



## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Olivier OZENDA**

Thèse dirigée par **Pierre SARAMITO**, D.R. CNRS  
et codirigée par **Guillaume CHAMBON**, D.R. IRSTEA

préparée au sein du **Laboratoire Laboratoire Jean Kuntzmann**  
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et**  
**technologies de l'information, Informatique**

### **Modélisation continue de la rhéologie des suspensions et de la migration**

### **Continuous modelisation of suspension rheology and migration processes**

Thèse soutenue publiquement le **1 avril 2019**,  
devant le jury composé de :

**Monsieur Sébastien Boyaval**

C.R. ENPC, (HDR), Laboratoire d'hydraulique Saint-Venant, Chatou,  
Rapporteur

**Monsieur François Peters**

M.C.F Univ. Nice Sophia Antipolis, (HDR), Inst. de physique de Nice,  
Rapporteur

**Monsieur Stéphane Labbé**

P.R. Univ. Grenoble Alpes, Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble  
Examineur

**Madame Élisabeth Guazzelli**

D.R. CNRS, Inst. univ. des systèmes thermiques industriels, Marseille,  
Examinatrice

**Monsieur Pierre Saramito**

D.R. CNRS, Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble,  
Directeur de thèse

**Monsieur Guillaume Chambon**

D.R. IRSTEA, UR Érosion torrentielle neige et avalanches, Grenoble,  
Directeur de thèse

**Monsieur Claude Smutek**

M.C.F Univ La Réunion, IPGP, Laboratoire géo-sciences Réunion,  
Invité







# Remerciements

Je remercie mon directeur Pierre Saramito d'avoir su me donner le goût de l'exploration du monde merveilleux du calcul numérique appliqué à la modélisation des fluides complexes. Son implication, ses conseils précieux ainsi que son enthousiasme ont guidé mes efforts tout au long de ce travail.

Je remercie mon codirecteur Guillaume Chambon d'avoir introduit des problématiques issues de la physique dans ma réflexion, élargissant mon approche orientée mathématiques. Son investissement et ses questions aussi fécondes que pertinentes ont été structurantes pour mes travaux.

Au delà des aspects purement techniques, le travail du doctorant sous-entend l'acquisition d'une certaine maturité vis à vis de sa spécialité et plus généralement des sciences, merci à tous les deux d'avoir orienté mes actions en ce sens.

Je remercie Sébastien Boyaval et François Peters d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Leur lecture attentive a permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit. En outre, je suis très honoré de l'intérêt porté à mes résultats. Merci également à Élisabeth Guazzelli et Stéphane Labbé d'avoir accepté de faire partie du jury.

Les discussions avec l'équipe *rhéologie des suspensions concentrées* de l'institut de physique de Nice ont été très profitables, je les en remercie.

Merci aussi à Claude Smutek qui fut aussi à l'origine de ce projet, Noé Bernabeu qui avait participé à l'encadrement de mon stage de M2 et Antoine Deharveng qui a mis en oeuvre une idée originale durant son stage de M2.

J'ai une pensée particulière pour le groupe de doctorants qui m'avait accueilli en 2014 ainsi que pour ceux avec qui j'ai partagé quelques moments de convivialité par la suite.

Je tiens aussi à rendre hommage à ceux qui m'ont formé, d'abord en classe préparatoire à Marseille puis Lyon et enfin à Grenoble, sans oublier mes camarades avec lesquels je partageais le banc dans l'amphi.

Une tranche de vie s'achève alors que de nouveaux horizons s'ouvrent. Je m'adresse enfin à tous ceux avec lesquels j'ai partagé autre chose que des sciences. Chaque route croisée est porteuse de sens et je remercie ceux qui m'ont permis de construire, à leur insu pour la plupart, les convictions qui m'ont conduit à mener à bien cette thèse.

J'ai enfin une pensée chaleureuse pour ceux qui m'ont fait confiance ou qui m'ont soutenu depuis plusieurs années.



# Résumé

Les suspensions qui sont des milieux continus hétérogènes composés d'une phase solide granulaire et d'une phase liquide, présentent de nombreuses applications aux sciences naturelles ou industrielles. La modélisation des phénomènes mis en jeu dans ces applications suggère d'étudier des cas très complexes alors que les cas les plus simples présentent des comportements non-triviaux qui ne sont pas parfaitement compris. C'est pourquoi nous proposons ici des avancées sur la modélisation de matériaux modèles, les suspensions de sphères dures mono-disperses. Nous revisitons d'abord la formalisation mathématique du lien entre les modèles continus diphasiques et les lois de conservation à l'échelle d'un grain en moyennant celles-ci sur des volumes élémentaires de référence. Ainsi, nous construisons un système de lois de conservation continues. Cependant, ce système ne peut être résolu numériquement sans l'adjonction de plusieurs hypothèses, nous choisissons alors de nous restreindre aux suspensions non-colloïdales dans un fluide newtonien. Ainsi, nous proposons un nouveau modèle rhéologique intégrant un tenseur de texture, une variable auxiliaire permettant de représenter la déformation du réseau de voisins de chaque particule. Cela nous permet de reproduire quantitativement deux effets mis en évidence par des expériences de laboratoire. Le premier concerne l'anisotropie que présente la micro-structure d'une suspension cisailée, mesurée par une fonction de distribution de paires moyenne. Le second est observé lors d'une inversion brutale de cisaillement, la viscosité apparente de la suspension baisse très rapidement avant de relaxer vers un état stationnaire. Ce premier modèle donne un lien au niveau continu entre l'évolution du profil de la fonction de distribution de paires moyenne et l'évolution d'une quantité macroscopique, la viscosité apparente. Cependant, il ne reproduit pas correctement l'évolution d'autres quantités macroscopiques comme les différences de contraintes normales. Afin de corriger cela, nous en proposons une extension. Ce nouveau modèle permet d'envisager la modélisation de phénomènes mettant en jeu les différences de contraintes normales et se déroulant sur des échelles de temps plus longues. Ainsi, nous ouvrons la perspective d'améliorer la prédiction des phénomènes de migration qui se traduisent par le fait que les particules ne suivent pas exactement les lignes de courant, par exemple celles-ci fuient les zones les plus cisillées. En effet, les différences de contraintes normales jouent un rôle important dans la dynamique de la phase granulaire. Cela suggère d'intégrer notre nouvelle rhéologie dans le système de lois de conservation que nous avons proposé. Nous transformons ensuite ce système en un problème intégrant deux vitesses, celle du mélange et celle de la phase granulaire. L'originalité de notre contribution réside dans l'introduction d'une contrainte unilatérale dans un modèle de suspension. Cela permet de modéliser au niveau continu le contact entre deux sphères dures qui ne peuvent pas s'inter-pénétrer. Nous obtenons un problème pouvant s'interpréter comme un couplage entre deux sous-systèmes. Le premier sous-système ressemble à un modèle de fluide visco-élastique, le second est un système compressible visqueux congestionné, comme ceux utilisés pour modéliser des mouvements de foule.

## Mots clefs

suspension, rhéologie, Navier-Stokes à deux vitesses, modélisation, migration





# Abstract

Suspensions which are heterogeneous continuous media composed by a solid granular phase and a liquid phase present many applications from natural and industrial sciences. Modelling the phenomenon involved in those applications suggests studying very complex cases whereas the simplest one present non trivial behaviour that are not perfectly understood. This is why we put forward some progresses in the understanding of a reference material, mono-disperse suspension of hard spheres. Firstly we compute averaged versions of conservation laws at the scale of the grain. Hence we get continuous quantities at the scale of an elementary reference volume and it allows us to revisit mathematical building of continuous biphasic models. Hence, we provide a system of continuous conservation laws. Nevertheless, we have to add several hypothesis to get a well posed mathematical problem from our system. With that mind, we choose to focus on non-colloidal suspensions with a Newtonian suspending fluid. Thus, we propose a new rheological model including a texture tensor which is an ancillary variable modelling the average deformation of the local cages formed by neighbouring particles. Hence, we can quantitatively reproduce two effects that have been experimentally measured. The first one is about the anisotropy of the microstructure in a sheared suspension, measured by the averaged pair distribution function. The second one is the evolution of apparent viscosity that drops brutally before relaxing to a steady state during a shear-reversal experiment. This first model provides a link between two continuous quantities, the averaged pair distribution function and the apparent viscosity. However, it reproduces badly the evolution of some macroscopic quantities, the normal stress differences. This is why we extend our first model, improving those bad predictions. On larger time scales, it has been observed that the particles do not follow strictly the flow lines, for instance, they leave sheared zones. This phenomenon is called migration. Our extended rheological model allows to enhance migration phenomenon predictions because normal stress differences play a crucial role in granular phase motion. In that mind, we integrate our new rheology in the system of conservation laws that we stated in the beginning, then, we process it into a new mathematical problem. We put forward a system including both a bulk velocity and a granular phase one. We introduce an unilateral constraint in order to model the inelastic contact interaction between two rigid spheres at the macroscopic level. It constitutes the originality of our proposal. Finally, we get a problem that interprets as two coupled sub-problems. The first one is like a visco-elastic fluid model and the second one is a compressible congested viscous system, like those used to model crowd motions.

## Keywords

suspension, rheology, two velocities Navier-Stokes, modelisation, migration



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Motivations . . . . .	9
1.2	État de l'art . . . . .	9
1.2.1	Panorama . . . . .	10
1.2.2	Modélisation discrète . . . . .	12
1.2.3	Modélisation continue . . . . .	15
1.3	Plan . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Modélisation continue des suspensions</b>	<b>19</b>
2.1	Modélisation discrète . . . . .	19
2.1.1	Formulation du problème . . . . .	19
2.1.2	Quelques outils techniques . . . . .	24
2.2	Outils permettant de construire un modèle continu . . . . .	24
2.2.1	Choix d'un noyau . . . . .	25
2.2.2	Fonctions d'état . . . . .	27
2.2.3	Moyennes . . . . .	28
2.3	Équations de conservation . . . . .	31
2.3.1	Conservation de la masse . . . . .	31
2.3.2	Conservation de la quantité de mouvement – première version . . . . .	31
2.3.3	Notations additionnelles . . . . .	33
2.3.4	Moments . . . . .	34
2.3.5	Forces à la surface des particules . . . . .	35
2.3.6	Cinétique particule par particule . . . . .	38
2.3.7	Conservation de la quantité de mouvement – deuxième version . . . . .	42
2.3.8	Terme d'inertie et variance de la vitesse . . . . .	43
2.3.9	Lois de conservation – version finale . . . . .	44
2.4	Suspensions newtoniennes à faible nombre de Stokes . . . . .	46
2.4.1	Suspensions stokésiennes diluées . . . . .	47
2.4.2	Suspensions à nombre de Reynolds nul pour une fraction volumique quelconque . . . . .	51
2.4.3	Vers des modèles plus généraux . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Inversion de Couette</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Mathematical model . . . . .	57

