h_c - z)^{\frac{n+1}{n}} - h_c^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{si } z \in [f, f+h_c] \\ -\frac{n}{n+1} |\nabla_{||}(f+h)|^{\frac{1}{n}} \mathbf{dir}(\nabla_{||}(f+h)) h_c^{\frac{n+1}{n}} & \text{si } z \in ]f+h_c, f+h] \end{cases} \quad (55)$$

On souhaite maintenant obtenir une équation uniquement en  $h$ . Pour obtenir une forme conservative, une méthode consiste à intégrer l'équation de conservation de masse (29) sur  $[f, f+h]$  :

$$\int_f^{f+h} \partial_x u_x dz + \int_f^{f+h} \partial_y u_y dz + \int_f^{f+h} \partial_z u_z dz = 0. \quad (56)$$

En permutant les dérivation  $\partial_x$  et  $\partial_y$  avec les intégrales dont les bornes d'intégrations  $f$  et  $f+h$  dépendent de  $x$  et  $y$ , avec  $u_x = 0$  et  $u_y = 0$  en  $z = f$ , on en déduit :

$$\int_f^{f+h} \partial_x u_x dz = \partial_x \left( \int_f^{f+h} u_x dz \right) - u_x(t, x, y, f+h) \partial_x(f+h).$$

$$\int_f^{f+h} \partial_y u_y dz = \partial_y \left( \int_f^{f+h} u_y dz \right) - u_y(t, x, y, f+h) \partial_y(f+h).$$

En utilisant l'équation de la surface libre, l'équation (56) devient :

$$[u_z]_f^{f+h} = -\partial_x \left( \int_f^{f+h} u_x dz \right) - \partial_y \left( \int_f^{f+h} u_y dz \right) + u_z(t, x, y, f+h) - \partial_t h,$$

soit encore, en utilisant  $u_z = 0$  en  $z = 0$  :

$$\partial_t h + \operatorname{div}_{||} \left( \int_f^{f+h} \mathbf{u}_{||} dz \right) = 0$$

En remplaçant  $\mathbf{u}_{||}$  dont l'expression est donnée en (55) dans cette égalité, on obtient une expression sous forme conservative et ne dépendant plus que de l'inconnue  $h$  :

$$\partial_t h - \operatorname{div}_{||} (\nu \{h, |\nabla_{||}(f+h)|\} \nabla_{||}(f+h)) = 0 \quad (57)$$

où

$$\nu(h, |\nabla_{||}(f+h)|) = \frac{n}{n+1} |\nabla_{||}(f+h)|^{\frac{1-n}{n}} h_c^{\frac{n+1}{n}} (h - \frac{n}{2n+1} h_c),$$

qui s'écrit aussi, en remplaçant  $h_c$  par son expression,

$$\nu(h, |\nabla_{||}(f+h)|) = \begin{cases} \frac{n}{(n+1)(2n+1)} |\nabla_{||}(f+h)|^{\frac{1-n}{n}} (h - \frac{Bi}{|\nabla_{||}(f+h)|})^{\frac{n+1}{n}} ((n+1)h + n \frac{Bi}{|\nabla_{||}(f+h)|}) & \text{si } h |\nabla_{||}(f+h)| \geq Bi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (58)$$

## 5 Retour aux équations dimensionnelles

### 5.1 Écriture du problème réduit dimensionnel

Nous pouvons maintenant réécrire l'équation de la surface libre avec les variables dimensionnelles pour une utilisation plus pratique. Le problème est alors le suivant : trouver  $h(t, x, y)$  pour tout  $t > 0$  et  $(x, y) \in \Omega$  tel que :

$$\partial_t h - \left(\frac{\rho g}{\kappa}\right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{div}(\nu\{h, |\nabla(f+h)|\}\nabla(f+h)) = 0 \text{ dans } ]0, +\infty[ \times \Omega \quad (59)$$

$$\frac{\partial(f+h)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0, +\infty[ \times \partial\Omega \quad (60)$$

$$h(t=0) = h_{init} \text{ dans } \Omega(0) \quad (61)$$

où pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \zeta^{\frac{1-n}{n}} \left(\xi - \frac{(\tau_0)}{\zeta}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left((n+1)\xi + n\frac{(\tau_0)}{\zeta}\right) & \text{si } \xi\zeta \geq \frac{\tau_0}{\rho g}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (62)$$

En particulier, on peut simplifier cette expression pour les différents modèles :

- dans le cas Newtonien, lorsque  $n = 1$  et  $\tau_0 = 0$ , on obtient pour tout  $\xi \geq 0$  :

$$\nu(\xi) = \frac{1}{3}\xi^3$$

- dans le cas d'une loi de puissance avec  $n > 0$  et  $\tau_0 = 0$ , on obtient pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta = 0, \\ \frac{n}{2n+1} \zeta^{\frac{1-n}{n}} \xi^{\frac{2n+1}{n}} & \text{sinon} \end{cases}$$

- dans le cas d'un modèle de Bingham avec  $n = 1$ , on obtient pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(\xi - \frac{(\tau_0)}{\zeta}\right)^2 \left(2\xi + \frac{(\tau_0)}{\zeta}\right) & \text{si } \xi\zeta \geq \frac{\tau_0}{\rho g}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 5.2 Écriture du problème réduit adimensionné

Par commodité, on adimensionne le problème précédent afin de manipuler des quantités de l'ordre de l'unité. Contrairement au premier adimensionnement, le but n'est pas d'utiliser la quantité  $\varepsilon$  mais simplement de changer d'échelle. On garde toujours un problème pratique qui tient compte des différents paramètres physiques.

On note  $L$  une longueur caractéristique du fluide. Cette longueur sera l'échelle de référence utilisée dans la hauteur et la longueur du fluide. On introduit les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\hat{h} = \frac{h}{L}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{f} = \frac{f}{L},$$

où

$$T = \left( \frac{\kappa}{\rho g L} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Le problème adimensionnel réduit s'écrit : trouver  $\hat{h}$  pour tout  $\hat{t} > 0$  et  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}$  tel que :

$$\partial_{\hat{t}} \hat{h} - \operatorname{div}(\nu \{ \hat{h}, |\nabla(\hat{f} + \hat{h})| \} \nabla(\hat{f} + \hat{h})) = 0 \text{ dans } ]0, +\infty[ \times \hat{\Omega} \quad (63)$$

$$\frac{\partial(\hat{f} + \hat{h})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0, +\infty[ \times \partial \hat{\Omega} \quad (64)$$

$$\hat{h}(\hat{t} = 0) = \hat{h}_{init} \text{ dans } \hat{\Omega}. \quad (65)$$

où pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \zeta^{\frac{1-n}{n}} \left( \xi - \frac{Bi}{\zeta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left( (n+1)\xi + n \frac{Bi}{\zeta} \right) & \text{si } \xi \zeta \geq Bi, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (66)$$

où  $Bi$  est le nombre de Bingham, qui sera utilisé dans la pratique. Il a pour expression :

$$Bi = \frac{\tau_0}{\rho g L}. \quad (67)$$

## 6 Résolution numérique

### 6.1 Discrétisation temporelle

Nous utiliserons un schéma temporel de second ordre implicite rétrograde. Soit  $(t_m)_{m \geq 0}$  le temps discrétisé et  $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$ ,  $m \geq 0$  le pas de temps. Les expériences sur les fluides viscoplastiques montrent que leur dynamique évolue suivante une certaine puissance du temps dans différents régimes. Ainsi, plutôt que de prendre un pas de temps constant, nous choisirons un pas de temps avec une progression géométrique,  $\Delta t_{m+1} = \theta \Delta t_m$  avec un choix spécifique pour  $\Delta t_0$  et  $\theta > 1$ . Un tel choix permet d'avoir des pas de temps très courts au départ lorsque la dynamique est très rapide, qui augmente ensuite géométriquement permettant un suivi linéaire du mouvement du fluide et de faire durer la simulation plus longtemps. Ce choix revient en fait à choisir un pas de temps régulier mais en échelle logarithmique.

