

Estimations d'erreur pour un fluide viscoplastique par éléments finis P_k et maillages adaptés

Nicolas ROQUET, Richard MICHEL et Pierre SARAMITO

Résumé – *Nous montrons une estimation a priori de l'erreur en $\mathcal{O}(h^k \sqrt{|\ln h|})$, en utilisant des maillages adaptés et des méthodes d'éléments finis de type P_k , lors de l'approximation de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique avec adhérence à la paroi. D'autre part, l'utilisation de maillages uniformes conduit à une estimation en $\mathcal{O}(h)$, ce qui met en évidence l'intérêt de l'adaptation de maillages. En conclusion, des tests numériques viennent confirmer les résultats annoncés.*

Errors estimate for a viscoplastic fluid by using P_k finite elements and adaptive meshes

Abstract – *An a priori error estimate $\mathcal{O}(h^k \sqrt{|\ln h|})$ result is presented when using a suitable adaptive mesh approach and P_k finite element approximation for the simulation of the flow of a Bingham fluid in a pipe with no-slip at the wall. Moreover, we show that the use of an uniform mesh family leads to a $\mathcal{O}(h)$ estimate for all $k \geq 1$. This result points out the efficiency of the adaptive mesh approach. To conclude, we present results of numerical tests which confirm the previous estimates.*

Abridged English Version – The flow of a Bingham fluid in a pipe of polygonal cross-section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with no-slip at the wall (see [1, 8, 3]) is described by the so-called Mosolov problem:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \nabla u + Bi \frac{\nabla u}{|\nabla u|} & \text{when } \nabla u \neq 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq Bi & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -f \text{ in } \Omega \quad (2)$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (3)$$

where u is the axial component of the velocity and $\boldsymbol{\sigma}$ is a vector whose components are the shear stress; Bi is the Bingham dimensionless number and f is the constant linear pressure drop. The limit case $Bi = 0$ is related to a Newtonian fluid while $Bi > 0$ describe a yield stress fluid. The problem (1)-(3) can be expressed by using the variational framework:

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad (\nabla u, \nabla(v - u)) + Bi(|\nabla v|_{0,1;\Omega} - |\nabla u|_{0,1;\Omega}) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4)$$

Subsequently, a general assumption is made: $f \in L^2(\Omega)$. The notations (\cdot, \cdot) and $|\cdot|_{m,p;\Omega}$ denote respectively the $L^2(\Omega)$ scalar product and the $W^{m,p}(\Omega)$ semi-norm, for all $m \geq 0$ and $p \in [1, \infty]$. Let $V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}); v|_K \in P_k, \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ and } v|_{\partial\Omega} = 0\}$ be a finite dimensional space, where $k \geq 1$ denotes the order of the polynomials and $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ is a regular family of triangulations. The finite dimensional problem writes:

$$u_h \in V_h, \quad (\nabla u_h, \nabla(v_h - u_h)) + Bi(|\nabla v_h|_{0,1;\Omega} - |\nabla u_h|_{0,1;\Omega}) \geq (f, v_h - u_h), \quad (5)$$

for all $v_h \in V_h$. The solutions of (4) and (5) exist and are unique [7].

The problem of the error estimate $\|u - u_h\|$ in the H^1 semi-norm (i.e. $\|v\| = |v|_{1,2;\Omega}$) is addressed in this paper. In 1976, Glowinski [5] showed for $k = 1$ a $\mathcal{O}(h^{1/2})$ estimate and noticed that when Ω is a disk, the solution u satisfies, for all $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx}{|\nabla u|} = \mathcal{O}(-\ln \varepsilon) \quad \text{where} \quad \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; |\nabla u| > \varepsilon\} \quad (6)$$

$$\text{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{where} \quad \Omega_{0,\varepsilon} = \{x \in \Omega; 0 < |\nabla u| < \varepsilon\} \quad (7)$$

This author showed for $k = 1$ a quasi-optimal $\mathcal{O}(h\sqrt{|\ln h|})$ error estimate on an quasi-uniform triangulation of the disk. In 1977, Falk and Mercier [4] introduced a formulation equivalent to (4) and showed an optimal $\mathcal{O}(h)$ estimate for the vorticity in L^2 norm (see also [7], app. 5, for nice developments). Finally, many authors [7, 6] suggested that the convergence is not faster for $k = 2$ than for $k = 1$.