3.2.1	Rheological model . . . . .	57
3.2.2	Problem statement . . . . .	59
3.3	Stationary shear flows and microstructure anisotropy . . . . .	60
3.4	Time-dependent simple shear flows . . . . .	63
3.4.1	Shear startup, reversal and pause . . . . .	63
3.4.2	Comparison with experiments . . . . .	67
3.5	Discussion and conclusions . . . . .	69
3.6	Appendix A : Computation of the probability distribution function . . . . .	70
3.7	Appendix B : System of ODE for imposed stress . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Différences de contraintes normales</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Modélisation mathématique . . . . .	77
4.2.1	Équations constitutives . . . . .	77
4.2.2	Présentation du problème . . . . .	77
4.3	Cisaillement simple et inversion de cisaillement . . . . .	78
4.3.1	Problème réduit . . . . .	78
4.3.2	Solution explicite en régime stationnaire . . . . .	79
4.3.3	Expression des paramètres matériels en fonction de la fraction volumique . . . . .	80
4.3.4	Comparaisons quantitatives avec des expériences . . . . .	83
4.4	Conclusion . . . . .	86
4.5	Annexe : Identification des paramètres matériels . . . . .	87
4.5.1	Méthode numérique . . . . .	87
4.5.2	Étude de sensibilité . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Modèle à deux vitesses avec congestion</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Hypothèses de fermeture . . . . .	94
5.3	Formulation du problème . . . . .	96
5.3.1	Dérivation d'un problème couplé à partir de la proposition 2.46 . . . . .	97
5.3.2	Modification de $(\mathbf{P}_0)$ en un problème plus classique . . . . .	98
5.4	Migration dans un tuyau circulaire . . . . .	101
5.4.1	Lois de conservation dans le mélange . . . . .	101
5.4.2	Contrainte particulière . . . . .	102
5.4.3	Lois de conservation dans la phase particulière . . . . .	104
5.4.4	Présentation du problème réduit 1D . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>109</b>

## Table des notations

$\Omega$	ouvert borné contenant la suspension étudiée
$\Omega_f, \Omega_p$	phase fluide et phase granulaire, resp
$R$	dimension caractéristique de $\Omega$
$\mathbf{n}, \mathbf{n}_e$	normales à une surface
$r_p$	rayon d'une particule
$\Lambda = \frac{4\pi}{3r_p^3}$	volume d'une particule
$\langle \cdot \rangle, \langle \cdot \rangle_m$	moyennes du mélange
$\langle \cdot \rangle_p, \langle \cdot \rangle_s$	moyennes dans la phase granulaire
$\langle \cdot \rangle_f$	moyenne dans la phase fluide
$\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}$	vecteur rotation des particules et vitesse, resp
$\mathbf{w} = \langle \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}_p \rangle$	différence de vitesse entre le mélange et la phase granulaire
$\phi$	fraction volumique
$\dot{\gamma} = D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$	taux de déformation
$W(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2}$	tenseur de vorticité
$\mathbf{f}_l, \mathbf{f}_c$	interactions hydrodynamiques et interactions de contact, resp
$\mathbf{g}$	accélération de la pesanteur
$\rho_s, \rho_f$	masse volumique du fluide et des particules, resp
$Re, St$	nombre de Reynolds et de Stokes, resp
$\boldsymbol{\tau}_l, \boldsymbol{\tau}_c$	moment d'ordre un de $\mathbf{f}_l$ et $\mathbf{f}_c$ , resp
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur de contrainte de Cauchy
$\boldsymbol{\tau}_p$	tenseur de contrainte particulaire
$p_f, p_p, p_b, p_c$	pression fluide, particulaire, du mélange et de contact, resp
$\mathbf{b}_e, \boldsymbol{\gamma}_e$	tenseur de conformation et tenseur de texture, resp
$\dot{\gamma}$	taux de déformation (scalaire)
$\gamma(t) = \int_0^t  \dot{\gamma}(s)  ds$	déformation
$\theta_e$	angle de déplétion
$\phi_m$	fraction volumique maximale
$\psi = \frac{\phi}{\phi_m}$	fraction volumique réduite
$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}$	dérivée convectée supérieure
$\frac{\mathcal{D}_a}{\mathcal{D}t}$	dérivée de Gordon Schowalter de paramètre $a$
$\eta_0$	viscosité du fluide suspendant
$\eta_{app}$	viscosité apparente
$N_1, N_2$	différences de contraintes normales
$\eta, \eta_e, \delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$	paramètres physiques du modèle rhéologique présenté au chapitre 4
$\eta_p, \eta_n, \mathbf{Q}$	paramètres physiques du modèle SBM de <a href="#">Miller et Morris (2006)</a>
$U, Q, P, \Sigma_p$	grandeurs caractéristiques au chapitre 5
$0 \leq a \perp b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et } ab = 0$	inéquation de type contact unilatéral



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Motivations

L'étude de nombreux phénomènes géophysiques fait apparaître une grande variété de problèmes de mécanique des fluides. Certains sont dominés par les forces internes aux matériaux qui les composent. C'est le cas par exemple des mouvements des masses de glace ou des coulées de lave. D'autres, tels que les mouvements des masses d'air dans l'atmosphère ou les phénomènes de déferlement, ont un caractère plus inertiel. Les sujets d'étude que nous venons de citer présentent des régimes d'écoulement très variables mais ont en commun le fait d'être modélisés usuellement par des milieux continus homogènes. Cela étant, les écoulements diphasiques sont aussi très bien représentés dans notre environnement. Certains sont violents comme les avalanches en aérosol ou les lahars. D'autres sont moins spectaculaires et plus quotidiens comme les mouvements des nuages de particules fines. D'autres, enfin, sont essentiels à la vie comme la circulation du sang, qui est une suspension de particules déformables. Des écoulements de matériaux complexes composés d'un fluide transportant des particules sont aussi au cœur de nombreux procédés industriels, par exemple la confection de matériaux composites. Issus de la nécessité de renforcer des matières plastiques pour les utiliser dans des domaines exigeants comme l'aéronautique ou l'automobile, ces matériaux trouvent actuellement de nouvelles applications car ils constituent aussi un procédé de fabrication de produits recyclés. La volonté d'améliorer la compréhension des écoulements de lave torrentielle en montagne et de lahars sur des édifices volcaniques, qui fut notre point de départ nous a conduit à nous focaliser sur certains problèmes particuliers. fut le point de départ de ce travail. Chaque année, dans les Alpes notamment, ces phénomènes mettent en jeu le déplacement d'une grande quantité de sédiments, comme on peut le voir sur la figure 1.1. À l'instar de toutes les coulées de débris, la granulométrie des matériaux transportés est très variable, de l'ordre du micron pour les particules d'argile les plus fines à celui du mètre pour les plus gros blocs. Ce type de problème est proche de celui des écoulements de béton. Une manière de se ramener à un matériau modèle consiste à considérer une suspension mono-disperse dans un fluide à seuil, voir par exemple les expériences d'[Ovarlez et al. \(2015\)](#) ou de [Dagois-Bohy et al. \(2015\)](#). Cela étant, la modélisation mathématique du cas plus simple où le fluide suspendant est newtonien présente encore de nombreuses zones d'ombre. C'est pourquoi nous allons nous consacrer par la suite à la modélisation de suspensions non-colloïdales de sphères dures dans un fluide newtonien, en d'autres termes, nous étudierons des particules dont la diamètre est supérieur à  $10^{-5} m$ . La taille de ces particules est suffisante pour que les interactions responsables du mouvement brownien soient négligées.

### 1.2 État de l'art

En dépit de l'apparente simplicité de ce système, les écoulements de suspensions non-colloïdales donnent lieu à des effets non-triviaux. L'article récent de [Guazzelli et Pouliquen \(2018\)](#) réalise une synthèse des différents phénomènes observés ainsi que de leur modélisation. Depuis [Einstein \(1906\)](#), on sait que la viscosité apparente d'une suspension augmente avec de la proportion en volume de la phase granulaire par rapport au mélange. À noter que cette proportion est appelée fraction volumique. Cette première approche théorique ne s'appliquait



FIGURE 1.1 : Lave torrentielle ayant coulé en 2009 le dans le briançonnais, son volume est d'environ  $5000 m^3$ . L'image est extraite de (Cossart, 2014).

qu'au cas très dilué et a été complétée pour les cas plus concentrés par la loi empirique de [Krieger et Dougherty \(1959\)](#). Suite aux travaux de [Gadala-Maria et Acrivos \(1980\)](#), l'observation d'effets plus complexes tels que la présence de contraintes normales, ou la migration des particules des zones les plus cisailées vers les zones les moins cisailées, a conduit à la création de modélisations diphasiques. L'effet du cisaillement sur la phase granulaire d'une suspension est illustré par la figure 1.2, tirée de ([Guazzelli et Pouliquen, 2018](#)). Une sphère seule dans un fluide est soumise uniquement à sa trainée, à son poids et à la poussée d'archimède. La figure 1.2 montre que les particules d'une suspension sont aussi soumises à des forces inter-particulaires.

Enfin, l'effet des contacts entre les particules est étudié selon deux axes. Les suspensions très concentrées ont un comportement granulaire, c'est-à-dire que celles-ci se comportent comme un fluide à seuil dont le seuil dépend de la pression particulaire, voir ([Boyer et al., 2011b](#)). Des effets transitoires courts ont été observés même dans des cas plus dilués par [Blanc et al. \(2011a\)](#), une partie de ce travail s'attachera à modéliser ces phénomènes.

### 1.2.1 Panorama

Lorsque l'on aborde le problème de modéliser et de simuler numériquement un écoulement pour une suspension de sphères rigides, l'idée la plus immédiate est d'effectuer des simulations directes, c'est-à-dire de représenter individuellement chaque particule en interaction avec le fluide suspendant. Ce choix est celui qui nécessite le moins d'hypothèses de modélisation. En régime dilué, les particules sont le plus souvent éloignées les unes des autres. Chaque particule modifie les valeurs de la vitesse et de la pression dans le fluide, et perturbe donc la trajectoire des autres particules. On peut interpréter ce phénomène comme une interaction hydrodynamique à longue portée entre les particules. À l'heure actuelle, des calculs numériques directs de cette interaction sont possibles, voir par exemple la méthode de [Gallier et al. \(2014a\)](#). En revanche, lorsque une majorité de particules sont très proches, c'est-à-dire en régime plus concentré, on doit tenir compte d'interactions hydrodynamiques à faible portée ou d'interactions de contact. Ces deux notions posent des difficultés particulières. Si la force qu'une boule applique sur une autre est de type hydrodynamique, c'est-à-dire que celles-ci sont séparées par une couche mince de fluide alors le calcul de l'interaction nécessite celui de la vitesse du fluide entre les deux particules et donc l'utilisation d'un maillage très fin. Pour diminuer la précision du maillage, il est possible d'utiliser des modèles de lubrification obtenus par analyse asymptotique, comme le modèle de [Maury \(2007\)](#). Si les deux particules se touchent, alors on doit imposer une interaction de contact. La composante normale de celle-ci permet d'assurer une condition de non-pénétration et la composante tangentielle modélise la force de friction qu'elles exercent l'une sur l'autre.