Pour choisir un  $\theta$  correct, on peut se donner un nombre  $N$  pour lequel on a  $N$  pas de temps par décade.

Nous avons

$$\Delta t_{m+1} = \theta \Delta t_m = \theta^{m+1} \Delta t_0$$

donc

$$t_{m+1} = t_m + \Delta t_m = t_0 + \sum_{k=0}^m \Delta t_k = t_0 + \left( \sum_{k=0}^m \theta^k \right) \Delta t_0 = t_0 + \frac{\theta^{m+1} - 1}{\theta - 1} \Delta t_0.$$

Prendre  $N$  pas de temps par décade revient à choisir  $\theta$  de sorte que  $t_{m+N} = 10t_m$ ,  $\forall m \geq 0$ , autrement dit, en prenant comme temps initial  $t_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\theta^{m+N} - 1}{\theta - 1} \Delta t_0 &= 10 \frac{\theta^m - 1}{\theta - 1} \Delta t_0 \\ &\Leftrightarrow \\ \theta^{m+N} - 1 &= 10(\theta^m - 1). \end{aligned}$$

Comme  $\theta > 1$ , pour  $m$  grand on a  $\theta^{m+N} - 1 \sim \theta^{m+N}$  et  $\theta^m - 1 \sim \theta^m$  donc

$$\begin{aligned} \theta^{m+N} &\approx 10\theta^m \\ &\Leftrightarrow \\ \theta &\approx 10^{1/N}. \end{aligned}$$

Les dérivées premières par rapport au temps seront approchées par le schéma de différences finies d'ordre 2 suivant, pour toute fonction  $\varphi \in C^0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{m+1}) &= \frac{2\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})}\varphi(t_{m+1}) - \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m \Delta t_{m-1}}\varphi(t_m) \\ &+ \frac{\Delta t_m}{(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})\Delta t_{m-1}}\varphi(t_{m-1}) + \mathcal{O}(\Delta t_m^2 + \Delta t_{m-1}^2). \end{aligned}$$

On note  $(h_m)_{m \geq 0} \approx h(m\Delta t, x, y)$ , défini récursivement par l'algorithme suivant :

#### ALGORITHME 1

- $m = -1, 0$  :  $\hat{h}^0 := \hat{h}^{-1} := \hat{h}_{init}$
- $m \geq 1$  : on se donne  $\hat{h}^{m-1}$  et  $\hat{h}^m$ , trouver  $\hat{h}^{m+1}$  tel que :

$$\begin{aligned} &\frac{2\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})}\hat{h}^{m+1} - \operatorname{div}(\nu\{\hat{h}^{m+1}, |\nabla(\hat{f} + \hat{h}^{m+1})|\}\nabla(\hat{f} + \hat{h}^{m+1})) \\ &= \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m \Delta t_{m-1}}\hat{h}^m - \frac{\Delta t_m}{(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})\Delta t_{m-1}}\hat{h}^{m-1} \quad \text{dans } \hat{\Omega} \end{aligned} \tag{68}$$

$$\frac{\partial(\hat{f} + \hat{h}^{m+1})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial \hat{\Omega} \tag{69}$$

où pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} \frac{n}{(n+1)(2n+1)}\zeta^{\frac{1-n}{n}} \left(\xi - \frac{Bi}{\zeta}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left((n+1)\xi + n\frac{Bi}{\zeta}\right) & \text{si } \xi\zeta \geq Bi, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{70}$$

Le problème initial dépendant du temps est transformé en une séquence de sous-problème (68)-(69) non-linéaire puisqu'à chaque itération  $m$ ,  $\hat{h}^{m+1}$  est inconnu. Une méthode simple pour résoudre ces sous-problèmes est d'utiliser un algorithme du point fixe. Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme, on utilisera une méthode du point fixe avec un coefficient de relaxation  $0 < \omega \leq 1$ . L'algorithme du point fixe avec relaxation s'exécute

de la façon suivante :

## ALGORITHME 2

- $k = 0 : \varphi^0 := \hat{h}^m$
- $k \geq 1 : \text{on se donne } \varphi^k, \text{ trouver } \varphi^{k+1} \text{ tel que :}$

$$\varphi^{k+1} = \omega\varphi^* + (1 - \omega)\varphi^k$$

avec  $\varphi^*$  solution de

$$\begin{aligned} \alpha_m \varphi^* - \hat{\operatorname{div}}(\nu\{\varphi^k, |\nabla(\hat{f} + \varphi^k)|\} \nabla \varphi^*) &= f_m \text{ dans } \hat{\Omega} \\ \frac{\partial(\hat{f} + \varphi^*)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{2\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})}, \\ f_m &= \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m \Delta t_{m-1}} \hat{h}^m - \frac{\Delta t_m}{(\Delta t_m + \Delta t_{m-1}) \Delta t_{m-1}} \hat{h}^{m-1} + \hat{\operatorname{div}}(\nu\{\varphi^k, |\nabla(\hat{f} + \varphi^k)|\} \nabla \hat{f}). \end{aligned}$$

On peut stopper cette boucle en se donnant un nombre d'itération maximal et/ou une tolérance  $\epsilon > 0$  sur le résidu. Finalement, on obtient  $\hat{h}^{m+1} := \varphi^{k+1}$ . La sous-relaxation permet, plus  $\omega$  est petit, de prendre de la prudence sur l'algorithme du point fixe et de favoriser les chances que l'algorithme du point fixe converge, en revanche, la convergence est plus lente. Il faut donc trouver le plus grand  $\omega$  qui suffise à faire converger l'algorithme. On constate numériquement que plus  $n$  s'éloigne de 1, plus il faut prendre un  $\omega$  faible, sans quoi l'algorithme est parasité par des sources d'erreurs.

L'algorithme 2 conduit à résoudre à chaque itération un problème linéaire.

## 6.2 Adaptation du maillage

Afin de gagner en précision et en temps de calcul, on effectue également une adaptation de maillage. Pour cela, on utilise une boucle d'adaptation au niveau du point fixe avec comme critère  $c = h_{m+1} + h_m + h_{m-1}$  que l'on répète cinq fois. Ce critère a pour but de concentrer le maillage autour du front d'avancement du fluide lors de trois derniers pas de temps. On tient compte des trois derniers fronts car le second membre de l'équation à résoudre dans l'algorithme 2 fait intervenir la solution aux deux pas de temps précédents. De plus on choisira de faire des mailles anisotropes afin d'exploiter les directions dominantes du fluide.

Ci-dessous, un exemple obtenu avec l'expérience de S. Cochard et C. Ancey (voir plus loin) avec le logiciel de création de maillage Bamg :

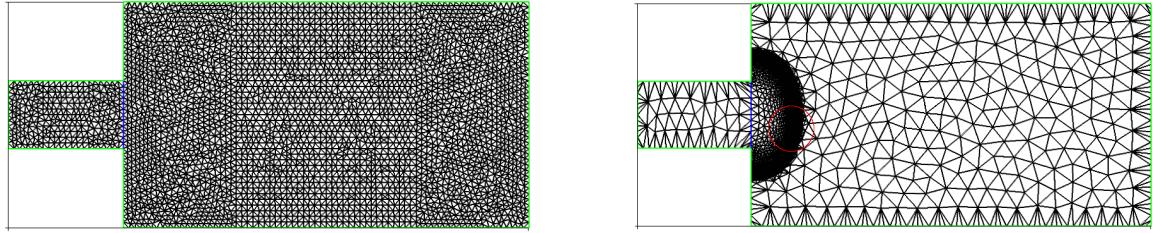


FIGURE 2 – Maillage initial à gauche et maillage adapté à droite

On voit que le maillage est concentré sur les trois dernières lignes de front.