Using a new mesh partitioning argument, the (6)-(7) hypothesis, and extending the framework introduced by [6], we show a $\mathcal{O}(h^k\sqrt{|\ln h|})$ estimate for $k \geq 2$ and a suitable family of regular triangulations. Moreover, when Ω is a disk and $k = 2$, this estimation becomes $\mathcal{O}(N^{-1}\sqrt{\ln N})$ in term of $N = \dim V_h$, the number of degrees of freedom.

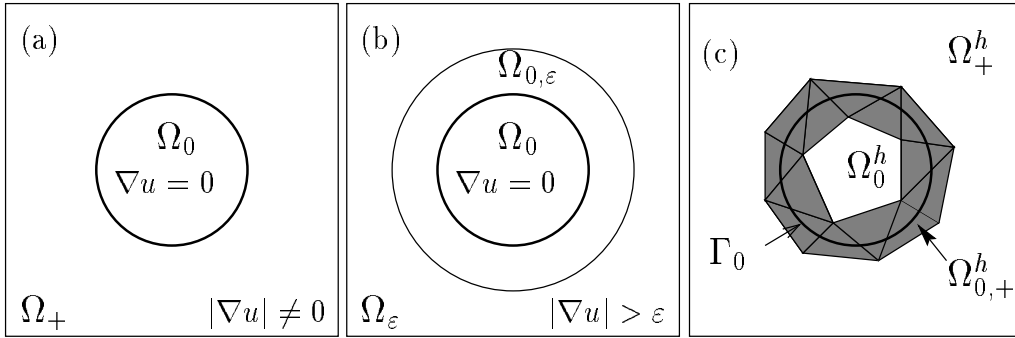


FIG. 1: Trois partitions de Ω .

Fig. 1: Three partitions of Ω .

1. ESTIMATION ABSTRAITE. – Les relations (6)-(7) suggèrent l'introduction de l'ensemble $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |\nabla u| = 0\}$, appelé ensemble des zones rigides (voir Fig. 1.a), et par commodité, nous noterons Ω_+ l'intérieur du complémentaire de Ω_0 dans Ω , appelé ensemble des zones cisailées, ainsi que $\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega$ l'interface entre ces deux zones. Définissons $\Omega_{0,+}^h$ (voir Fig. 1.c) à partir des éléments de \mathcal{T}_h rencontrant Γ_0 :

$$\Omega_{0,+}^h = \text{int}(\cup\{K; K \in \mathcal{T}_h \text{ et } K \cap \Gamma_0 \neq \emptyset\})$$

Notons $h = \max\{h_K; K \in \mathcal{T}_h\}$ ainsi que $h_0 = \max\{h_K; K \in \mathcal{T}_h \text{ et } K \cap \Gamma_0 \neq \emptyset\}$ la taille du plus grand élément K inclus dans $\Omega_{0,+}^h$. Par commodité, nous noterons aussi $\Omega_0^h = \text{int}(\Omega_0 \setminus \Omega_{0,+}^h)$ et $\Omega_+^h = \text{int}(\Omega_+ \setminus \Omega_{0,+}^h)$. Nous supposons Γ_0 assez régulière et $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ quasi-uniforme dans $\Omega_{0,+}^h$, de sorte que $\text{mes}(\Omega_{0,+}^h) = \mathcal{O}(h_0)$.

LEMME 1 (*estimation abstraite*) – Supposons que la solution u de (4) soit dans $W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Alors, la solution u_h de (5) vérifie l'estimation :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 \leq & C \left(\|v_h - u\|^2 + Bi |v_h|_{1,1;\Omega_0^h} + Bi \operatorname{mes}(\Omega_{0,+}^h) |v_h - u|_{1,\infty;\Omega_{0,+}^h} \right. \\ & + Bi \operatorname{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) |v_h - u|_{1,\infty;(\Omega_+^h \cap \Omega_{0,\varepsilon})} \\ & \left. + Bi |v_h - u|_{1,\infty;(\Omega_+^h \cap \Omega_\varepsilon)}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx}{|\nabla u|} \right) \end{aligned}$$

pour tout $v_h \in V_h$, où $C > 0$ est une constante indépendante de h et de u .