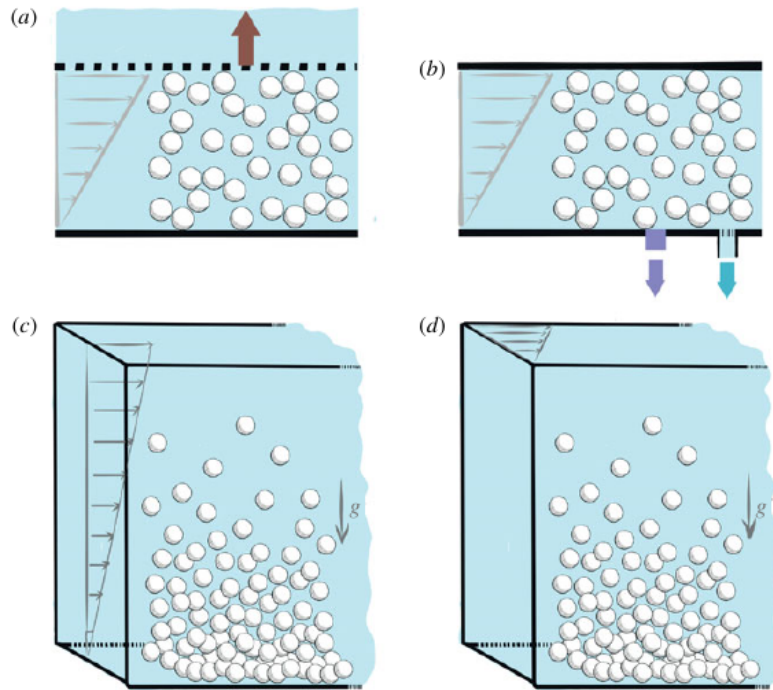


FIGURE 1.2 : La figure (a) décrit une méthode de mesure de la pression que les particules appliquent sur la grille. La figure (b) décrit une méthode de mesure de la pression de la phase fluide. Les figures (c) et (d) représentent des expériences de resuspension, mettant en évidence les forces d'interaction de la phase particulaire dans deux directions différentes. Cette figure est extraite de (Guazzelli et Pouliquen, 2018)

Si la composante normale de l'interaction de contact est modélisée comme une force élastique, on parle alors de d'un contact hertzien. Si la contrainte unilatérale est modélisée comme une condition de non-pénétration, on parle alors de contact inélastique. La deuxième approche paraît plus cohérente avec un modèle de type sphère dures pour les particules mais celle-ci nécessite l'utilisation de notions mathématiques plus avancées que la première, du fait de son caractère non-régulier. En pratique, le modèle de contact hertzien est le seul à avoir permis pour l'instant de réaliser des expériences numériques dans le domaine des suspensions. Les modélisations discrètes se placent donc dans le cadre de la mécanique à  $N$  corps. Mathématiquement on peut exprimer de tels systèmes en utilisant l'équation de *Smoluchowski*. Cette équation a pour solution une loi de probabilité  $P_N$  définie sur l'ensemble des configurations possibles pour les  $N$  particules (Morris, 2009). Dans le cadre de l'étude des suspensions, il peut être plus pertinent de ne conserver que deux marginales de  $P_N$ ,  $P_1$  correspondant à l'intégration de  $P_N$  par rapport à toutes les configurations possibles pour  $N - 1$  particules et  $P_2$  correspondant à l'intégration de  $P_N$  par rapport à toutes les configurations possibles pour  $N - 2$  particules. Ainsi, la probabilité que le centre de masse d'une particule  $b$  se trouve à la position  $\mathbf{y}$  sachant que le centre de masse de la particule  $a$  se trouve à la position  $\mathbf{x}$  s'écrit  $P_{2|1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = P_2(\mathbf{y}, \mathbf{x})/P_1(\mathbf{y})$ . Certains des modèles décrits par la suite n'intègrent que la fonction de distribution  $P_1$  et la fonction de distribution de paires  $P_{2|1}$ , voir par exemple (Brady et Morris, 1997) et (Lionberger et Russel, 1997) pour plus de détails. Cette fonction de distribution de paires peut permettre de définir deux variables d'état macroscopiques : la fraction volumique  $\psi$  correspondant à une moyenne de  $P_1$  sur un volume élémentaire de référence et la fonction de distribution de paires moyenne  $P_{1|1}$  correspondant à une moyenne de  $P_{2|1}$  par rapport à la première variable  $\mathbf{y}$  sur un volume élémentaire de référence. Cela nous amène au deuxième point de vue qui consiste à considérer des modélisations continues, c'est-à-dire de penser une suspension comme un milieu continu diphasique, comportant une phase granulaire et une phase fluide. Les grandeurs calculées : vitesses, fraction volumique ou contraintes sont macroscopiques. Elles correspondent d'une part aux grandeurs qui sont mesurées lors d'expériences en laboratoire et d'autre part à des moyennes statistiques sur une des deux phases ou sur le mélange. Ces modélisations impliquent de faire des hypothèses assez fortes, c'est pourquoi il est important de garder à l'esprit que la modification de la microstructure d'une suspension et son compor-

tement macroscopique sont des phénomènes couplés, voir (Morris, 2009). Ainsi, il est tout à fait pertinent d'introduire une modélisation de l'anisotropie de la microstructure. Cette anisotropie peut être modélisée de manière quantitative par un tenseur d'ordre deux appelé tenseur de texture. Cette variable ne correspond pas à une grandeur macroscopique proprement dit mais doit être interprétée comme la déformation d'une micro-structure, nous donnerons plus de détails au chapitre 3. Nous nous attacherons dans ce document à construire un nouveau modèle continu pour les suspensions de sphères dures. Notre réflexion sera orientée selon trois axes. Tout d'abord nous chercherons comment effectuer un lien rigoureux entre les grandeurs macroscopiques, exprimées mathématiquement par des moyennes statistiques sur des variables microscopiques, et ces variables microscopiques et ainsi obtenir un système de lois de conservation macroscopique. Ensuite, nous discuterons de l'utilisation de la description continue de la microstructure par le tenseur de texture pour déduire des équations de fermeture complétant le système évoqué au premier axe. Enfin, nous verrons quelle structure mathématique donner au système issu des deux premiers points afin d'en garantir une résolution suffisamment précise pour juger de la validité des nombreuses hypothèses que nous aurons posées. Avant de développer cela, nous présenterons un état de l'art des différentes modélisations discrètes ou continues.

### 1.2.2 Modélisation discrète

L'idée générale poursuivie dans ce type de modélisation est de considérer une suspension comme un problème de mécanique à  $N$  corps où  $N$  représente le nombre total de particules. Les premières simulations de Tezduyar et al. (1992) et Hu et al. (1992), qui présentaient le mouvement de deux particules dans un fluide, avaient permis de calculer le mouvement relatif de deux particules chutant dans un fluide newtonien, *drafting, kissing and tumbling* observé par exemple par Fortes et al. (1987). Ce premier type de méthode a donné des résultats à plus grande échelle quelques années plus tard (Johnson et Tezduyar, 1999). D'autre part, les algorithmes ont progressé en ce qui concerne le traitement de la phase fluide avec les méthodes Arbitrary Lagrangian Eulerian, voir (Hu, 1996) et (Maury et Glowinski, 1997). Le nombre de particules simulées a été ainsi porté à cent. Ces méthodes seront développées par exemple pour étudier le comportement macroscopiques de suspensions de particules rigides (Lefebvre et Maury, 2005) ou pour des problèmes de type interaction fluide-structure (Bost et al., 2010). Enfin, des représentations plus efficaces des particules sont entrées en action, par exemple la méthode des domaines fictifs (Glowinski et al., 1999) permettant de déplacer les particules sans devoir modifier le maillage du domaine de calcul. Le chapitre deux du livre (Prosperetti et Tryggvason, 2007), les articles (Haeri et Shrimpton, 2012) et (Wachs et al., 2015) donnent un panorama de ce type de méthode. Dans le cas d'un fluide suspendant complexe, il n'y a pas de modèle classique concernant l'interaction entre une particule et le fluide, on peut citer (Wachs et Frigaard, 2016) qui traite l'exemple de la boule dans un fluide de Bingham. En revanche, l'interaction entre un fluide newtonien et une structure a été abondamment étudiée. Ainsi, des méthodes de calcul plus rapides ont pu être développées. Ces méthodes remplacent une résolution numérique dans la phase fluide à une certaine échelle par le calcul explicite d'une interaction hydrodynamique à deux solides. Certaines méthodes prévoient uniquement le calcul explicite des interactions hydrodynamiques de courte portée. D'autres prévoient le calcul d'interactions hydrodynamiques à courte portée et longue portée. Ces approches présentent des hypothèses de modélisation plus fortes mais permettent aussi de simuler un nombre plus grand de particules. D'autre part, lorsque la suspension modélisée est concentrée, l'interaction de contact entre les particules doit être intégrée au calcul numérique.

Nous allons présenter une collection de modèles de simulation directe classés en trois catégories, les modèles de type dynamique stokésienne s'appliquant à des particules en interaction hydrodynamiques dans un écoulement visqueux non-inertiel, les modèles implémentant une interaction de contact régulière, de type hertzien et ceux de type Coulomb implémentant une interaction de contact singulière. À noter l'article de synthèse récent (Maxey, 2017) développant un panorama de différentes méthodes évoquées dans cette sous-section.

#### Dynamique stokésienne

La compréhension de force de trainée d'une sphère dans un fluide newtonien en régime non-inertiel, la compréhension des interactions hydrodynamiques entre deux sphères (Goldman et al., 1966), (Batchelor et Green, 1972a) ainsi que la modélisation de la force responsable du mouvement brownien (Batchelor, 1976),

ont donné lieu à la modélisation d'une suspension comme un ensemble de particules en interaction hydrodynamique. Ainsi, la phase particulaire est modélisée par un système de  $N$  corps en interaction. Les calculs des interactions hydrodynamiques à longue portée nécessitent celui de la vitesse du fluide. En réalisant ce calcul par intégration d'une fonction de Green, [Bossis et Brady \(1984\)](#) ont développé des simulations numériques de particules soumises à des interactions hydrodynamiques à longue portée, voir aussi ([O'Brien, 1979](#)), et ([Brady et Bossis, 1988](#)) pour plus de détails. Les simulations de type Dynamique Stokésienne ont ensuite été utilisées afin de construire des modèles macroscopiques pour les suspensions, notamment les premières versions du *suspension balance model* ([Nott et Brady, 1994](#)), ([Mills et Snabre, 1995](#)) ou ([Morris et Boulay, 1999](#)) ou plus généralement pour prédire la rhéologie de suspensions non-colloïdales à partir d'une étude de la microstructure ([Brady et Morris, 1997](#)). La dynamique stokésienne avait à cette occasion prévu une anisotropie de la fonction de distribution de paires moyenne dans des suspensions non-colloïdales qui a pu depuis être observée expérimentalement par [Blanc et al. \(2013\)](#). Ensuite, les prédictions numériques de la dynamique stokésienne ont permis le calcul de contraintes normales liées à la présence d'une phase granulaire dispersée dans un fluide newtonien. L'intégration des interactions de lubrification a été effectuée plus tard, lorsque la prise en compte de la rugosité des particules dans le calcul de la fonction de distribution de paires est apparue comme nécessaire ([Rampall et al., 1997](#)) et ([Wilson et Davis, 2000](#)). Ainsi des interactions de lubrification ont été intégrées par [Sierou et Brady \(2001\)](#) dans l'implémentation d'une méthode de résolution accélérée. Les phénomènes d'irréversibilité créés par une phase granulaire non-colloïdale ont alors été simulés ([Sierou et Brady, 2002](#)). Les premières méthodes numériques de type dynamique stokésienne n'étaient pas conçues pour simuler un écoulement en interaction avec une paroi et à fortiori un écoulement viscosimétrique. Une évolution de celle-ci a permis de simuler le comportement d'une suspension lors d'un écoulement de Poiseuille, voir ([Swan et Brady, 2007](#)) et ([Swan et Brady, 2011](#)). Depuis une quinzaine d'années, les simulations de type dynamique stokésienne ont été plus fréquemment appliquées aux suspensions colloïdales, traitant aussi le cas polydisperse ([Wang et Brady, 2016](#)). On peut aussi noter la variante ([Pan et al., 2009](#)). Les méthodes particulières appliquées aux suspensions non-colloïdales intègrent à présent d'autres phénomènes physiques tels que la présence de termes d'inertie dans la phase liquide d'une part et la présence de forces de contacts solides d'autre part.