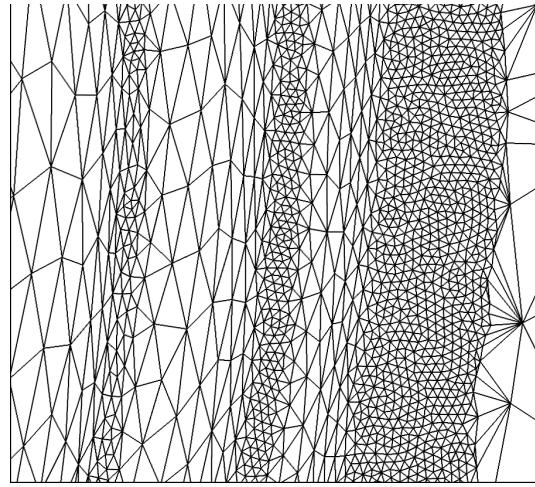


FIGURE 3 – Zoom sur le maillage adapté

### 6.3 Formulation variationnelle

Nous avons décomposé le problème initial en succession de problèmes linéaires elliptiques du second ordre. Nous allons utiliser une méthode d'éléments finis  $P_1$  pour les résoudres.

On se donne  $\varphi^k$ , il faut trouver  $\varphi^*$  définie sur  $\hat{\Omega}$  tel que :

$$\begin{aligned} \alpha_m \varphi^* - \hat{\operatorname{div}}(\nu\{\varphi^k, |\nabla(\hat{f} + \varphi^k)|\} \nabla \varphi^*) &= f_m \text{ dans } \hat{\Omega} \\ \frac{\partial(\hat{f} + \varphi^*)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial \hat{\Omega} \end{aligned}$$

On obtient la formulation variationnelle suivante :  
trouver  $\varphi^* \in H^1(\hat{\Omega})$  tel que :

$$a(\varphi^*, \xi) = l(\xi), \quad \forall \xi \in H^1(\hat{\Omega})$$

où

$$\begin{aligned} a(\varphi^*, \xi) &= \alpha_m \int_{\hat{\Omega}} \varphi^* \xi \, dx \, dy + \int_{\hat{\Omega}} \nu \{ \varphi^k, |\nabla(\hat{f} + \varphi^k)| \} \nabla \varphi^* \cdot \nabla \xi \, dx \, dy \\ l(\xi) &= \frac{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}{\Delta t_m \Delta t_{m-1}} \int_{\hat{\Omega}} \hat{h}^m \xi \, dx \, dy - \frac{\Delta t_m}{(\Delta t_m + \Delta t_{m-1})} \int_{\hat{\Omega}} \hat{h}^{m-1} \xi \, dx \, dy \\ &\quad - \int_{\hat{\Omega}} \nu \{ \varphi^k, |\nabla(\hat{f} + \varphi^k)| \} \nabla \hat{f} \cdot \nabla \xi \, dx \, dy \end{aligned}$$

## 6.4 Structure générale du code numérique

Voyons un résumé de tout ce qui a été dit auparavant afin de voir comment s'imbrique chacun des algorithmes :

- boucle de discréétisation temporelle de  $t = t_0$  à  $t_N$
- boucle d'adaptation de maillage  $\tau_0, \dots, \tau_5$
- boucle du point fixe avec condition d'arrêt sur l'erreur relative
- Résolution d'un problème linéaire par éléments finis  $P_1$

Pour la résolution par éléments finis, le logiciel utilisé est la librairie Rhéolef de C++ qui contient un code éléments finis.

## 7 Résultats numériques

### 7.1 Expérience de N. J. Balmforth et R. V. Craster

#### 7.1.1 Présentation

Pour réaliser cette expérience, on utilise du Kaolin que l'on place en dôme sur un plan horizontal. Celui-ci forme alors un cercle de rayon  $R = 16$  cm et d'épaisseur  $H = 1.6$  cm. On incline ensuite rapidement le plan avec un angle défini. Le Kaolin a une masse volumique de  $\rho = 1600 \text{ kg.m}^{-3}$ , une contrainte seuil de  $\tau_0 = 13.4 \text{ Pa}$ , une constante de consistance  $\kappa = 40 \text{ Pa.s}^{-n}$  où  $n = 0.5$ . On utilisera comme nombre de Bingham  $Bi = \frac{\tau_0}{\rho g H}$ . Une première expérience est faite avec un angle  $\alpha = 9.6^\circ$  puis une deuxième avec  $\alpha = 3.4^\circ$ .

### 7.1.2 Comparaison

Nous allons comparer nos résultats numériques (tracés en rouge) avec les photos données dans l'article de N. J. Balmforth and R. V. Craster (voir [3]) lorsque le mouvement du fluide s'est arrêté.

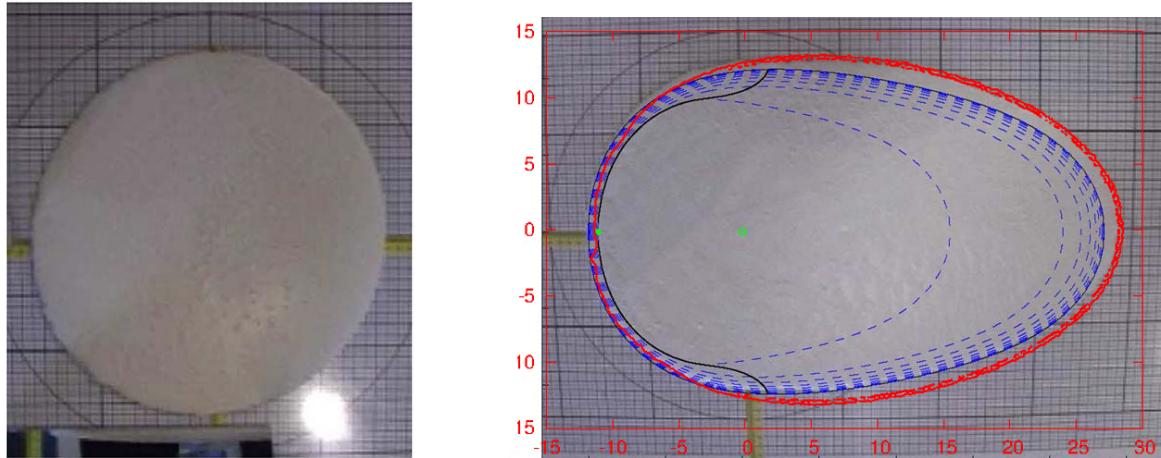


FIGURE 4 – Visualisation du Kaolin au début puis à la fin de l'expérience,  $\alpha = 9.6^\circ$