Démonstration – Soit $\Lambda = \{\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)^2; |\boldsymbol{\tau}| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. Il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ tel que (voir [6], chap. 2, Théorème 6.3) :

$$(\nabla u, \nabla v) + Bi(\boldsymbol{\lambda}, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla u = |\nabla u| \text{ p.p. dans } \Omega$$

et de plus, l'estimation suivante est satisfaite :

$$\|u_h - u\|^2 \leq (\nabla(u_h - u), \nabla(v_h - u)) + Bi(\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}, \nabla(v_h - u)) \quad (8)$$

ceci $\forall \boldsymbol{\mu}_h \in \Lambda$ tel que $\boldsymbol{\mu}_h \cdot \nabla v_h = |\nabla v_h|$. Après application des inégalités de Cauchy-Schwartz puis de Young au premier terme du membre de droite, la relation (8) devient :

$$\|u_h - u\|^2 \leq \|v_h - u\|^2 + 2 Bi(\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}, \nabla(v_h - u)) \quad (9)$$

Le dernier terme du membre de droite de (9) se décompose selon $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_0^h} \cup \overline{\Omega_{0,+}^h} \cup \overline{\Omega_+^h}$.

- Dans Ω_0^h , par définition $\nabla u = 0$ et, de plus $|\boldsymbol{\lambda}| \leq 1$ et $|\boldsymbol{\mu}_h| \leq 1$:

$$\int_{\Omega_0^h} (\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla(v_h - u) dx \leq 2 |v_h|_{1,1;\Omega_0^h} \quad (10)$$

- Dans la fine couche $\Omega_{0,+}^h$, utilisons $|\boldsymbol{\lambda}| \leq 1$ et $|\boldsymbol{\mu}_h| \leq 1$:

$$\int_{\Omega_{0,+}^h} (\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla(v_h - u) dx \leq 2 \operatorname{mes}(\Omega_{0,+}^h) |v_h - u|_{1,\infty;\Omega_{0,+}^h} \quad (11)$$

- Dans Ω_+^h , utilisons à présent la partition $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_{0,\varepsilon}} \cup \overline{\Omega_\varepsilon}$. Puisque $\Omega_+^h \cap \Omega_0 = \emptyset$, la somme sur Ω_+^h se décompose en deux termes, l'un sur $\Omega_{0,\varepsilon} \cap \Omega_+^h$, l'autre sur $\Omega_\varepsilon \cap \Omega_+^h$. Dans $\Omega_+^h \cap \Omega_{0,\varepsilon}$, reprenons la même idée que dans $\Omega_{0,+}^h$:

$$\int_{\Omega_+^h \cap \Omega_{0,\varepsilon}} (\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla(v_h - u) dx \leq 2 \operatorname{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) |v_h - u|_{1,\infty;\Omega_+^h \cap \Omega_{0,\varepsilon}} \quad (12)$$

Dans $\Omega_+^h \cap \Omega_\varepsilon$ nous rendons à présent explicite $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}_h$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mu}_h = \begin{cases} \frac{\nabla v_h}{|\nabla v_h|} & \text{si } \nabla v_h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquant ensuite l'inégalité (voir [6], chap. 2, Lemme 6.1) :

$$\left| \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|} \right| \leq 2 \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}|}, \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$$

il vient successivement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+^h \cap \Omega_\varepsilon} (\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla(v_h - u) \, dx &\leq \int_{\Omega_+^h \cap \Omega_\varepsilon} |\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}| |\nabla(v_h - u)| \, dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega_+^h \cap \Omega_\varepsilon} \frac{|\nabla(v_h - u)|^2}{|\nabla v_h| + |\nabla u|} \, dx \leq 2 \|v_h - u\|_{1,\infty;\Omega_+^h \cap \Omega_\varepsilon}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx}{|\nabla u|} \end{aligned} \quad (13)$$

Pour conclure, il suffit de sommer les estimations (10)-(13) et de reporter dans (9). \square