### Modèles intégrant un modèle de dynamique des contacts réguliers

Nous allons dans cette partie évoquer plusieurs familles de modèles. Celles-ci ont en commun d'intégrer une interaction de contact issue de modèles granulaires secs. Ces modèles présentent une force d'interaction de contact non singulière, voir ([Cundall et Strack, 1979](#)) et ([Luding, 2008](#)), contrairement aux méthodes de type *non smooth contact dynamics* que nous évoquerons au paragraphe suivant. [Cambou et al. \(2012, chap. 4\)](#) donne un comparatif de différentes méthodes de modélisation numérique des interactions de contact dans un milieu granulaire.

La première est un mélange d'un modèle régulier et de dynamique des contacts et d'une version simplifiée de la dynamique stokésienne développée par [Ball et Melrose \(1997\)](#) qui ne modélise que des interactions à deux corps. Ce modèle présenté par [Mari et al. \(2014\)](#) a permis, entre autres, la simulation de phénomènes observés dans des suspensions très concentrées ([Mari et al., 2015](#)), ou dans des écoulements élongationnels ([Seto et al., 2017](#)), ainsi que la simulation du comportement d'une suspension lors d'une inversion de cisaillement ([Chacko et al., 2018](#)). Les différences de contrainte normale ont aussi été simulées récemment par [Seto et Giusteri \(2018\)](#).

La deuxième est assez proche de la dynamique stokésienne, cependant, elle s'en différencie par la possibilité de rajouter des effets inertiels dans des simulations de suspensions de sphères non-colloïdales en interaction hydrodynamique au cas inertiel. La *force coupling method*, développée à l'origine pour des applications de type aérosol ([Maxey et al., 1997](#)), a été adaptée aux suspensions par [Maxey et Patel \(2001\)](#) et [Lomholt et Maxey \(2003\)](#). L'intégration d'une interaction de lubrification, a permis de développer le modèle ([Yeo et Maxey, 2010b](#)) appliqué à un écoulement de Poiseuille par [Yeo et Maxey \(2011\)](#) et à un écoulement de Couette par [Yeo et Maxey \(2010a\)](#). Ensuite, l'ajout d'une interaction de contact régulière a permis de réaliser la simulation d'une inversion de cisaillement ([Peters et al., 2016](#)).

La troisième méthode a été développée par [Gallier et al. \(2014a\)](#). Cette méthode implémente une version

améliorée de la méthode des domaines fictifs (Patankar et al., 2000). Le domaine occupé par une particule doit être en translation-rotation solide. Cela est imposé explicitement au lieu d’être imposé par un multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte de non-déformation comme dans la version originale de la méthode des domaines fictifs (Glowinski et al., 1999). En associant à cette méthode une interaction de contact régulière, il a été possible de simuler les effets de la rugosité des particules sur la rhéologie des suspensions (Gallier et al., 2014c) et de simuler des phénomènes de migration sous écoulement (Gallier et al., 2016). Nous renvoyons à l’article récent de Gallier et al. (2018) pour une comparaison entre cette troisième méthode et la première méthode exposée, pour des suspensions colloïdales bidisperses. Il est important de préciser que cette comparaison est effectuée avec le même modèle pour les contacts, la seule différence réside dans la résolution des interactions hydrodynamiques à longue portée.

On peut remarquer que la troisième méthode ne peut résoudre correctement la vitesse et la pression dans la phase fluide lorsque les particules sont trop proches, c’est-à-dire à une distance inférieure à la taille d’une maille. Cependant les phénomènes impliqués comme le drainage par exemple, ont des effets importants et sont modélisés par une interaction hydrodynamique. Nous allons voir comment l’utilisation d’interactions de contact non régulières permet d’affiner la modélisation de ces phénomènes. On notera cependant que l’approche plus technique que nous présentons au paragraphe suivant n’a pas encore été développée sur un large champ d’applications.

### Modèles intégrant un modèle de dynamique des contacts non-régulier

L’interaction entre deux solides se modélise de manière classique par une force de type Coulomb. Le problème d’intégrer cette interaction à des milieux granulaires secs est assez technique car il nécessite l’intégration d’une contrainte unilatérale (Moreau, 1985) à un système d’équations différentielles (Moreau, 1988). Les problèmes de type contrainte unilatérale avaient trouvé une formulation mathématique rigoureuse dans le contexte de la mécanique des milieux continus (Duvaut et Lions, 1972), puis ils ont été intergrés dans des systèmes dynamiques discrets faisant appel à des équations différentielles ordinaires non régulières (Paoli et Schatzman, 1993), voir l’article de synthèse (Stewart, 2000). Des méthodes numériques de dynamique des contacts non régulières ont alors vu le jour (Moreau, 1993). L’article (Dubois et al., 2018) donne un panorama du développement de ces méthodes. Bien souvent, celles-ci sont appliquées au cas d’un contact de type granulaire sec. Nous nous focalisons sur des applications au cas où le contact est immergé dans un fluide visqueux. L’algorithme de dynamique des contacts non régulière (Maury, 2006) couplé avec une méthode de pénalisation a permis d’effectuer une simulation de sphères en suspension dans un fluide newtonien (Lefebvre, 2007a) ou (Verdon et al., 2012). Lorsque le nombre de particules devient très grand, ce modèle tend vers un modèle macroscopique voir (Lefebvre, 2007b), (Lefebvre-Lepot et Maury, 2011). La dynamique des mouvements de foule, qui peut être vue comme un phénomène granulaire (Faure et Maury, 2015), en est une première application (Maury et al., 2010). Plus généralement on peut voir ce problème comme une limite de fluide compressible congestionné, voir (Bresch et al., 2014) et (Perrin, 2016). Nous reviendrons plus tard sur l’utilisation de ce résultat récent dans la construction d’un modèle continu de suspensions.

À la frontière entre les modèles discrets et les modèles continus on peut citer les simulations de type Lattice Boltzmann. Nous renvoyons à la sous-section 4.2 de (Maxey, 2017) pour plus de détails.

L’utilisation de simulations discrètes intégrant des modèles de contact réguliers a permis de mettre en évidence des liens entre la rhéologie des suspensions et leur microstructure. En particulier l’anisotropie de la microstructure en cisaillement simple entraîne la présence de contraintes normales et d’effets transitoires rapides. Certains modèles sont issus d’hypothèses plus fortes que d’autres et on peut se demander quel est l’effet de ces hypothèses. Des comparaisons ont été effectuées récemment pour les interactions à longue portée par Gallier et al. (2018) mais celles-ci restent à faire pour les interactions de contact, ceci étant probablement dû aux difficultés de résolution posées par les modèles non-réguliers. Pour contourner cette difficulté il serait envisageable d’intégrer des modélisations macroscopiques non-régulières de l’interaction de contact à un modèle continu capable de reproduire l’anisotropie de la microstructure observée en cisaillement simple par exemple. En outre l’utilisation de modèles continus permet d’effectuer des simulations à plus grande échelle car le nombre de particules discrètes simulées est de l’ordre de  $10^3$ . Les modélisations discrètes permettent donc d’observer uniquement des effets à l’échelle de quelques volumes élémentaires de référence.

### 1.2.3 Modélisation continue

Lorsqu'on se pose le problème de la modélisation d'une suspension comme un milieu continu, on fait face à des phénomènes se produisant à des échelles très diverses. La déformation du réseau des voisins d'un grain a des effets macroscopiques en temps court. Sur des échelles de temps ou de déformation suffisamment longues pour que les réarrangements microscopiques soient en régime stationnaire, les suspensions montrent tout de même des comportements non newtoniens très marqués. Enfin sur des échelles de temps plus longues, les particules migrent dans le fluide. Nous présentons ces différents sujets d'étude en les regroupant en deux paragraphes. Le premier traite de la rhéologie des suspensions, ce qui correspond aux phénomènes observés aux deux échelles de temps les plus courtes. Le deuxième traite de la modélisation des suspensions comme un milieu diphasique, cela permettra de couvrir les trois échelles de temps et d'espace mentionnées.

#### Rhéologie

La viscosité apparente d'une suspension est un sujet d'étude depuis plus d'un siècle. Pour les suspensions très diluées, on doit des résultats théoriques pour un fluide suspendant newtonien à [Einstein \(1906\)](#) et [Batchelor et Green \(1972b\)](#) donnant un développement asymptotique de la viscosité apparente d'une suspension respectivement à l'ordre un puis à l'ordre deux. Les résultats concernant des régimes plus concentrés sont plus empiriques. Il a été d'abord observé que la viscosité apparente d'une suspension diverge vers l'infini lorsque sa fraction volumique tend vers une valeur maximale. La loi de Maron-Pierce ([Maron et Pierce, 1956](#)) modélise ce phénomène par une divergence quadratique. Plus tard, [Krieger \(1972\)](#) propose une loi pour la viscosité apparente d'une suspension très proche de celle de [Maron et Pierce \(1956\)](#) mais dont le développement de Taylor en régime très dilué correspond à celui proposé par [Einstein \(1906\)](#). Une autre variante est aussi proposée dans ([Morris et Boulay, 1999](#)). Mais les suspensions dans un fluide newtonien ne sont pas simplement des fluides newtoniens à viscosité variable, la présence de particules induit celle de contraintes normales proportionnelles au taux de cisaillement. Celles-ci ont été observées pour la première fois par [Gadala-Maria et Acrivos \(1980\)](#). Ensuite, [Nott et Brady \(1994\)](#) a intégré celles-ci à la première version du *suspension balance model*, un modèle continu diphasique fondé sur des versions moyennées des lois de conservation. La compréhension de ces contraintes normales a fait l'objet d'études théoriques ([Brady et Morris, 1997](#)) et de mesures expérimentales ([Zarraga et al., 2000](#)), ([Singh et Nott, 2003](#)) ou bien plus tard ([Couturier et al., 2011](#)) et ([Dbouk et al., 2013b](#)). Ainsi l'article ([Miller et Morris, 2006](#)) donne une modélisation de la rhéologie des suspensions semi-concentrées en cisaillement simple. Outre le fait que la formulation donnée par [Miller et Morris \(2006\)](#) ne peut s'appliquer qu'à des écoulements viscosimétriques, deux effets ne sont pas modélisés.

Tout d'abord, lorsque l'on s'approche de la fraction volumique maximale, des effets granulaires impliquant un seuil dépendant de la pression apparaissent, voir par exemple ([Boyer et al., 2011a](#)) qui propose une variante de la rhéologie granulaire  $\mu(I)$  ([Jop et al., 2006](#)) pour prédire le comportement d'une suspension très concentrée. Ces lois empiriques ont pu être comparées à des résultats théoriques issus d'une approche de type micro-macro ([DeGiuli et al., 2015](#)). D'autre part, ces phénomènes granulaires peuvent aussi être interprétés comme un rhéo-épaississement brutal ([Wyart et Cates, 2014](#)). L'article ([Lecampion et Garagash, 2014](#)) intègre ces termes granulaires au *suspension balance model*.