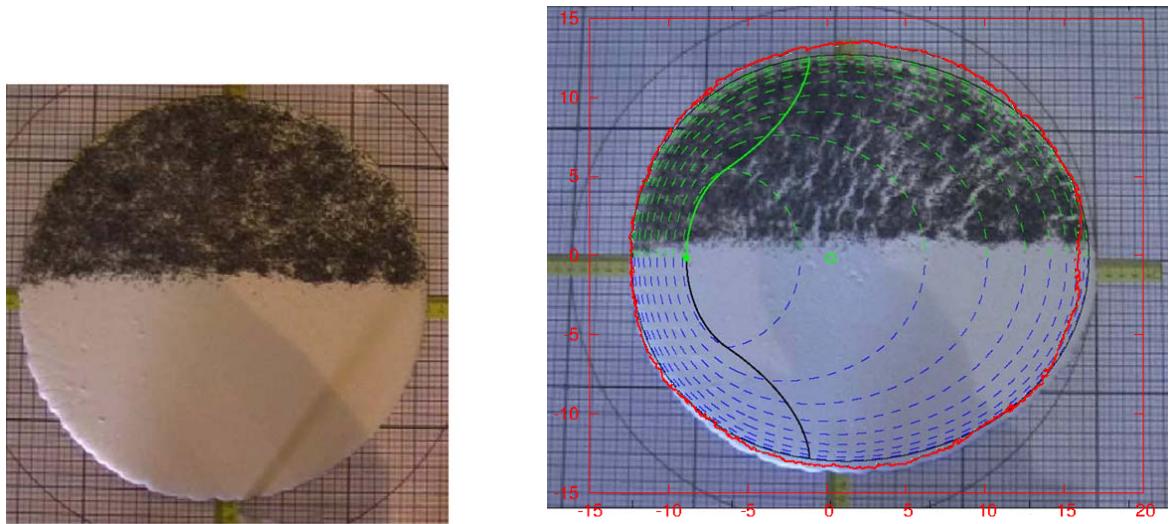


FIGURE 5 – Visualisation du Kaolin au début puis à la fin de l'expérience,  $\alpha = 3.4^\circ$

## 7.2 Expérience de S. Cochard et C. Ancey

### 7.2.1 Présentation

On s'intéresse ici à modéliser l'écoulement d'un fluide viscoplastique sur un plan incliné avec ouverture d'un réservoir. Ce cas a été entièrement réalisé expérimentalement par S. Cochard et C. Ancey avec des techniques de mesures précises (cf. biblio). Leurs expériences ont été effectuées avec du Carbopol Ultrez 10 qui est un matériau viscoplastique dont les caractéristiques rhéologiques ont été mesurées à l'aide d'un rhéomètre. Nous pourrons

alors comparer les résultats numériques avec les mesures expérimentales afin de valider (ou réfuter) le modèle numérique.

Commençons par présenter le cas traité : le fluide coule sur un plan d'inclinaison  $\alpha=12^\circ$ , celui-ci est initialement stocker dans un réservoir fermé par une porte. Ce réservoir mesure 51 cm de long, 30 cm de large et la hauteur de fluide initial va de 30 cm à 36 cm suivant la pente. Le fluide considéré est un Carbopol concentré à 0.30% de contrainte seuil  $\tau_0 = 89 \pm 1$  Pa, de constante de consistance  $\kappa = 47.68 \pm 1.7$  Pa.s<sup>-n</sup> où  $n = 0.415 \pm 0.021$ . La masse volumique du Carbopol est d'environ  $\rho = 811$  kg.m<sup>-3</sup>. On prendra comme longueur caractéristique  $L = 30$  cm et pour nombre de Bingham  $Bi = \frac{\tau_0}{\rho g L}$ .

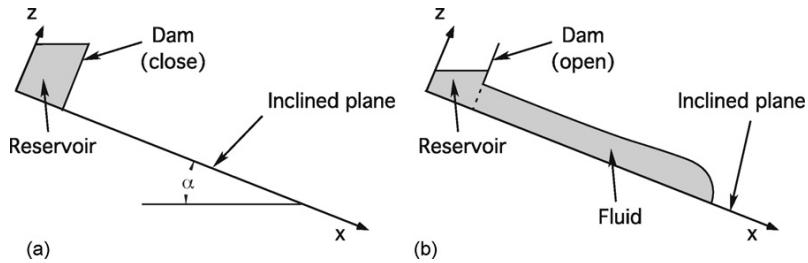


FIGURE 6 – Schéma de l'expérience réalisée

### 7.2.2 Comparaison

Nous allons comparer nos résultats numériques avec les résultats expérimentaux réalisés par S. Cochard et C. Ancey mais également avec des résultats numériques obtenus par Kirill D., Nikitin Maxim A., Olshanskii Kirill M. et Terekhov Yuri V. Vassilevski qui ont choisi un modèle 3d pour traiter le problème donc sans utiliser de développement asymptotique. Ils ne tiennent pas non plus compte de l'effet de seuil contrairement à notre modèle.

Remarquons que pour la coulée expérimentale, la porte du réservoir se s'ouvre pas instantanément comme dans notre modèle et le modèle 3d, il faut 0.19 s pour que celle-ci soit entièrement ouverte. On considère donc que le temps initial  $t_0 = 0$  s correspond en réalité au temps d'ouverture de la porte afin d'effectuer des comparaisons.

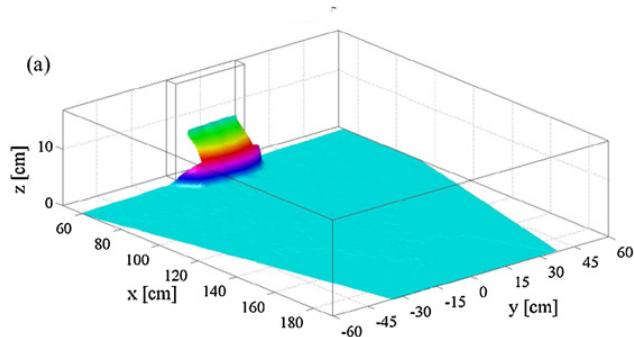


FIGURE 7 – Visualisation du Carbopol à la fin de l'ouverture de la porte à  $t=0.19$  s,  $\alpha = 12^\circ$

Ci-dessous, quelques visualisations du fluide lors de l'expérience faite par S. Cochard et C.Ancey :

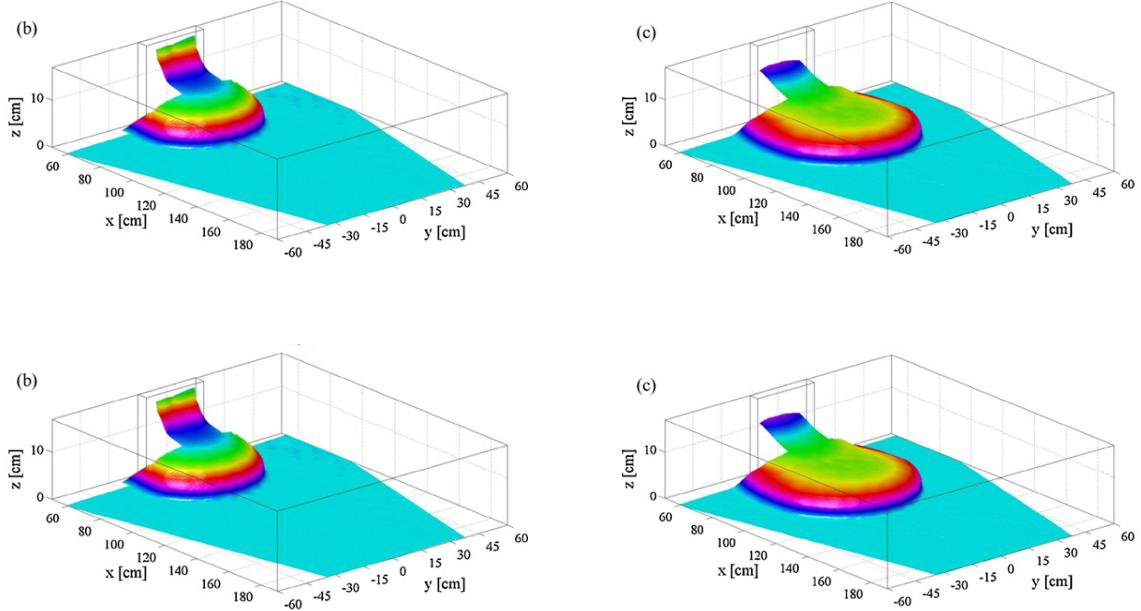


FIGURE 8 – Vue tridimensionnelle du Carbopol ( $C = 0.30\%$ ) et  $\alpha = 12^\circ$  aux temps : (b)  $t = 0.3$  s, (c)  $t = 0.6$  s, (d)  $t = 1.4$  s et (d)  $t = 52$  min.

