

Méthodes numériques appliquées à la mécanique/*Computational Mechanics*
(Analyse numérique/*Numerical Analysis*)

Décomposition d'opérateurs pour des fluides à loi de comportement de type différentiel

Pierre SARAMITO

Résumé – On étudie une application du θ -schéma au calcul d'écoulements de fluides viscoélastiques. La décomposition vise à séparer les termes de viscosité des termes de transport. On se ramène ainsi à résoudre deux sous-problèmes plus simples, l'un de type Stokes, l'autre de type transport du tenseur des contraintes. De plus, en présence de singularités, ce schéma permet de contourner les difficultés rencontrées par la plupart des méthodes itératives dans ce type de simulation. En conclusion, on présente des résultats d'expériences numériques qui, de notre point de vue, justifient pleinement la méthodologie numérique qui y est décrite.

Operator splitting for viscoelastic fluid with a differential constitutive law

Abstract – We study a θ -scheme applied to the computation of viscoelastic fluid flows. The splitting technique leads to two problems, the first a Stokes-like one, and the second, a stress tensor transport problem. Furthermore, when the solution is singular, this scheme overcomes difficulties appearing when using other classical iterative procedures for this kind of simulation. To conclude, we present the result of numerical experiments which in our opinion fully validate the numerical methodology described here.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME. – Considérons les fluides viscoélastiques à loi de comportement de type Oldroyd (Oldroyd, 1950), gouvernés par les équations suivantes :

$$(1) \quad \text{We} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \beta_a(\tau, \nabla \mathbf{u}) \right) + \tau - 2\alpha \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2) \quad \text{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \text{div } \tau - (1 - \alpha) \Delta \mathbf{u} + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert régulier de \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$, τ est le tenseur des extra-contraintes, les contraintes totales étant données par $\sigma = -p\mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \tau$, \mathbf{u} est le champ des vitesses, et p est la pression hydrostatique ; $\beta_a(\tau, \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{W}\tau - \tau\mathbf{W} - a(\mathbf{D}\tau + \tau\mathbf{D})$, où $a \in [-1, 1]$, $\mathbf{D} = (1/2)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)$ est le tenseur des taux de déformation et $\mathbf{W} = (1/2)(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^t)$ est le tenseur de vorticité ; enfin, $f \in (L^2(\Omega))^N$ est une donnée, We est le nombre sans dimension de Weissenberg, Re le nombre de Reynolds, et $\alpha \in]0, 1]$ un paramètre de retard.

Le cas limite $\text{We} = 0$ correspond à un fluide newtonien, tandis que $\text{We} > 0$ décrit des solutions de polymères dans un solvant newtonien. Ces équations peuvent être complétées par des conditions initiales $\tau(0) = \tau_0$ et $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, ainsi qu'une condition aux bords $\mathbf{u} = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$. Lorsque la frontière Γ est régulière, et \mathbf{u}_0 , τ_0 et f sont suffisamment petits, on montre dans Guillopé et Saut (1987) l'existence globale de solutions.

Note présentée par Roland GLOWINSKI.

2. DÉCOMPOSITION DU PROBLÈME. – Afin de simplifier l'analyse qui suit, supposons le fluide lent, et négligeons le terme d'inertie $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ dans (2). Il s'agit d'une hypothèse classique dans ce type de simulation ; la difficulté du problème est désormais portée par la non-linéarité de l'équation (1). Introduisons les espaces classiques :

$$\begin{aligned} T &= \{ \tau \in L^2(\Omega)^{N \times N}; \tau = \tau^t \} \quad \text{de norme } |\cdot| \\ V &= \{ \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N; \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \} \quad \text{de norme } \|\cdot\| \end{aligned}$$

Le problème peut se mettre sous la forme :

(P) : trouver $\mathcal{U} = (\tau, \mathbf{u}) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; T \times V)$ tel que :

$$(4) \quad S \frac{d\mathcal{U}}{dt} + A(\mathcal{U}) = \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$$

où $S = \operatorname{diag}(We, Re)$, $\mathcal{F} = (0, f)^t$, $\mathcal{U}_0 = (\tau_0, \mathbf{u}_0)^t$ et $A(\mathcal{U}) = A_1(\mathcal{U}) + A_2(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, défini de $T \times V$ dans $T' \times V'$, est donné par la décomposition suivante :

$$(5) \quad A_1(\tau, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \nu \tau - 2\alpha D(\mathbf{u}) \\ -\operatorname{div} \tau - (1 - \alpha) \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix}; \quad A_2(\sigma, \mathbf{v}; \tau, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \nu' \tau + We T(\mathbf{v}) \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $\nu' = 1 - \nu$ et $\nu \in [0, 1]$ est un paramètre de la décomposition. Dans (5), $T(\mathbf{v})$ désigne l'opérateur de transport des contraintes : $T(\mathbf{v}) \tau = \mathbf{v} \cdot \nabla \tau + \beta_a(\tau, \nabla \mathbf{v})$.