Ensuite, lors d'une inversion de cisaillement, une suspension présente une baisse de la viscosité apparente suivie d'une relaxation vers un état stationnaire, voir ([Gadala-Maria et Acrivos, 1980](#)), ([Narumi et al., 2002](#)), ([Kolli et al., 2002](#)) ou ([Blanc et al., 2011a](#)). Ce phénomène peut être modélisé à l'aide d'un tenseur de texture, certains modèles font aussi intervenir un tenseur d'ordre quatre ([Phan-Thien, 1995](#)), d'autres présentent un nombre de paramètres ajustables très important ([Goddard, 2006](#)). L'article ([Stickel et al., 2006](#)) donne un lien explicite entre ce tenseur de texture et l'anisotropie de la microstructure. Nous reviendrons sur ce sujet plus tard, à la lumière de mesures expérimentales de la fonction de distribution de paires ([Blanc et al., 2013](#)).

Les modèles à tenseur de texture présentent l'intérêt de produire des contraintes exprimées indépendamment de la géométrie de l'écoulement, ce qui n'est pas le cas de ceux proposés par [Miller et Morris \(2006\)](#) ou [Lecampion et Garagash \(2014\)](#). En outre, la modélisation explicite de la microstructure qu'il proposent permet

à elle seule de reproduire des effets en temps courts. Cela étant, aucun des modèles à tenseur de texture cités ici ne présente de comparaison convaincante avec des données expérimentales et aucun ne présente de modélisation explicite macroscopique des effets granulaires.

## Milieu diphasique

Lorsque l'on met en mouvement une suspension de sphères dures par exemple dans un rhéomètre de Couette, on peut observer une évolution de la distribution de particules. Plus précisément, un échantillon présentant une fraction volumique uniforme au repos présentera des variations spatiales importantes de fraction volumique après avoir été mis en mouvement, voir (Gadala-Maria et Acrivos, 1980) ou (Lyon et Leal, 1998). Cela nous amène à ne plus considérer une suspension uniquement comme un fluide complexe homogène mais aussi comme un milieu diphasique. Dans ce contexte, il apparaît comme tout à fait pertinent d'étudier le mouvement relatif d'une phase par rapport à l'autre ainsi que les interactions qui les relient. Ce sujet très vaste peut être décrit selon quatre thématiques :

Un premier axe consiste à étudier les suspensions comme un milieu continu incompressible aux propriétés physiques hétérogènes. Ce point de vue a été utilisé pour simuler numériquement des phénomènes de migration sous écoulement lorsque les densités des sphères et du fluide sont proches, voire égales. Les problèmes mathématiques posés se présentent sous la forme d'un système de type Navier-Stokes incompressible à viscosité variable couplé à une équation de réaction-advection-diffusion. Aux premiers modèles de flux diffusifs (Leighton et Acrivos, 1987) et (Phillips et al., 1992) succède une famille de problèmes continus issus du *suspension balance model* (Nott et Brady, 1994). On peut citer par exemple (Mills et Snabre, 1995), (Fang et al., 2002), (Miller et Morris, 2006) ou (Ramachandran et Leighton, 2008). Ainsi, des simulations numériques ont pu être effectuées par exemple dans le cas d'un écoulement de Poiseuille (Dbouk et al., 2013a) ou autour d'un obstacle (Dbouk, 2016). D'autre part, un terme de seuil granulaire a été rajouté par (Lecampion et Garagash, 2014).

Un deuxième axe vise à dériver des lois de conservation sur des grandeurs moyennées à partir des conservations de la masse et de la quantité de mouvement à l'intérieur de la phase fluide et de la phase particulaire, voir par exemple (Zhang et Prosperetti, 1994), (Jackson, 1997) ou (Jackson, 2000). Ces méthodes construites avec des arguments de physique statistique (Irving et Kirkwood, 1950) avaient été appliquées aux écoulements diphasiques depuis longtemps (Anderson et Jackson, 1967). Celles-ci ont été reliées à la dynamique stokésienne et aux modèles de flux diffusifs par Nott et Brady (1994). Etant à l'origine d'une majorité des modèles mentionnés ci-dessus, cette approche a représenté une grande avancée. Cela étant, celle-ci ne traite pas de manière très rigoureuse la moyenne des forces internes à la phase particulaire, voir (Lhuillier, 2009) et (Nott et al., 2011).

Un troisième axe s'attache à appliquer les équations moyennées mentionnées ci-dessus au cas où la phase granulaire est plus dense que la phase liquide, c'est-à-dire que l'on cherche à modéliser par exemple un transport de sédiments dans de l'eau ou une avalanche sous-marine. Dans ce cas, la phase granulaire est proche de la compaction maximale, elle constitue un lit fluidisé. Le livre (Jackson, 2000) donne un fondement théorique à la modélisation de ce type d'écoulements. Une fermeture développée par Ouriemi et al. (2009) a permis le développement du modèle de transport de sédiments (Chauchat et Médale, 2010). Parallèlement à cela des applications géophysiques ont motivé la dérivation de systèmes moyennés dans l'épaisseur. Un premier modèle moyenné issu de (Jackson, 2000) est dérivé dans (Bouchut et al., 2015), celui-ci suppose une phase granulaire incompressible alors que celle-ci est dilatante, voir (Bouchut et al., 2016a). L'interaction entre le lit fluidisé et la zone dépourvue de particules peut aussi être modélisée par un système de type *saint venant exner* (Fernández-Nieto et al., 2017).

Un quatrième axe a vu le jour plus récemment. La phase granulaire d'une suspension peut être ici vue comme un milieu continu compressible congestionné. Ce type d'approche a été développée pour modéliser le trafic routier ou les mouvements de foule (Faure et Maury, 2015). Le cadre théorique exposé dans (Bresch et al., 2014) ouvre la voie à une modélisation continue du temps de latence impliqué dans les phénomènes de contacts visqueux, voir Bresch et al. (2018), qui expriment ce temps de latence comme l'évolution d'un paramètre scalaire. Les phénomènes physiques mis en jeu étant les mêmes, il est tout à fait raisonnable d'envisager un

lien entre ce paramètre de latence et le tenseur de texture que nous introduirons au chapitre 3.

L'idée de modéliser la phase granulaire d'une suspension comme un fluide compressible congestionné paraît très porteuse. En effet, elle permet entre autres d'introduire des formulations faisant appel à des outils mathématiques récents. Ces nouvelles formulations peuvent ouvrir des angles d'attaque différents face aux nombreuses difficultés que pose la résolution des systèmes continus proposés actuellement, du fait de leur complexité. La réalisation de cette idée nécessite cependant que des liens entre les trois premières approches citées et les modèles congestionnés soient réalisés rigoureusement. Il reste beaucoup à faire en la matière.

## 1.3 Plan

Parmi les différentes pistes de réflexion mentionnées à la section 1.2, nous nous attacherons dans ce document à proposer un nouveau modèle rhéologique à tenseur de texture ne traitant pas explicitement les termes de friction mais permettant de reproduire quantitativement l'anisotropie de la microstructure ainsi que ses effets macroscopiques. Ce modèle rhéologique sera intégré dans un système diphasique de lois de conservation. Nous donnerons une construction rigoureuse de ce système avant d'en proposer une fermeture comprenant un sous-système de type fluide compressible congestionné. Nous obtiendrons un problème mathématique très différent de ceux issus du *suspension balance model* en dépit du fait que notre modèle partagera avec ceux-ci certaines hypothèses de fermeture. Les chapitres 2, 3, 4 et 5 constitueront le corps de ce document que nous concluons au chapitre 6. Nous présentons ici brièvement l'organisation.

Le chapitre 2 présente une réécriture et un approfondissement de l'article (Jackson, 1997). En apportant des précisions sur les outils mathématiques utilisés, nous montrons que les développements asymptotiques présentés par Jackson (1997) contenaient quelques erreurs concernant l'ordre de certains des termes mentionnés. Ces développements permettent de faire un lien entre les grandeurs physiques microscopiques propres aux suspensions, c'est-à-dire la vitesse et la pression du fluide, la vitesse de chaque particule, les forces appliquées à celles-ci et des grandeurs physiques macroscopiques. Cette étude s'inscrit dans la démarche initiée par Lhuillier (2009) et Nott et al. (2011). Le but est d'écrire des modèles diphasiques de suspension complets en effectuant des fermetures le plus rigoureusement possible. Nous concluons ce chapitre par une formulation de deux modèles classiques dans le cadre que nous avons défini.

Le chapitre 3 est constitué d'un article publié Ozenda et al. (2018). Nous présentons dans ce chapitre un nouveau modèle rhéologique permettant de prédire des effets transitoires observés notamment lors d'une inversion de cisaillement (Blanc et al., 2011a). Dans ce but, nous introduisons une dépendance du tenseur de contrainte de Cauchy à un tenseur de conformation, modélisant la déformation de la microstructure. Nous obtenons un modèle proche de celui d'un fluide visco-élastique de type *Oldroyd*, à ceci près que nous prévoyons bon nombre de comportements typiques des suspensions, en particulier le fait que des phénomènes transitoires dépendent de la déformation et non du temps. L'apport de ce chapitre consiste en des comparaisons quantitatives et simultanées du comportement transitoire de la viscosité apparente lors d'une inversion de cisaillement et de l'angle de déplétion que présente la fonction de distribution de paires.

Le chapitre 4 développe une extension du modèle présenté au chapitre 3. Ce premier modèle présentait l'intérêt d'être minimaliste mais ne modélisait pas les contraintes normales correctement. En ajoutant quatre paramètres ajustables, nous avons pu améliorer ces prédictions en conservant les qualités du premier modèle. Pour effectuer ces comparaisons, nous avons utilisé un jeu de données expérimentales hétérogènes. Cela nous a conduit à comparer des grandeurs les moins sensibles possible aux conditions expérimentales. Nous verrons qu'il est possible d'utiliser des variables réduites pour contourner en partie ces difficultés. Les contraintes normales jouant un rôle prépondérant dans l'établissement de phénomènes de migration, ce nouveau modèle ouvre la voie à des modélisations en géométrie quelconque valables sur une grande plage d'échelles de temps, de la déformation du réseau de voisins à l'établissement d'un profil de fraction volumique stationnaire.

Le chapitre 5 reprend les résultats du chapitre 2 et les place dans le cadre mathématique des systèmes compressibles congestionnés (Bresch et al., 2014). Nous construisons ainsi un système comportant cinq inconnues : deux vitesses, deux pressions et la fraction volumique. Ce cadre est compatible à la fois avec des rhéologies empiriques (Miller et Morris, 2006) et avec le nouveau modèle rhéologique présenté au chapitre 4. L'originalité de ce système par rapport aux modèles plus classiques est double. Premièrement nous conservons une inconnue de type vitesse pour la phase particulaire, cela permet de contrôler facilement le flux de particules au bord du domaine. Deuxièmement nous imposons explicitement au niveau continu la condition de non-pénétration des particules en ajoutant une contrainte unilatérale sur la fraction volumique. Nous terminons ce chapitre par une application de ce nouveau système à l'écoulement dans un tuyau cylindrique.