Ci-dessous, des visualisations du fluide obtenues avec le modèle 3D de Kirill D., Nikitin Maxim A., Olshanskii Kirill M. et Terekhov Yuri V. Vassilevski :

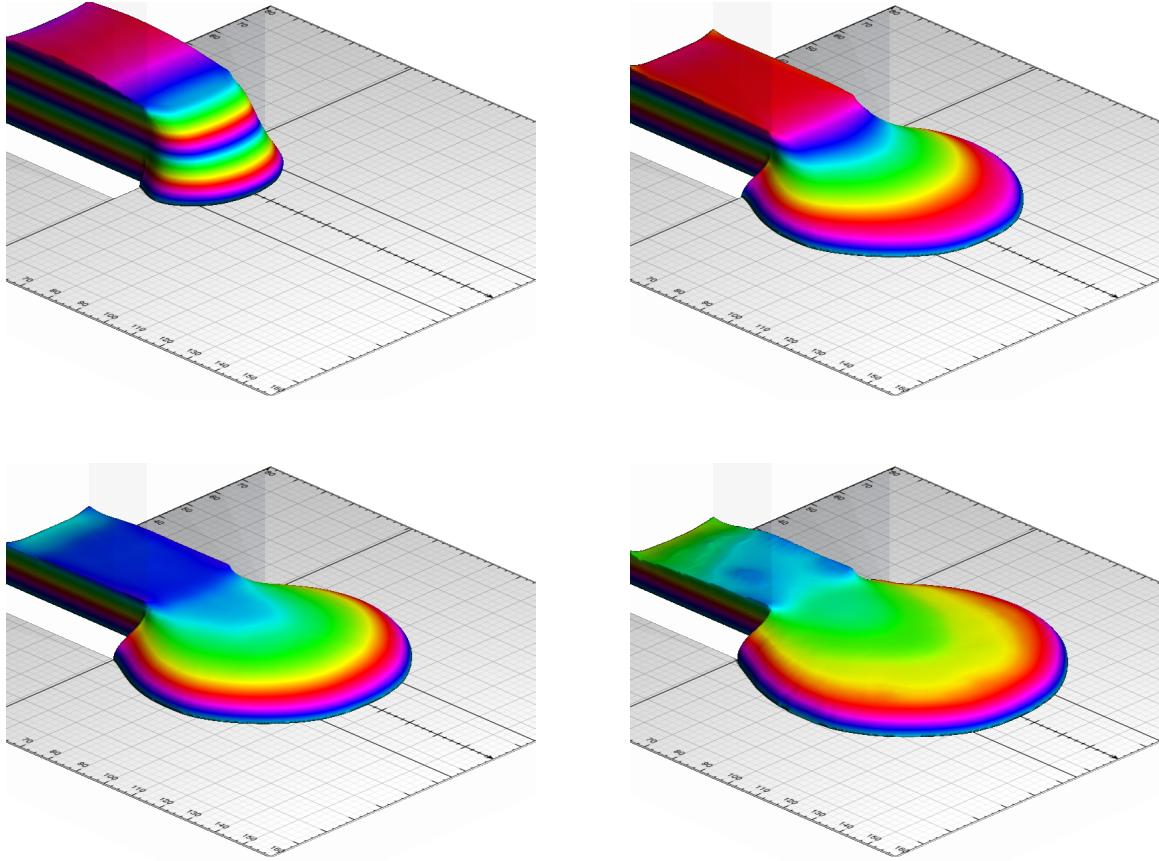


FIGURE 9 – Vue tridimensionnelle du Carbopol ( $C = 0.30\%$ ) et  $\alpha = 12^\circ$  aux temps :  $t = 0.2$  s,  $t = 0.6$  s,  $t = 1$  s et  $t = 2$  s.

Les visualisations de ce modèle ne vont pas plus loin dans le temps sûrement pour les raisons suivantes : le calcul est très coûteux en 3D et le modèle ne tient pas compte de l'effet de seuil, donc pour un temps important où cet effet de seuil influence la dynamique du fluide, ce modèle n'est plus valable.

Enfin, ci-dessous, les visualisations obtenues par le modèle réduit 2D :

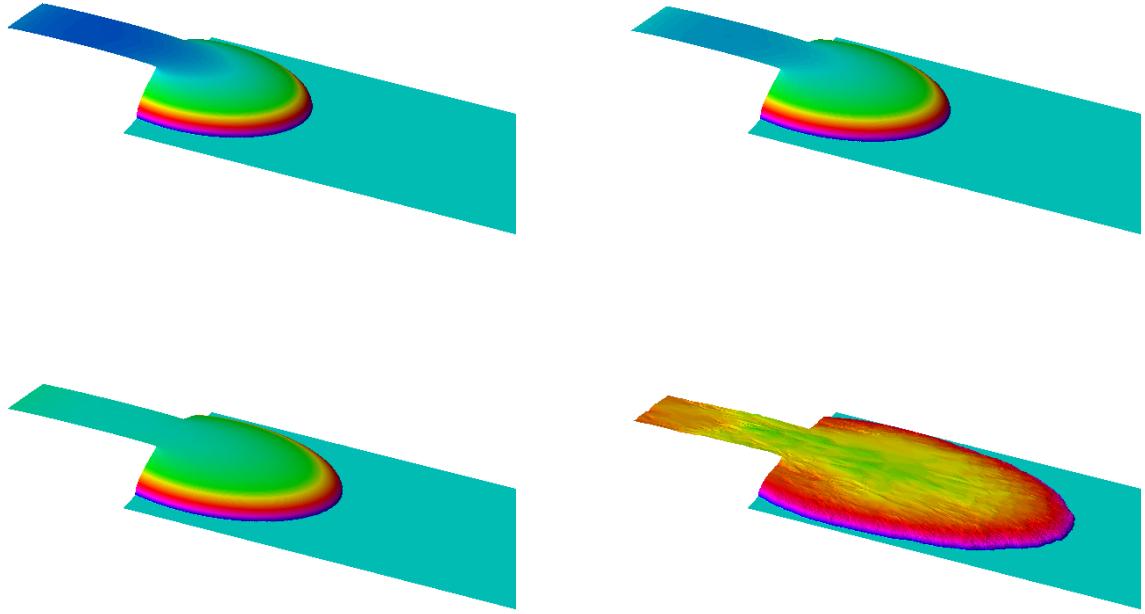


FIGURE 10 – Vue tridimensionnelle du Carbopol ( $C = 0.30\%$ ) et  $\alpha = 12^\circ$  aux temps :  $t = 0.3$  s,  $t = 0.6$  s,  $t = 1.4$  s et  $t = 12$  min.