2. APPLICATION AUX ÉLÉMENTS P_k .

THÉORÈME 1 (estimation concrète) – Soient $k \geq 1$ et $s \in [1, k]$. Si $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega_+)$ et vérifie les hypothèses (6)-(7) alors

$$\|u - u_h\| = \mathcal{O} \left(\max \left(h_0, h^s \sqrt{|\ln h|} \right) \right)$$

Indication sur la démonstration – Choisissons pour v_h l'interpolé de Lagrange $\pi_h u$ de u . Nous avons alors $\nabla(\pi_h u) = 0$ dans Ω_0^h ce qui a deux conséquences ; d'une part $|\pi_h u|_{1,1;\Omega_0^h} = 0$ et d'autre part, avec la partition $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_0^h} \cup \overline{\Omega_{0,+}^h} \cup \overline{\Omega_+^h}$,

$$\begin{aligned} \|\pi_h u - u\|^2 &= |\pi_h u - u|_{1,2;\Omega_0^h}^2 + |\pi_h u - u|_{1,2;\Omega_+^h}^2 \\ &\leq \text{mes}(\Omega_{0,+}^h) |\pi_h u - u|_{1,\infty;\Omega_{0,+}^h}^2 + |\pi_h u - u|_{1,2;\Omega_+^h}^2 \end{aligned}$$

En outre, classiquement [2], nous avons :

$$\begin{aligned} |\pi_h u - u|_{1,\infty;\Omega_0^h} &\leq Ch_0 |u|_{2,\infty;\Omega_0^h} \leq Ch_0 |u|_{2,\infty;\Omega} \\ |\pi_h u - u|_{1,\infty;\Omega_+^h} &\leq Ch^s |u|_{s+1,\infty;\Omega_+^h} \leq Ch^s |u|_{s+1,\infty;\Omega_+} \\ |\pi_h u - u|_{1,2;\Omega_+^h} &\leq Ch^s |u|_{s+1,2;\Omega_+^h} \leq Ch^s |u|_{s+1,2;\Omega_+} \end{aligned}$$

où $C > 0$ désigne une constante indépendante de h . Le résultat découle ensuite du lemme 1, en rappelant que $\text{mes}(\Omega_{0,+}^h) = \mathcal{O}(h_0)$ et en choisissant $\varepsilon = h^s$ dans (6)-(7). \square

Signalons que lorsque Ω est un disque, la frontière Γ_0 de la zone rigide est un cercle, et l'hypothèse de régularité $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega_+)$ est satisfaite pour tout $s > 0$.

COROLLAIRE 1 (maillages uniformes) – Soient $k \geq 1$ et $s \in [1, k]$. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille quasi-uniforme de triangulations. Si $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega_+)$ et vérifie les hypothèses (6)-(7) alors

$$\|u - u_h\| = \begin{cases} \mathcal{O} \left(h \sqrt{|\ln h|} \right) & \text{pour } k = 1 \\ \mathcal{O}(h) & \text{pour } k \geq 2 \text{ et } s > 1 \end{cases}$$

COROLLAIRE 2 (maillages adaptés) – Soient $k \geq 2$ et $s \in]1, k]$. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations vérifiant $h_0 = \mathcal{O}(h^s)$. Si $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega_+)$ et vérifie les hypothèses (6)-(7) alors

$$\|u - u_h\| = \mathcal{O} \left(h^s \sqrt{|\ln h|} \right)$$

Pour $k \geq 2$, le corollaire 1 a pu être nettement amélioré. Dans la mesure où les triangulations ne sont plus quasi-uniformes, il paraît judicieux d'exprimer l'erreur en fonction du nombre $N = \dim V_h$ de degrés de liberté.

PROPRIÉTÉ 1 (estimation en taille) – Supposons que Ω soit un disque, $f = 1$ et $k = 2$.