# Chapitre 2

## Modélisation continue des suspensions

Le but du présent chapitre est de justifier la construction de modèles continus pour les suspensions de sphères dures à partir du tenseur de Cauchy du fluide suspendant, des forces d'interaction entre les particules ainsi que de l'interaction entre le fluide et les particules. La méthode utilisée consiste à effectuer des moyennes sur des domaines grands devant la taille des particules considérées, c'est-à-dire à l'échelle mésoscopique. Le but de cette démarche est de formuler des systèmes de lois de conservation à l'échelle macroscopique. Les résultats et raisonnements présentés dans les trois premières sections de ce chapitre sont très proches de ceux présentés dans l'article de [Jackson \(1997\)](#) ou des chapitres un et deux du livre ([Jackson, 2000](#)). Cependant ces trois premières sections constituent plus qu'une réécriture dans la mesure où les outils mathématiques supplémentaires utilisés ont permis de justifier rigoureusement les développements asymptotiques présentés. Ainsi, nous mettrons en évidence que les systèmes de lois de conservation présentés dans ([Jackson, 1997](#)) présentent des termes négligeables devant l'ordre de l'approximation annoncée. L'intérêt de ces trois premières sections est purement théorique dans la mesure où il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires pour obtenir un modèle permettant de prévoir le comportement macroscopique d'une suspension. C'est pourquoi nous donnerons par la suite une construction de modèles classiques sans inertie. Nous commencerons par le modèle original d'[Einstein \(1906\)](#) puis nous effectuerons celle du *suspension balance model* ([Miller et Morris, 2006](#)). Ce chapitre sera donc structuré en quatre sections.

Une première section permettra de donner une formulation à l'échelle de la particule des différentes vitesses et interactions mises en jeu. Une deuxième section traitera des méthodes mathématiques utilisées pour effectuer des moyennes sur les quantités introduites précédemment et donc réaliser notre modélisation continue. Une troisième section présentera des développements asymptotiques de nos grandeurs moyennées et conduira à l'établissement de systèmes de lois de conservation. Enfin, après avoir présenté la construction de modèles non inertiels, nous argumenterons dans une quatrième section la pertinence de supposer que le nombre de Reynolds est non nul d'une part et d'autre part celle de chercher de nouveaux modèles rhéologiques.

### 2.1 Modélisation discrète

Dans ce chapitre, on utilisera librement la notation d'Einstein afin d'alléger la typographie des certaines preuves.

#### 2.1.1 Formulation du problème

On considère un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné occupé par une suspension de particules rigides sphériques mono-disperses. Le nombre de particules contenues dans  $\Omega$  est noté  $N$  et, pour  $1 \leq i \leq N$ , on note  $\Lambda_i(t)$  le domaine ouvert occupé par la  $i^{\text{eme}}$  particule à l'instant  $t$  :

$$\Lambda_i(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 ; |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)| < r_p\}$$

où  $\mathbf{x}_i(t)$  est le centre de  $\Lambda_i(t)$  et  $r_p$  son rayon voir la figure [2.1](#).  $L$  est une grandeur caractéristique de l'écoulement, par exemple le diamètre de  $\Omega$ . On supposera par la suite que  $r_p \ll L$  afin de construire un

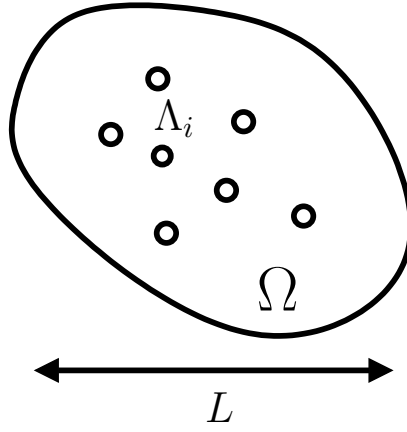


FIGURE 2.1 :

modèle continu pour la phase particulaire et donc pour le mélange. On note  $\Lambda = \frac{4}{3}\pi r_p^3$  le volume d'une particule et pour un domaine  $\mathcal{D}$ ,  $\partial\mathcal{D}$  désigne sa frontière. On définit :

$$\begin{aligned}\Omega_p(t) &= \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i(t) \\ \Omega_f(t) &= \text{int}(\Omega \setminus \Omega_p(t))\end{aligned}$$

Ici  $\Omega_p(t)$  représente la phase granulaire, c'est-à-dire l'union des domaines occupés les particules  $\Lambda_i$ .  $\Omega_f(t)$  est l'intérieur de son complémentaire occupé par le fluide. La normale sortante à  $\Omega_p(t)$  est notée  $\mathbf{n}(t, \mathbf{x})$  : elle est définie pour tout  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_p(t)$  et  $t \geq 0$ . Elle est donc entrante dans  $\Omega_f(t)$ . On note  $\rho_f$  et  $\rho_s$  les densités respectives du fluide et des particules solides, supposées constantes, ainsi que

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_f & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_f(t) \\ \rho_s & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_p(t) \end{cases}$$

On note  $\mathbf{u}$  le champ de vecteur des vitesses dans le milieu continu composé du fluide et des particules et  $D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2}$ . On suppose qu'il y a adhérence du fluide aux particules :  $\mathbf{u}$  est continu à la traversée de  $\partial\Omega_p(t)$ . La densité  $\rho_f$  étant constante, la conservation de la masse dans le milieu fluide se réduit à  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega_f(t)$ . Par ailleurs, les particules étant en déplacement rigide, on a  $D(\mathbf{u}) = 0$  dans  $\Omega_p(t)$ . En particulier, en remarquant que  $\text{tr}(D(\mathbf{u})) = \text{div } \mathbf{u}$ , on obtient  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega_p(t)$  également. Finalement :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p(t) \cup \Omega_f(t) \quad (2.1)$$

Signalons que même si  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$ , la densité  $\rho$  n'est pas globalement uniforme bien que celle-ci le soit dans chacune des deux phases  $\Omega_p(t)$  et  $\Omega_f(t)$ .

On note  $\bar{\mathbf{u}}_i$  la vitesse du centre de masse  $\mathbf{x}_i$  de la  $i$ -ème particule :

$$\bar{\mathbf{u}}_i(t) = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) \quad (2.2)$$

Par commodité, on note aussi, pour tout  $t \geq 0$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_i(t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les particules étant en mouvement rigide, la vitesse dans la  $i$ -ème particule s'écrit :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \boldsymbol{\omega}_i(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad \text{dans } \Lambda_i(t) \quad (2.3)$$

où  $\boldsymbol{\omega}_i(t)$  est le vecteur rotation dans  $\Lambda_i(t)$ . On note :

$$\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i(t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les particules rigides satisfont une condition de non-pénétration

$$\Lambda_i(t) \cap \Lambda_j(t) = \emptyset \iff |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)| \geq 2r_p, \forall (i, j), i \neq j$$

Lorsque les particules sont en contact, ce contact a lieu à l'intersection des bords des deux particules. Il est réduit à un point pour deux particules sphériques, et est noté  $\mathbf{x}_{i,j}(t)$  :

$$\partial\Lambda_i(t) \cap \partial\Lambda_j(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)| > 2r_p \\ \{\mathbf{x}_{i,j}(t)\} & \text{si } |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)| = 2r_p \end{cases}$$

Lorsque  $i = j$ , on note  $\mathbf{x}_{i,i}(t)$  un point quelconque de  $\partial\Lambda_i(t)$ . De même, pour  $i \neq j$  et lorsqu'il n'y a pas contact, on désignera par  $\mathbf{x}_{i,j}(t)$  un point quelconque de  $\partial\Lambda_i(t) \cup \partial\Lambda_j(t)$ . En cas de contact, c'est-à-dire lorsque  $|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)| = 2r_p$ , on a  $\mathbf{x}_{i,j}(t) = \mathbf{x}_{j,i}(t)$ . Pour  $i \neq j$ , le vecteur normal sortant  $\mathbf{n}$  à  $\Lambda_i(t)$  au point de contact  $\mathbf{x}_{i,j}$  est donné par

$$\mathbf{n}_{i,j}(t) = \frac{\mathbf{x}_{i,j}(t) - \mathbf{x}_i(t)}{|\mathbf{x}_{i,j}(t) - \mathbf{x}_i(t)|} \quad (2.4)$$

Lorsque  $i = j$ , on définit également  $\mathbf{n}_{i,i}(t) = 0$ . Les vitesses à la surface de chaque particule au point de contact peuvent être différentes c'est pourquoi on distingue :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}(t) &= \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \boldsymbol{\omega}_i(t) \wedge (\mathbf{x}_{i,j}(t) - \mathbf{x}_i(t)) \\ \mathbf{u}_{j,i}(t) &= \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \boldsymbol{\omega}_j(t) \wedge (\mathbf{x}_{i,j}(t) - \mathbf{x}_j(t)) \end{aligned}$$

On définit  $\mathbf{f}_{c(i,j)}$ , la force que la particule  $i$  produit sur la particule  $j$  par contact. La force de contact est nulle lorsqu'il n'y a pas contact :

$$\mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) = 0, \forall (i, j) \text{ tels que } |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)| > 2r_p$$

Lorsque  $i = j$ , on définit également  $\mathbf{f}_{c,(i,i)}(t) = 0$ . Lorsqu'il y a contact, les vitesses et les forces sont liées par deux relations : une condition de type *Signorini* relie leurs composantes normales :

$$0 \leq \mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t) \perp (\mathbf{u}_{j,i}(t) - \mathbf{u}_{i,j}(t)) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t) \geq 0, \forall (i, j) \text{ tels que } |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)| = 2r_p \quad (2.5a)$$

et l'équation de glissement-frottement de *Coulomb* relie leurs composantes tangentielles :

$$\begin{cases} |\mathbf{f}_{tc,(i,j)}(t)| \leq \mu(\mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t)) & \text{si } \mathbf{u}_{t,(j,i)}(t) - \mathbf{u}_{t,(i,j)}(t) = 0 \\ \mathbf{f}_{tc,(i,j)}(t) = \mu(\mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t)) \frac{\mathbf{u}_{t,(j,i)}(t) - \mathbf{u}_{t,(i,j)}(t)}{|\mathbf{u}_{t,(j,i)}(t) - \mathbf{u}_{t,(i,j)}(t)|} & \text{si } \mathbf{u}_{t,(j,i)}(t) - \mathbf{u}_{t,(i,j)}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (2.5b)$$

où  $\mu \geq 0$  est le coefficient de friction du modèle de *Coulomb*. L'équation (2.5a), mentionne une inéquation de type contact unilatéral dont nous rappelons la signification :  $0 \leq a \perp b \geq 0 \iff a \geq 0$  et  $b \geq 0$  et  $ab = 0$ . Dans (2.5b) on a utilisé les notations suivantes pour les composantes tangentielles de la vitesse relative et de la force :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t,(i,j)}(t) &= \mathbf{u}_{i,j}(t) - (\mathbf{u}_{i,j}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t))\mathbf{n}_{i,j}(t) \\ \mathbf{f}_{tc,(i,j)}(t) &= \mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) - (\mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t))\mathbf{n}_{i,j}(t) \end{aligned}$$

Enfin, suivant le principe de l'action et de la réaction, on a :  $\mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) = -\mathbf{f}_{c,(i,j)}(t)$ . On note  $\mathbf{g}$  la gravité et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur de contrainte de Cauchy. La conservation de la quantité de mouvement dans la phase fluide s'écrit :

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \rho_f \mathbf{g} \text{ dans } \Omega_f(t) \quad (2.6)$$

Le fluide est supposé newtonien, ce qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta_0 D(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega_f(t) \quad (2.7)$$

où  $\eta_0$  est la viscosité,  $\mathbf{I} = (\delta_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$  désigne le tenseur identité de  $\mathbb{R}^3$  et  $\delta_{\alpha,\beta}$ , le symbole de Kronecker. La conservation de la quantité de mouvement dans la phase solide s'écrit :

$$\rho_s \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho_s \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_p(t) \quad (2.8)$$

Le Lemme 2.1 va permettre d'explicitier le terme  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}$ .