Ces images montrent que le comportement du fluide avec notre modèle numérique ressemble au comportement expérimentale. Mais voyons ci-dessous des données plus précises avec le tracé des lignes de front du fluide :

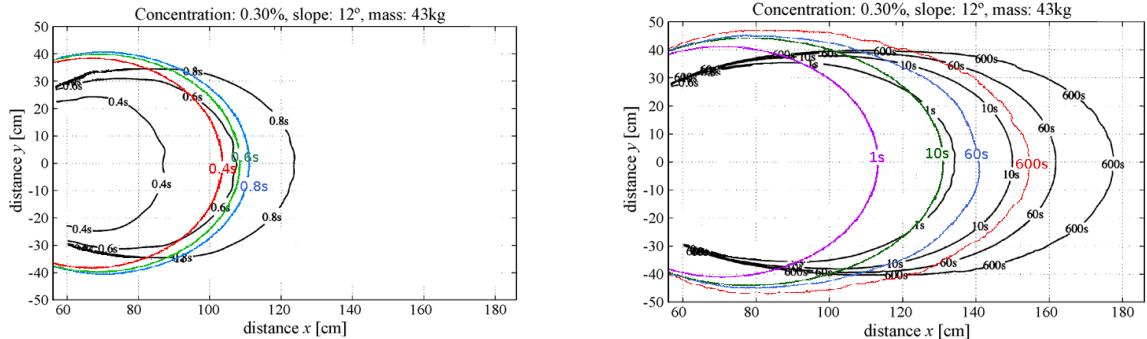


FIGURE 11 – Vue des lignes de fronts, en noir ce sont les courbes expérimentales et en couleurs celles numériques respectives.

On constate que nos courbes ne correspondent pas aux courbes expérimentales. Le fluide de notre modèle s'étale plus sur les bords mais il va moins loin dans le sens de la pente. Les erreurs du modèles viennent probablement des causes suivantes : l'hypothèse de faible épaisseur n'est pas bien respectée,  $\varepsilon = 30/180 = 1/6$  n'est pas très faible. Il y a également des problèmes spatiales, après l'ouverture de porte, le fluide doit subir des effets de torsion qui sont négligés après développement asymptotique. Il y également surement

des erreurs à cause de l'inertie mais ceci ne doit pas influencer le fluide à long terme. Enfin, il reste le problème d'ouverture de porte qui doit perturber les résultats. Par contre, à l'avantage du modèle 3D, nous avons pu faire durer le calcul à des temps plus importants. Remarquons également que le Carbopol a également des propriétés élastiques qui ne sont pas prises en compte dans le modèle d'Herschel-Bulkley.

Le code correspondant à cette expérience est proposé en annexe.

## 8 Modélisation des coulées de lave

Dans cette partie, il s'agit d'effectuer des simulations sur la topographie du Piton de la Fournaise, dans la zone de la coulée d'avril 2007. On pourra alors comparer les résultats numériques avec les relevés de terrain qui ont été effectué avant et après la coulée de lave, permettant ainsi de connaître la hauteur de lave  $h$  (par rapport au niveau de la mer) à la fin de la coulée.

### 8.1 Les données

La topographie de la zone où a eu lieu la coulée d'avril 2007 a été d'abord mesuré par satellite puis par avion après la coulée. On peut voir ci-dessous la topographie et la répartition de la lave.

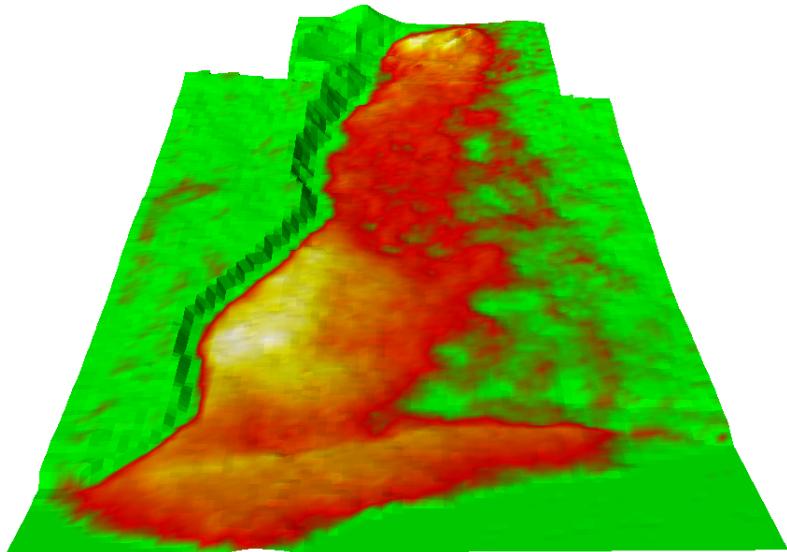


FIGURE 12 – Topographie du volcan et hauteur de lave après la coulée d'avril 2007

La profondeur maximum se trouve là où la couleur de la lave est jaune clair. On remarque qu'il y a une zone très profonde vers la fin de la coulée. Il y a en fait un trou de 60 mètres

de profondeur rempli de lave. On peut également apercevoir l'origine de la lave. On remarque également que la lave a atteint la mer, une partie est montée au dessus du niveau de la mer, agrandissant ainsi légèrement la surface de l'île, une autre partie est allée sous l'eau, mais il n'y a pas de données concernant le terrain sous-marin. Pour situer l'ordre de grandeur de la topographie, l'étendue de la coulée fait plusieurs kilomètres, les falaises à gauche, des caldeira, font plusieurs centaines de mètres.

Voici une photo qui permet de bien visualiser l'ampleur de cette coulée. La topographie couvre en particulier cette zone. On aperçoit les caldeiras qui forment un mur contre la lave.



Nous avons des informations sur l'éruption au cours du temps, ce qui nous permettra de voir si notre modèle évolue à la bonne vitesse.  
Ces informations sont issues de la thèse de Zarah Servadio qui travaille sur le Piton de la Fournaise.

Nous avons également des données qui serviront à paramétriser le modèle numérique. Le débit de lave  $q(t)$  nous donnera le terme source de lave  $s(t, x, y)$ . On utilisera la courbe en pointillé.

On sait qu'il y a eu à peu près 130 Millions de  $\text{m}^3$  de lave lors de coulée d'avril 2007 dont 40 Millions ont fini dans la mer. Autrement dit, on fera en sorte que

$$\int_{t_0}^{t_f} q(t) dt = 130 \cdot 10^6 \text{ m}^3.$$

Nous avons des données rhéologiques concernant la lave. On utilisera un modèle de Bingham. Ces données sont valable pour une température  $T = 1000^\circ\text{C}$ . On se place donc dans l'hypothèse d'une lave isotherme de température  $1000^\circ\text{C}$ .

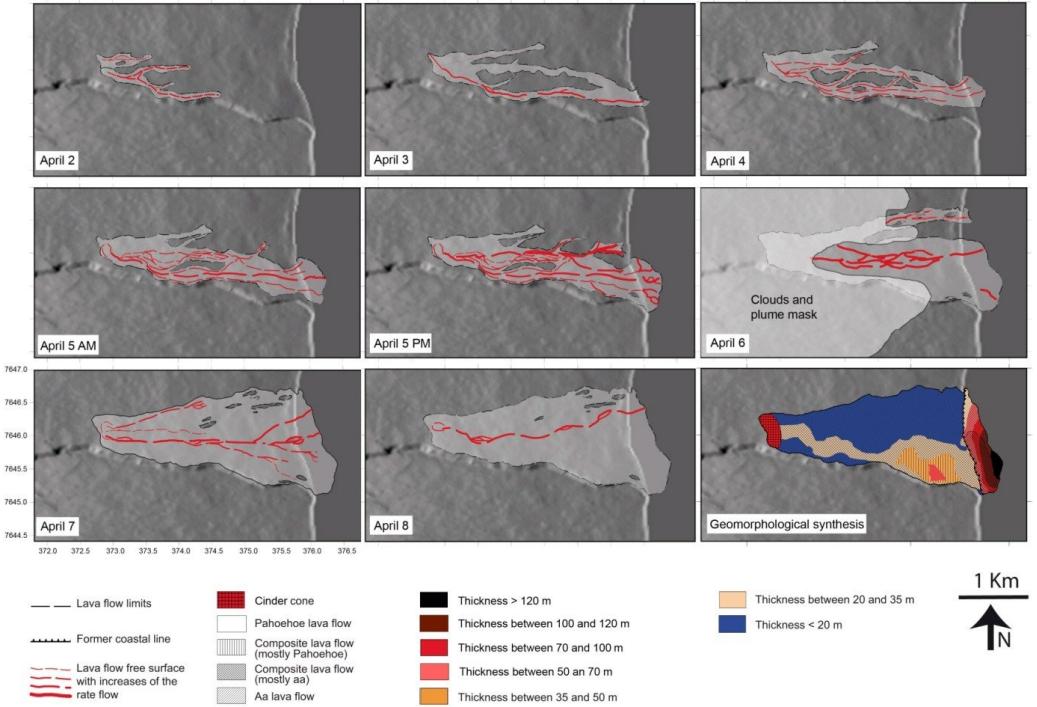


FIGURE 13 – Évolution de la coulée

Constante	Silicic Lava
Densité, $\rho$ (Kg.m $^{-3}$ )	2600
Seuil, $\tau_0$ (Pa)	$10^3$
Viscosité, $\eta$ (Pa.s)	$10^9$