Introduisons à présent la semi-approximation de (P). Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps et θ un paramètre, $\theta \in]0, 1/2[$. Considérons les notations $\theta' = 1 - 2\theta$, $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}^{n+\delta} \approx \mathcal{U}((n + \delta) \Delta t)$. Puisque A_1 et A_2 sont plus simples que A , utilisons cette décomposition pour résoudre (P) par le θ -schéma (Glowinski, 1986 ; Saramito, 1994) :

$$(6) \quad \frac{S\mathcal{U}^{n+\theta} - S\mathcal{U}^n}{\theta \Delta t} + A_1(\mathcal{U}^{n+\theta}) + A_2(\mathcal{U}^n; \mathcal{U}^n) = \mathcal{F}^{n+\theta}$$

$$(7) \quad \frac{S\mathcal{U}^{n+1-\theta} - S\mathcal{U}^{n+\theta}}{\theta' \Delta t} + A_1(\mathcal{U}^{n+\theta}) + A_2(\mathcal{U}^n; \mathcal{U}^{n+1-\theta}) = \mathcal{F}^{n+1-\theta}$$

$$(8) \quad \frac{S\mathcal{U}^{n+1} - S\mathcal{U}^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} + A_1(\mathcal{U}^{n+1}) + A_2(\mathcal{U}^n; \mathcal{U}^{n+1-\theta}) = \mathcal{F}^{n+1}$$

PROPOSITION 1 (cas newtonien). – Pour $We = 0$, le schéma (6)-(8) est inconditionnellement stable et du premier ordre en temps. De plus, la méthode est d'ordre deux en temps pour $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$.

Indication sur la démonstration. – Par décomposition spectrale. Voir aussi Glowinski et Périaux (1987). \square

Remarque 1. – La résolution de (6) et (8) se réduit à celle d'un problème de type Stokes, et la résolution de (7), à celle d'un problème de type transport pour l'opérateur $I + \varepsilon T(\mathbf{v})$, avec $\varepsilon > 0$.

Remarque 2. – Aucun résultat n'a été établi à présent dans le cas viscoélastique ($We > 0$). Numériquement, l'algorithme (6)-(8) est bien adapté à la recherche des solutions stationnaires, la vitesse de convergence dépend alors de θ et Δt . Les exemples qui suivent abordent le cas viscoélastique.

3. ÉLONGATION UNIAXIALE. – Le tenseur gradient de vitesse est donné par $\nabla \mathbf{u} = \text{diag}(\dot{\epsilon}, -\dot{\epsilon}/2, -\dot{\epsilon}/2)$, où $\dot{\epsilon} > 0$ est le taux d'élongation (sans dimension). Le problème se ramène à trouver τ_{11} , τ_{22} et τ_{33} dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ satisfaisant trois équations différentielles découplées. Les valeurs propres du problème sont $\lambda_1 = 1/We - 2a\dot{\epsilon}$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/We + a\dot{\epsilon}$.

PROPOSITION 2 (élongation). – Si $a\dot{\epsilon}We < 1/2$, alors le problème admet une solution unique dans $L^\infty(\Omega)$. Le schéma (6)-(8) pour $\nu = 0$, est précis au premier ordre, et au second ordre pour $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$. Il est stable sous la condition

$$(9) \quad \Delta t < \frac{We}{\theta^2(1 - 2a\dot{\epsilon}We)}$$

Enfin, un cycle de deux pas de temps $\Delta t_1 = We/\theta(1 - 2a\dot{\epsilon}We)$ et $\Delta t_2 = We/(\theta(1 + a\dot{\epsilon}We))$ permet d'obtenir exactement la solution stationnaire.