(i) Si $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une famille uniforme de triangulations alors $\|u - u_h\| = \mathcal{O}(N^{-1/2})$

(ii) Il existe $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations et vérifiant $h_0 = h^2$ telle que $\|u - u_h\| = \mathcal{O}(N^{-1}\sqrt{\ln N})$

Indication sur la démonstration – Nous avons étendu les résultats précédents au cas d'un ouvert non-polygonal (en utilisant les techniques de [2], chap 8), et donc au cas d'un disque. Pour (i), d'après le corollaire 1 et en remarquant que $h = \mathcal{O}(N^{-1/2})$. Pour (ii), d'après le corollaire 2 et par construction d'une famille de triangulation en progression géométrique de $h_0 = h^2$ à h et telle que $N = \mathcal{O}(h^{-2})$. \square

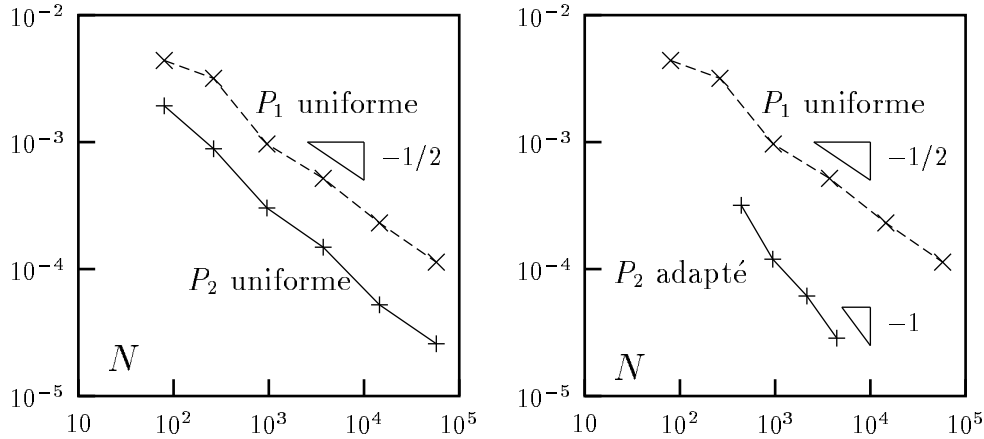


FIG. 2.: Comparaison pour $Bi = 0.3$ de l'élément P_1 en maillages uniformes avec l'élément P_2 en maillages (a) uniformes; (b) adaptés.

Fig. 2.: Comparison for $Bi = 0.3$ of the P_1 element and uniform meshes with the P_2 element and (a) uniform meshes; (b) adaptive meshes.

3. TESTS NUMÉRIQUES. – La résolution du problème (5) par une méthode de Lagrangien augmenté et une procédure auto-adaptative de maillages est décrite en détails dans [9]. L'erreur lorsque Ω est le disque unité est présenté sur la Fig. 2 pour une famille quasi-uniforme de triangulations. Observons, Fig. 2.a, que l'utilisation de l'élément P_2 n'apporte pas de gain asymptotique, par comparaison avec l'élément P_1 . La Fig. 2.b met en évidence le gain obtenu par l'élément P_2 combiné avec une adaptation de maillage.

Enfin, la Fig. 3 présente les isovaleurs de $|\sigma|$ lorsque Ω est une section carrée, $k = 2$ et $Bi = 0.5$. Par symétrie par rapport aux deux axes de coordonnées et à la première bissectrice, nous pouvons nous ramener à un domaine triangulaire. La frontière Γ_0 des deux zones rigides correspond à l'isovaleur $|\sigma| = Bi = 0.5$. Nous observons une nette amélioration de cette isovaleur lors de l'utilisation d'un maillage adapté.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Bingham, E. C., 1922. *Fluidity and Plasticity*. Mc Graw-Hill, New-York.
- [2] Brenner, S. et Scott, R., 1991. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag.
- [3] Duvaut, G. et Lions, J., 1972. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod.
- [4] Falk, R. S. et Mercier, B., 1977. Error estimates for elastoplastic problems. *RAIRO, Anal. Numér.*, 11, 135–144.
- [5] Glowinski, R., 1976. Sur l'approximation d'une inéquation variationnelle elliptique de type Bingham. *RAIRO, Anal. Numér.*, 10(12), 13–30.