## 8.2 Le modèle

Le problème est le suivant : trouver  $h(t, x, y)$  la hauteur de lave pour tout  $t > 0$  et  $(x, y)$  dans un certain domaine  $\Omega$  tel que :

$$\partial_t h - \left( \frac{\rho g}{\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{div}(\nu \{h, |\nabla(f+h)|\} \nabla(f+h)) = s(t, x, y) \text{ dans } ]0, +\infty[ \times \Omega \quad (71)$$

$$\frac{\partial(f+h)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } ]0, +\infty[ \times \partial\Omega \quad (72)$$

$$h(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega(0) \quad (73)$$

où pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left( \xi - \frac{(\tau_0)}{\zeta} \right)^2 \left( 2\xi + \frac{(\tau_0)}{\zeta} \right) & \text{si } \xi\zeta \geq \frac{\tau_0}{\rho g}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,  $f$  représente l'altitude du volcan. On choisira la source de la manière suivante : on

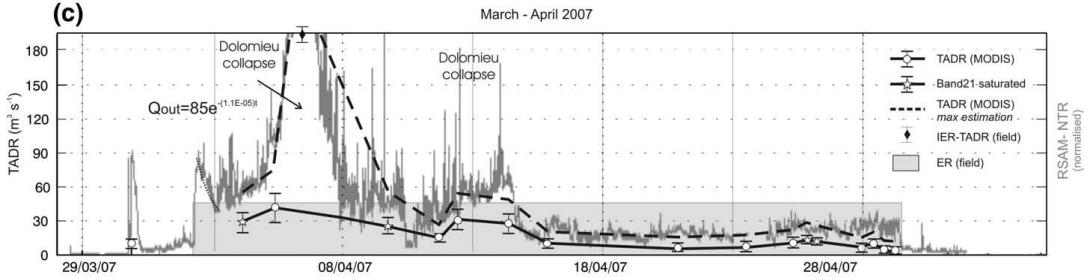


FIGURE 14 – Débit de lave durant l’éruption d’avril 2007, (D. Coppola 2008)

définit  $\omega_s$  un cercle ouvert centré autour de la zone d’origine de la source. On peut apercevoir cette zone sur la topographie 3D du volcan. La source doit vérifier

$$\int_{\omega_s} s(t, x, y) dx dy = q(t).$$

### 8.3 Le modèle adimensionné

Comme précédemment, nous allons plutôt travailler avec le modèle adimensionné. Nous prendrons comme longueur caractéristique de la lave la longueur de la coulée le long du volcan (de l’ordre du Km). On introduit les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\hat{h} = \frac{h}{L}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{f} = \frac{f}{L}, \quad \hat{s} = \frac{T}{L} s$$

où

$$T = \frac{\kappa}{\rho g L}.$$

Le problème devient alors : trouver  $\hat{h}$  pour tout  $\hat{t} > 0$  et  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}$  tel que :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{t}} \hat{h} - \operatorname{div}(\nu \{ \hat{h}, |\nabla(\hat{f} + \hat{h})| \} \nabla(\hat{f} + \hat{h})) &= \hat{s} \text{ dans } ]0, +\infty[ \times \hat{\Omega} \\ \frac{\partial(\hat{f} + \hat{h})}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } ]0, +\infty[ \times \partial \hat{\Omega} \\ \hat{h}(\hat{t} = 0) &= 0 \text{ dans } \hat{\Omega}(0). \end{aligned}$$

où pour tout  $\xi \geq 0$  et  $\zeta \geq 0$  :

$$\nu(\xi, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left( \xi - \frac{Bi}{\zeta} \right)^2 \left( 2\xi + \frac{Bi}{\zeta} \right) & \text{si } \xi \zeta \geq Bi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Annexes

## A Exemple d'un code rhéolef

Nous allons montrer dans cette partie un exemple de code utilisé à l'aide de la librairie Rhéolef. Nous allons voir par exemple le code utilisé pour l'expérience de S. Cochard et C. Ancey réalisé avec du Carbopol.

On commence d'abords par déclarer l'ensemble des variables et paramètres qui interviennent dans le code en n'oubliant pas l'entête afin de déclarer l'espace de noms .

```
#include "rheolef.h"
using namespace rheolef;
using namespace std;

Float alpha = 12; //angle in degree
Float rho   = 936.8;
Float g     = 9.81;
Float kappa = 47.68;
Float tau   = 89;
Float n     = 0.415;
Float H     = 0.3;

Float T = pow(kappa/(rho*g*H), 1./n);
Float pi = acos(-1.0);
Float S = tan(alpha*pi/180);
Float Bi = tau/(rho*g*H);

Float epsilon = 1e-5; // fixed point rel error test
Float w       = 0.5; // fixed point relaxation: in ]0:1]
Float vu (Float h, Float g) {
    if (g*h <= Bi) return 0;
    return (n/((n+1)*(2*n+1)))
        * pow(g, (1-n)/n)
        * pow(h-Bi/g, (n+1)/n )
        * ((n+1)*h - n*Bi/g);
}
Float f (const point& x) { return -S*x[0];}

Float h_init (const point& x) {
    if (x[0] <=0 && fabs(x[1]) <= 0.5) return 1 - f(x);
    return 0;
}

Float positif (Float h) { if (h<0) return 0; else return h; }

field criteria ( field h0, field h1 ,field h2 ) { return h0 + h1 + h2; }
```

On retrouve tout les paramètres physiques, l'expression de  $\nu$ , l'expression de  $h_{init}$ , le critère d'adaptation de maillage...

Par la suite on ouvre la définition de la fonction "main" qui va effectuer les calculs, qui prend différentes variables en entrées choisies par l'utilisateur, à savoir : le maillage au format .geo, le temps final de simulation, le nombre d'itération maximal pour l'algorithme du point fixe, le coefficient de relaxation  $\omega$  et enfin deux paramètres sur l'adaptation du maillage, hcoef et hmin. On déclare ensuite un certain nombre de paramètres propres à la fonction "main" tel que le pas de temps, les espaces de fonctions. On retrouve ensuite les algorithmes présentés plus haut, avec la discrétisation temporelle d'ordre 2, la boucle d'adaptation de maillage, l'algorithme du point fixe...