**Lemme 2.1** (accélération dans la phase solide).

L'accélération dans la  $i$ -ème particule s'écrit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (t, \mathbf{x}) &= \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) + \{ \boldsymbol{\omega}_i(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_i(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \mathbf{I} \} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\ &+ \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad \text{pour tout } (t, \mathbf{x}) \in ]0, +\infty[ \times \Lambda_i(t) \end{aligned} \quad (2.9a)$$

et l'accélération totale de la particule est réductible à celle de son centre de masse :

$$\int_{\Lambda_i(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Lambda \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) \quad (2.9b)$$

*Preuve.* De (2.3), on développe l'expression de la  $\alpha$ -ème composante de l'accélération :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\beta \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) (t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{d\bar{u}_{i,\alpha}}{dt}(t) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{d\omega_{i,\beta}}{dt}(t) (x_\gamma - x_{i,\gamma}(t)) - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_{i,\beta}(t) \frac{dx_{i,\gamma}}{dt}(t) \\ &+ \bar{u}_{i,\beta}(t) \varepsilon_{\alpha\mu\nu} \omega_{i,\mu} \delta_{\nu\beta} + \varepsilon_{\beta\gamma\varphi} \omega_{i,\gamma}(t) (x_\varphi - x_{i,\varphi}(t)) \varepsilon_{\alpha\mu\nu} \omega_{i,\mu} \delta_{\nu\beta} \end{aligned}$$

De (2.2) et du lemme 2.4, par permutation d'indice, les troisième et quatrième termes s'annulent mutuellement. Du lemme 2.4, par combinaison du symbole de Lévi-Civita, le dernier terme s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\beta\gamma\varphi} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} \omega_{i,\gamma}(t) \omega_{i,\mu} (x_\varphi - x_{i,\varphi}(t)) \delta_{\nu\beta} \\ &= \varepsilon_{\beta\gamma\varphi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta} \omega_{i,\gamma}(t) \omega_{i,\mu} (x_\varphi - x_{i,\varphi}(t)) \quad \text{par reduction du symbole de Kronecker} \\ &= \varepsilon_{\beta\alpha\mu} \varepsilon_{\beta\gamma\varphi} \omega_{i,\gamma}(t) \omega_{i,\mu} (x_\varphi - x_{i,\varphi}(t)) \quad \text{par rotation des indices du symbole de Levi-Civita} \\ &= (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\mu\varphi} - \delta_{\alpha\varphi} \delta_{\mu\gamma}) \omega_{i,\gamma}(t) \omega_{i,\mu} (x_\varphi - x_{i,\varphi}(t)) \quad \text{par combinaison des deux symboles de Levi-Civita} \\ &= \omega_{i,\alpha}(t) \omega_{i,\mu} (x_\mu - x_{i,\mu}(t)) - \omega_{i,\gamma}(t) \omega_{i,\gamma} (x_\alpha - x_{i,\alpha}(t)) \end{aligned}$$

D'où le résultat (2.9a). On obtient ensuite (2.9b) par intégration sur  $\Lambda_i(t)$ . On utilise alors le lemme 2.3 et relation (2.13a), ce qui a pour effet d'éliminer les termes en  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)$ .  $\square$

À la traversée de l'interface  $\partial\Omega_p(t)$  entre fluide et solide, la vitesse est supposée continue (condition d'adhérence) et la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  de part et d'autre de l'interface est également continue :

$$\int_{\Lambda_i} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Lambda_i} \left( \boldsymbol{\sigma}_{|\Omega_f(t)}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) \delta_{\mathbf{x}_i,j}(t, \mathbf{y}) \right) ds$$

En effet, à la frontière des particules s'exercent à la fois la force d'interaction entre le fluide et les particules et les forces ponctuelles de contact, comme indiqué sur la figure 2.2. On déduit de (2.8) et de (2.9b) que le bilan de la conservation de la quantité de mouvement pour une particule quelconque  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$  s'écrit :

$$\rho_s \Lambda \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) = \rho_s \Lambda \mathbf{g} + \int_{\partial\Lambda_i(t)} \boldsymbol{\sigma}_{|\Omega_f(t)}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n} ds + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) \quad (2.10)$$

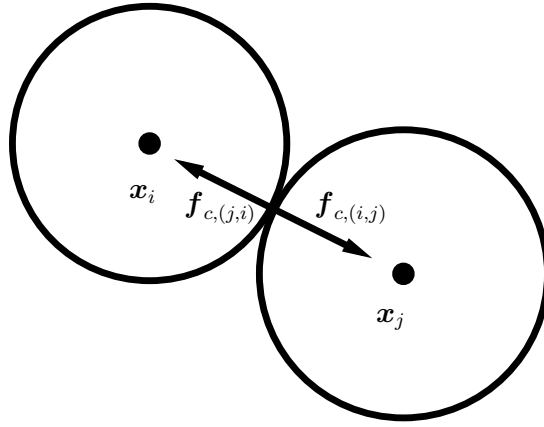


FIGURE 2.2 :

On remarque que le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  n'est pas défini dans  $\Omega_p(t)$ . En considérant  $\boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_f(t)}$ , sa restriction à  $\Omega_f(t)$ , la quantité de mouvement peut s'écrire globalement :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_f} = \rho \mathbf{g} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \delta_{\mathbf{x}_{i,j}(t)} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

Enfin, toutes les particules étant identiques et sphériques, le moment d'inertie du centre de masse d'une particule, noté  $I_p$ , est une constante :

$$I_p = \frac{8\pi\rho_s a^5}{15} = \frac{2\rho_s \Lambda a^2}{5} \quad (2.11)$$

La conservation du moment cinétique au centre de masse de la  $i$ -ème particule s'écrit :

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) = \int_{\mathbf{y} \in \partial\Lambda_i(t)} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \wedge \left( \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_f(t)}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{x}_{i,j}(t) - \mathbf{x}_i(t)) \wedge \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) \quad (2.12)$$

À la traversée de l'interface entre fluide et solide, on suppose la vitesse  $\mathbf{u}$  et la composante normale des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  continues, ce qui s'écrit :

$$[\mathbf{u}] = [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] = 0 \quad \text{sur } ]0, +\infty[ \times \partial\Omega_s(t)$$

où  $[\cdot]$  désigne le saut à travers l'interface. Ainsi on obtient le bilan des forces appliquée à la sphère  $\Lambda_i$ . Celle-ci subit la force exercées par le fluide suspendant  $\int_{\partial\Lambda_i} \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_f(t)}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) ds$  et la à force exercée par les autres

particules en contact  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) \delta_{\mathbf{x}_{i,j}(t)}(t, \mathbf{y})$

**Remarque 2.2.** À partir de (2.7), on peut exprimer explicitement la contrainte normale sur l'interface  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ , apparaissant dans (2.10) et (2.12) sur  $]0, +\infty[ \times \partial\Lambda_i(t)$ , en fonction de  $p$  et  $D(\mathbf{u})$  dans le fluide par :

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\partial\Omega_s(t)} = -p|_{\partial\Omega_f(t)} \mathbf{n} + 2\eta_0 D(\mathbf{u}|_{\partial\Omega_f(t)}) \mathbf{n}$$

Remarquons que si  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  sont continus à la traversée de l'interface entre fluide et solide, il n'en va pas nécessairement de même du taux de déformation  $D(\mathbf{u})$ . Dans ce cas, le problème contient cinq inconnues :  $\mathbf{u}$  et  $p$ , définies dans  $]0, +\infty[ \times \Omega_f(t)$ ,  $(\bar{\mathbf{u}}_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{1 \leq i \leq N}$  et  $(\mathbf{f}_{c,(i,j)})_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j}$  définies dans  $]0, +\infty[$ , qui satisfont cinq relations : (2.6) et (2.1) dans  $]0, +\infty[ \times \Omega_f(t)$  ainsi que (2.10), (2.12) et (2.5) dans  $]0, +\infty[$ . Le problème est fermé par des conditions initiales pour  $\mathbf{u}$  dans  $\Omega_f(t)$  et  $(\bar{\mathbf{u}}_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{1 \leq i \leq N}$  ainsi que des conditions aux bords pour  $\mathbf{u}$  à l'infini, par exemple des conditions de type Dirichlet.

### 2.1.2 Quelques outils techniques

**Lemme 2.3** (Éléments de calcul intégral sur la sphère).

Soit  $r_p > 0$  et  $B$  la sphère de centre 0 et de rayon  $r_p$ . On a, pour tous  $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\int_B \mathbf{x} \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.13a)$$

$$\int_B x_\alpha x_\beta \, d\mathbf{x} = \begin{cases} \frac{4\pi r_p^5}{15} & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13b)$$

$$\int_B |\mathbf{x}|^2 \, d\mathbf{x} = \frac{4\pi r_p^5}{5} \quad (2.13c)$$

$$\int_B x_\alpha x_\beta x_\gamma \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \quad (2.13d)$$

*Preuve.* Par simple vérification. □

**Lemme 2.4** (notation de Lévi-Civita).

On note  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  le symbole de Lévi-Civita et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le pseudo-tenseur d'ordre 3 associé,

1. par définition, pour tous  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \left( \sum_{\beta, \gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\beta c_\gamma \right)_\alpha$$

2. rotation d'indice :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$$

3. permutation d'indice :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}$$

4. combinaison de deux symboles :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} &= \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu} \\ A - A^T &= \left( \sum_{\gamma, \delta, \varphi} \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \varepsilon_{\gamma\delta\varphi} A_{\varphi\delta} \right)_{\alpha\beta} = \left( \sum_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} (\boldsymbol{\varepsilon} : A^T)_\gamma \right)_{\alpha\beta}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{aligned}$$

5. soient  $\mathbf{b}$  un vecteur et  $c(\mathbf{x})$  un champ scalaire de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\operatorname{div} \left( c(\mathbf{x}) \sum_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \mathbf{b}_\alpha \right)_{\alpha\beta} = \mathbf{b} \wedge \nabla c(\mathbf{x})$$

## 2.2 Outils permettant de construire un modèle continu

Le but est ici de donner des outils permettant d'étudier une suspension à l'échelle macroscopique comme un milieu continu. Les grandeurs moyennées que nous allons définir ne sont autres que des produits de convolution, contre une fonction noyau, de grandeurs microscopiques définies dans la section 2.1. Ce noyau sera choisi de manière à pouvoir développer les moyennes calculées en séries d'harmoniques sphériques.

### 2.2.1 Choix d'un noyau

**Définition 2.5** (Noyau).

Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  on définit le noyau  $K$  par :

$$K(\mathbf{x}) = r_0^{-3} \varphi(r_0^{-1}|\mathbf{x}|)$$

où  $\varphi$  est une fonction à support compact, vérifiant :

$$\begin{cases} (1/2)\text{diam}(\text{supp}(\varphi)) = 1 \\ 4\pi \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \xi^2 d\xi = 1 \\ \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0^{-3} \varphi(r_0^{-1}\xi) = \delta_0(\xi) \end{cases}$$

où  $\delta_0$  désigne la mesure de Dirac. La première condition est une normalisation du support. La seconde condition garantit que l'intégrale de  $K$  sur  $\mathbb{R}^3$  est égale à 1. La troisième condition sert à garantir la convergence du remplacement de la suspension en un milieu continu.