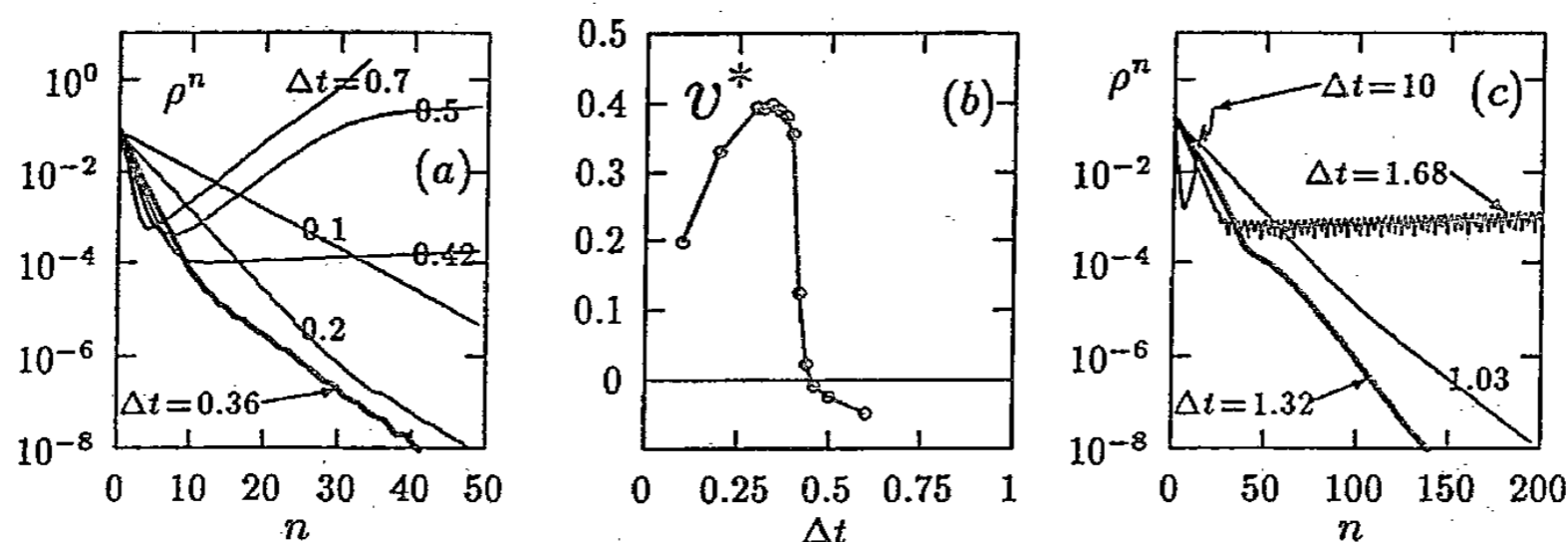
4. CISAILLEMENT SIMPLE. – L'écoulement est bidimensionnel, et le tenseur gradient des vitesses est donné par :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\dot{\gamma} > 0$ est le taux de cisaillement (sans dimension). Le problème se ramène à trouver τ_{11} , τ_{22} et τ_{12} dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ satisfaisant à trois équations différentielles découplées. Les valeurs propres du problème sont $\lambda_1 = 1/We$, $\lambda_2 = 1/We + i\dot{\gamma}\sqrt{1 - a^2}$ et $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$.

PROPOSITION 3 (cisaillement). – Le problème admet toujours une solution dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Le schéma (6)-(8) pour $\nu = 0$, est précis au premier ordre, et au second ordre pour $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$. La stabilité est conditionnelle. Enfin, pour $|a| = 1$, il est possible de converger en un pas de temps $\Delta t = We/\theta$ vers la solution stationnaire.

ÉCOULEMENTS COMPLEXES ET SINGULARITÉS. – On considère le schéma (6)-(8), ayant en vue de remplacer T et V par des espaces de dimension finie T_h et V_h , et de rechercher la solution stationnaire approchée $\mathcal{U}_h^* = (\tau_h^*, \mathbf{u}_h^*)$ correspondante.



Écoulement à singularité ($a = 1, \alpha = 8/9$) : (a) résidu selon l'itéré ($We = 0.5$);
 (b) vitesse de convergence selon Δt ($We = 0.5$); (c) résidu selon l'itéré ($We = 11$).
 Flow with a singularity ($a = 1, \alpha = 8/9$) : (a) residual term versus n ($We = 0.5$);
 (b) convergence velocity versus Δt ($We = 0.5$); (c) residual term versus n ($We = 11$).