Enfin, le programme renvoie à l'écran un certain nombre de données à contrôler ainsi que des visualisations que l'on peut lire par exemple avec paraview.

```

int main (int argc, char **argv) {
    if (argc == 1) {
        cerr << "usage: " << argv[0] << " mesh tf(s) imax w N hcoef hmin" << endl;
        exit (0);
    }
    adapt_option_type options;
    geo omega (argv[1]);
    Float tf_dim = (argc > 2) ? atof(argv[2]) : 1.;
    size_t i_max = (argc > 3) ? atoi(argv[3]) : 50;
    w = (argc > 4) ? atof(argv[4]) : 0.5;
    Float N = (argc > 5) ? atof(argv[5]) : 50.; //nombre de pas de temps par décade
    options.hcoef = (argc > 6) ? atof(argv[6]) : 1.1;
    options.hmin = (argc > 7) ? atof(argv[7]) : 0.004;

    Float tf = tf_dim/T;
    Float delta_t0 = (1e-4)/T;
    Float theta = pow(10.,1/N);
    Float delta_t = delta_t0; //tf/k_max;
    Float delta_t_prec = delta_t;
    size_t k_max = N*( log(tf_dim)/log(10.) +4 );
    Float timer = 0.;
    size_t j_max = 5;

    space Vh (omega, "P1");
    space V0h (omega, "P0");
    space Gh (omega, "P0", "vector");
    form m (Vh, Vh, "mass");
    form_diag inv_m0 = 1./form_diag(V0h, "mass");
    form_diag inv_m0g = 1./form_diag(Gh, "mass");
    form proj_P1_P0 (Vh, V0h, "mass");
    form grad (Vh, Gh, "grad");
    field one (Vh, 1.0);
    field h = interpolate (Vh, h_init);
    h = compose(positif,h);
}

```

```

field h_old = h;
Float V0 = m(h,one);
field fh = interpolate (Vh, f);
field grad_fh = inv_m0g*(grad*fh);
field eh (Vh,0);
//fh.save ("fh");
branch event ("t","f+h","h");
cerr << "# adim: tf = " << tf << endl;
cerr << "# V0 = " << V0 << endl;
cerr << "# w = " << w << endl;
cerr << "# Bi = " << Bi << endl;
cerr << "# kmax = " << k_max << endl;
cerr << "# k j i time vol_err |h|_a rel_err" << endl;
cout << event (timer,fh+h,h);
for (size_t k = 1; k <= k_max+1; k++) {
    field phi = h;
    field h_j = h;
    field h_old_j = h_old;
    for (size_t j = 0 ; j <= j_max; j++){ // boucle d'adaptation
        field phi_prec = phi;
        for (size_t i = 0 ; i <= i_max; i++) { // point fixe à chaque pas de temps
            field grad_phi = inv_m0g*(grad*phi);
            field phi_P0 = inv_m0*(proj_P1_P0*phi);
            field norm_grad = euclidian_norm (grad_phi + grad_fh);
            field vu_h = compose(vu,phi_P0,norm_grad);
            form a (Vh, Vh, "grad_grad", vu_h);
            eh = abs(phi - phi_prec);
            Float error_relative = m(eh,one)/V0;
            Float V = m(phi,one);
            cerr << k << " " << j << " " << i << " " << timer << " " << (V-V0)/V0
                << " " << sqrt(a(phi+fh,phi+fh)) << " " << error_relative << endl;
            if (i == i_max || (i > 0 && error_relative < epsilon)) break;

            Float coeff1 = delta_t*(delta_t+delta_t_prec)/(2*delta_t+delta_t_prec);
            Float coeff2 = (delta_t+delta_t_prec)/(delta_t*delta_t_prec);
            Float coeff3 = delta_t/((delta_t+delta_t_prec)*delta_t_prec);

            form c = m + coeff1*a;
            ssk<Float> c_fact = ldlt (c.uu);
            field mb = coeff1*coeff2*(m*h_j) - coeff1*coeff3*(m*h_old_j) - coeff1*(a*fh);
            phi_prec = phi;
            phi.u = c_fact.solve (mb.u - c.ub*phi.b);
            phi = compose(positif,phi);
            phi = w*phi + (1-w)*phi_prec;
        }
        if (j==j_max) break;
        field ch = criteria(phi,h_j,h_old_j);
    }
}

```

```

omega = geo_adapt(ch,options);
Vh = space(omega, "P1");
V0h = space(omega, "P0");
Gh = space(omega, "P0", "vector");
m = form(Vh, Vh, "mass");
inv_m0 = 1./form_diag(V0h, "mass");
inv_m0g = 1./form_diag(Gh, "mass");
proj_P1_P0 = form(Vh, V0h, "mass");
grad = form(Vh, Gh, "grad");
phi = interpolate(Vh, phi);
fh = interpolate (Vh, f);
grad_fh = inv_m0g*(grad*fh);
one = field(Vh, 1.0);
h_j = interpolate(Vh,h);
h_old_j = interpolate(Vh,h_old);
}
h_old=h_j;
h=phi;
timer = timer + delta_t;
cout << event (timer, fh+h, h);
h.get_geo().save();
delta_t_prec = delta_t;
delta_t = theta*delta_t;
if (k == k_max) break;
}
}

```

Toutes la documentation sur l'utilisation de Rhéolef est disponible à l'adresse suivante :  
<http://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/rheolef/rheolef.pdf> .

## Conclusion

Ce travail a permis de mettre en place un nouveau modèle pour la dynamique des fluides viscoplastiques avec la prise en compte de l'effet de seuil. La principale force de ce modèle, par le biais d'une étude asymptotique, est d'être un modèle 2D, permettant ainsi d'alléger considérablement les calculs de simulation numérique puisque on profite d'un maillage uniquement 2D. Nous avons par ailleurs mis en place une suite d'algorithmes et d'outils complexes permettant de mener à bien les calculs de simulation numérique (adaptation de maillage, algorithme du point fixe avec sous-relaxation...). Nous avons pu ainsi réaliser différentes simulations numériques afin de reproduire des expériences faites en laboratoire. Les résultats obtenus sont intéressants et encourageants malgré les limites du modèle. Ce travail fournit ainsi une base solide pour étudier des phénomènes physiques plus complexes faisant intervenir les fluides à seuil. Nous avons en particulier commencé à traiter une application en géophysique avec la simulation de coulée de lave volcanique en s'appuyant sur des mesures et une étude faite par l'équipe de Géoscience de la Réunion sur une coulée d'avril 2007 du Piton de la Fournaise. Dans le cas des coulées volcaniques, il reste maintenant à intégrer les phénomènes thermiques dans la dynamique de la lave pour obtenir un modèle thermo-fluide jusqu'à très peu étudié.

## Référence

- [1] S. Cochard and C. Ancey 2009, Experimental investigation of the spreading of viscoplastic fluids on inclined planes, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 158, 73-84
- [2] N. J. Balmforth and R. V. Craster and A. C. Rust 1998, A consistent thin-layer theory for Bingham plastics
- [3] N. J. Balmforth and R. V. Craster and A. C. Rust and R. Sassi 2006, Viscoplastic flow over an inclined surface, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 139, 103-127
- [4] Rheolef, Pierre Saramito 2011 Efficient C++ finite element computing with Rheolef, "CNRS and LJK", <http://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/rheolef/rheolef.pdf>
- [5] P. Saramito, C. Smutek and B. Cordonnier 2010 The horizontal dam break problem for slow non-Newtonian power-law fluids, submitted
- [6] K. D. Nikitin and M. A. Olshanskii and K. M. Terekhov and Y. V. Vassilevski 2011, Numerical method for the simulation of free surface flows of viscoplastic fluid in 3D, <http://dodo.inm.ras.ru/research/freesurface>
- [7] D. Coppola, D. Piscopo, T. Staudacher, C. Cigolin 2009, Lava discharge rate and effusive pattern at Piton de la Fournaise from MODIS data, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 184-186
- [8] Michele Dragoni 1993, Active Lavas : Monitoring and Modelling, chap. 9
- [9] N. Villeneuve, D. R. Neuville, P. Boivin, P. Bachèlery, P. Richet 2009, Magma crystallization and viscosity : A study of molten basalts from the Piton de la Fournaise volcano (La Réunion island), *Chemical Geology*, 6