- [6] Glowinski, R., 1980. *Lectures on numerical methods for non-linear variational problems*. Springer-Verlag.
- [7] Glowinski, R., Lions, J. L. et Trémolières, R., 1981. *Numerical analysis of variational inequalities*. North Holland, Amsterdam.
- [8] Mosolov, P. P. et Mjasnikov, V. P., 1965. Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous-plastic medium. *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, 29, 545–577.
- [9] Saramito, P. et Roquet, N., 2000. An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, submitted.

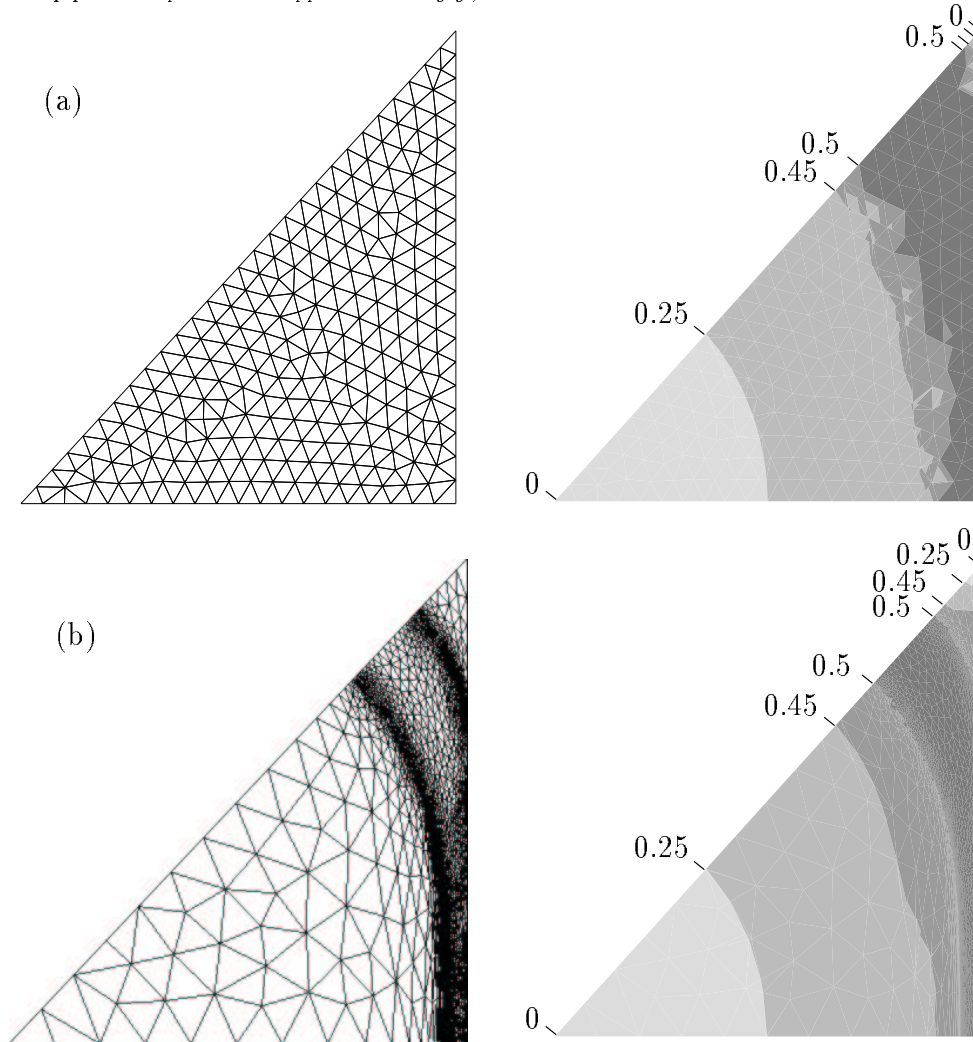


FIG. 3: Isovaleurs de $|\sigma|$ pour $Bi = 0.5$ et $k = 2$ (a) maillage uniforme (256 sommets); (b) maillage adapté (1944 sommets).

Fig. 3: Contours of $|\sigma|$ for $Bi = 0.5$ and $k = 2$ (a) uniform mesh (256 vertices); (b) adaptive mesh (1944 vertices).

N. R., P. S. : LMC-IMAG, B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 9, France.
R. M. : CNRS - LEPMI B.P. 75, 38402 Saint Martin d'Hères cedex, France.