Observons les résultats rassemblés dans la figure. L'écoulement a lieu dans une géométrie plane à contraction brusque de rapport 4 à 1 [voir Saramito (1990) pour une présentation détaillée des éléments finis et des formes matricielles correspondantes]. La solution stationnaire approchée \mathcal{U}_h^* n'étant pas connue a priori, nous mesurons la convergence de

l'itéré \mathcal{U}_h^n vers \mathcal{U}_h^* à l'aide de ρ^n , la norme du résidu $A(\mathcal{U}_h^n) - \mathcal{F}$ du problème stationnaire. Le schéma (6)-(8) apparaît comme une méthode itérative découplée pour la résolution du problème stationnaire $A(\mathcal{U}_h^*) = \mathcal{F}$, le résidu convergeant vers zéro pour Δt assez petit.

La figure (a) met en évidence des changements de pente durant les itérations. La deuxième partie de la courbe exprime la convergence plus lente d'un groupe spécifique de composantes du résidu. On peut conjecturer que ces composantes sont dues à la présence de grandes valeurs propres de l'opérateur A_2 . En effet, A_2 fait intervenir le terme $\beta_a(\cdot, \nabla \mathbf{u}_h^*)$, et $\nabla \mathbf{u}_h^*$ devient grand au voisinage de la singularité. D'où la nécessité de réduire Δt afin de maîtriser les valeurs propres de $(I - \theta \Delta t S^{-1} A_2)$ et $(I + \theta' \Delta t S^{-1} A_2)^{-1}$ apparaissant dans l'opérateur d'itération du schéma. On pourra aussi faire l'analogie avec une CFL, remarquant cependant qu'ici la condition de stabilité dépend de la nature de la singularité et du maillage au voisinage de cette singularité.

Par un choix particulier de Δt , on annule la vitesse asymptotique de convergence $v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\log |\rho^n|)/n$ [fig. (b)] ; le résidu se stabilise [fig. (a), $\Delta t = 0.42$, et fig. (c), $\Delta t = 1.68$]. On ne manquera pas de faire le rapprochement avec la méthode de la puissance itérée pour les problèmes de valeurs propres [cf. Chatelain (1988), par exemple]. Pour des pas de temps plus élevés, ces composantes vont aller en amplitude croissante, d'où l'aspect particulier, en « V », des courbes obtenues [fig. (a), $\Delta t = 0,6$ et fig. (c), $\Delta t = 10$].

Signalons enfin que schéma a été étendu au cas du modèle de Phan-Thien et Tanner (1977). Dans Saramito et Piau (1994), sur une géométrie complexe, et dans le cas $|a| < 1$, on construit par un procédé de cheminement des branches de solutions stationnaires, et on met en évidence les propriétés asymptotiques des écoulements pour les grandes valeurs de We , ceci pour différents paramètres du modèle. Ces résultats de propriétés asymptotiques sont, à notre connaissance, les premiers relatifs à ce type de simulation pour les modèles viscoélastiques à loi de comportement de type différentiel.

Note remise le 10 mai 1994, acceptée le 14 juin 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- F. CHATELAIN, *Valeurs propres de matrices*, Masson, 1988.
- R. GLOWINSKI, Numerical methods for the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. In *Vistas in Applied Mathematics, Optimization Software*, New York, 1986, p. 57-95.
- R. GLOWINSKI et J. PÉRIAUX, Numerical methods for nonlinear problems in fluid dynamics. In *Proceeding of the International Seminar on Scientific Super-Computer*, Feb. 1987.
- C. GUILLOPÉ et J. C. SAUT, Résultat d'existence pour les fluides viscoélastiques à loi de comportement de type différentiel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 305, série I, 1987, p. 489-492.
- J. G. OLDROYD, On the formulation of rheological equations of states, *Proc. Roy. Soc., London A*, 200, 1950, p. 523-541.
- N. PHAN-THIEN et R. I. TANNER, A new constitutive equation derived from network theory, *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 2, 1977, p. 353-365.
- P. SARAMITO, Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoélastiques par éléments finis incompressibles et une méthode de directions alternées ; applications, *Thèse*, Institut national Polytechnique, Grenoble, 1990.
- P. SARAMITO, Numerical simulation of viscoelastic fluid flows using incompressible finite element method and a θ -method, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 28, 1994, p. 1-34.
- P. SARAMITO et J. M. PIAU, Flow characteristics of viscoelastic fluids in an abrupt contraction by using numerical modeling. under press, *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 1994.