**Remarque 2.6** (convergence et échelles de tailles).

Le support de  $K$  correspond en physique à la notion de *volume élémentaire représentatif* ou d'échelle mésoscopique. Dans le but de proposer une modélisation continue de la phase granulaire, on suppose  $r_p \ll r_0 \ll R$ , où  $r_p$  est le rayon des particules et  $R$  est une grandeur caractéristique de l'écoulement macroscopique de la suspension. On peut par exemple prendre  $2R = \text{diam}(\Omega)$ . Il y a donc trois échelles de tailles dont deux sont supposées converger vers zéro. Plus précisément, on pourra poser par exemple  $r_p/r_0 = \sqrt{\varepsilon}$  et  $r_0/R = \sqrt{\varepsilon}$ , si bien que  $r_p/R = (r_p/r_0)(r_0/R) = \varepsilon$ , puis faire tendre  $\varepsilon$  vers zéro pour obtenir le modèle continu.

**Définition 2.7** (rayon de coupure).

On définit aussi le rayon de coupure de  $\varphi$ , noté  $\xi_c$  tel que

$$4\pi \int_0^{\xi_c} \varphi(\xi) \xi^2 d\xi = 4\pi \int_{\xi_c}^{+\infty} \varphi(\xi) \xi^2 d\xi$$

Ainsi, le rayon de coupure de  $K$  est  $r_c = \xi_c r_0$  et vérifie :

$$\int_{\{|\mathbf{x}| < r_c\}} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\{|\mathbf{x}| > r_c\}} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

**Définition 2.8** (noyau discontinu).

On considère la fonction  $\varphi_c$  définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par [Jackson \(2000\)](#) :

$$\varphi_c(\xi) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} & \text{si } \xi < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

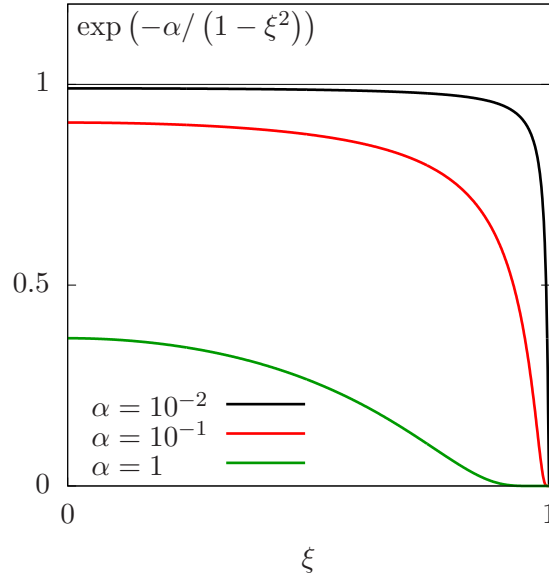
dont le rayon de coupure est  $\xi_c = 2^{-\frac{1}{3}}$ .

Le noyau discontinu a été introduit par [Jackson \(2000\)](#). Il a l'inconvénient de ne pas être régulier, en particulier il n'est pas dérivable ni développable en série de Taylor. Pour cette raison, on préférera remplacer ce noyau par des fonctions  $C^\infty$  à support compact. On définit une famille de noyaux régularisés afin de faire des développements asymptotiques d'équations moyennées.

**Définition 2.9** (noyau  $C^\infty$ ).

On considère la famille de fonction  $\varphi_\alpha$  définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par [Johnson \(2015\)](#), (voir Fig. 2.3) :

$$\varphi_\alpha(\xi) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\xi^2}\right) & \text{si } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

FIGURE 2.3 : Noyau  $C^\infty$  à support compact.

où  $\alpha > 0$  est un paramètre fixé, indépendant de  $r_p$  et  $r_0$ . La constante  $c$  de normalisation est donnée par :

$$c = \left( 4\pi \int_0^1 \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\xi^2}\right) \xi^2 d\xi \right)^{-1}$$

Le rayon de coupure  $\xi_c$  est caractérisé par la relation :

$$\int_0^{\xi_c} \varphi(\xi) \xi^2 d\xi = \int_{\xi_c}^1 \varphi(\xi) \xi^2 d\xi$$

**Proposition 2.10** (convergence des moyennes définies pour les deux types de noyaux).

La moyenne calculée à partir du noyau  $C^\infty$  à support compact diffère de celle calculée avec le noyau discontinu d'un terme en  $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha})$ .

*Preuve.* Ici  $\varphi$  désigne la fonction associée au noyau  $C^\infty$ . Remarquons que pour  $\xi = (1 - \sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}}$  on a  $\varphi(\xi) = \exp(-\sqrt{\alpha})$ . Aussi, il vient :

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}} \exp(-\sqrt{\alpha}) &\leq \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi \leq 1 \\ \Rightarrow \left| 1 - \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi \right| &= \mathcal{O}(\sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (1 - \varphi(\xi)) \xi^2 d\xi \leq \int_0^1 (1 - \varphi(\xi)) d\xi \\ \Rightarrow \int_0^1 (1 - \varphi(\xi)) \xi^2 d\xi &= \mathcal{O}(\sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

Pour toute fonction  $f$  bornée, la différence entre la moyenne calculée à partir du noyau discontinu et celle



calculée à partir du noyau continu est :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\int_0^1 f(\xi)\xi^2 d\xi}{\int_0^1 \xi^2 d\xi} - \frac{\int_0^1 f(\xi)\varphi(\xi)\xi^2 d\xi}{\int_0^1 \varphi(\xi)\xi^2 d\xi} \right| \\
&= \left| \frac{\int_0^1 f(\xi)\xi^2 d\xi}{\int_0^1 \xi^2 d\xi} - \frac{\int_0^1 f(\xi)\varphi(\xi)\xi^2 d\xi}{(1 + \mathcal{O}(\sqrt{\alpha})) \int_0^1 \xi^2 d\xi} \right| \\
&\leq \|f\|_\infty \frac{\left| (1 + \sqrt{\alpha}) \int_0^1 \xi^2 d\xi - \int_0^1 \varphi(\xi)\xi^2 d\xi \right|}{\int_0^1 \xi^2 d\xi} \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\int_0^1 \xi^2 d\xi} \left| \int_0^1 (1 - \varphi(\xi)) \xi^2 d\xi + \mathcal{O}(\sqrt{\alpha}) \right| \\
&= \mathcal{O}(\sqrt{\alpha}) \text{ d'après ce qui précède}
\end{aligned}$$

□

Cette proposition est donnée pour situer la présente dérivation par rapport à celle proposée par Jackson (2000) qui utilise le noyau discontinu pour définir ses moyennes. Avec le noyau discontinu, les développements asymptotiques qui vont suivre ne peuvent pas être justifiés, c'est pourquoi nous proposons de nous placer dans un cadre différent de celui exposé dans (Jackson, 2000). Dans ce but, nous fixons  $\alpha = 1$  et notons  $\varphi = \varphi_1$ . La convergence de la fonction convolée  $f * \varphi_\alpha$  vers la fonction convolée  $f * \varphi_c$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0 ne sera pas étudiée plus en détail ici. On rappelle que la fonction  $\varphi_c$  présentée à la définition 2.8 permet de construire le noyau discontinu utilisé par Jackson (2000). La question de savoir si les fonctions moyennées définies dans (Jackson, 2000) peuvent être vues comme limites des fonctions moyennées présentées ici ne sera donc pas abordée.

**Remarque 2.11** (développement de Taylor du noyau).

Dans la suite, on va utiliser des développements de Taylor à l'ordre deux de  $K$ . Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) : (\nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \mathcal{O} \left( r_0^{-3} \left( \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)|}{r_0} \right)^3 \right) \quad (2.14)
\end{aligned}$$

où les fonctions  $\mathcal{O}$  ne dépendent que de  $\varphi$  et de ses dérivées et sont indépendantes de  $r_0$ . En effet, le noyau est en  $r_0^{-3}$  et chaque dérivée du noyau fait apparaître un  $r_0^{-1}$ . Nous avons noté le Hessien de  $K$  :

$$(\nabla \otimes \nabla) K = \left( \frac{\partial K}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_{\alpha, \beta}$$

## 2.2.2 Fonctions d'état

**Définition 2.12** (fraction volumique de la phase solide).

La fraction volumique  $\phi : ]0; +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est définie comme la convolution de la fonction indicatrice de la phase solide par le noyau régularisant :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \mathbb{I}_{\Omega_p(t)} * K = \int_{\Omega_p(t)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Remarquons que la fraction volumique de la phase fluide est donnée par

$$1 - \phi(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega_f(t)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

**Définition 2.13** (densité du nombre de particules).

La fonction  $\nu : ]0; +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  désigne le nombre de particules dont le centre est échantillonné par le noyau  $K$

$$\nu(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

**Proposition 2.14** (relation entre  $\phi$  et  $\nu$ ).

La fonction  $\phi$  est un produit de convolution alors que la fonction  $\nu$  est une somme discrète. Ces deux quantités n'ont aucune raison d'être égales. Cependant elles permettent toutes les deux de quantifier la proportion de particules dans le mélange, c'est pourquoi nous effectuons le développement asymptotique suivant :

$$\phi(x) = \Lambda\nu + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^2\right)$$

*Preuve.* Si on considère le développement de Taylor à l'ordre deux (2.14) et en effectuant une intégration sur  $\Lambda_i(t)$ , on obtient, après calculs des intégrales sur la boule  $B$  de centre 0 et de rayon  $r_p$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y} &= K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \left( \int_{\mathbf{y} \in B} d\mathbf{y} \right) + \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \cdot \left( \int_{\mathbf{y} \in B} \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) : \left( \int_{\mathbf{y} \in B} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \right) + \mathcal{O}(r_p^3 r_0^{-6}) \left( \int_{\mathbf{y} \in B} d\mathbf{y} \right) \\ &= \Lambda K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{r_p^2 \Lambda}{10} \Delta K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^6\right) \\ &= \Lambda K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^5\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

où les fonctions  $\mathcal{O}$  ne dépendent que de  $\varphi$  et de ses dérivées et sont indépendantes de  $r_0$ . Il s'agit ici de sommer cette approximation à l'échelle de la particule. A partir du développement précédent, il vient :

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \Lambda\nu(t, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^5\right) \end{aligned}$$

Une difficulté à contourner est que  $N$  est grand. Cependant, le nombre maximal de particules contenues dans le support de  $K$  est majoré, dans le cas d'une compaction maximale des particules, par le rapport du volume du support de  $K$  par celui d'une particule, soit  $(r_0/r_p)^3$ . On en déduit le résultat :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \Lambda\nu(t, \mathbf{x}) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^2\right) \quad (2.16)$$

□

### 2.2.3 Moyennes

Le but est ici de définir rigoureusement comment calculer des moyennes à l'échelle mésoscopique et montrer comment les dériver en temps et en espace. Ces opérateurs de moyenne ont pour vocation d'être appliqués à des vitesses, des contraintes ou à des moments afin de construire un système de lois de conservation à l'échelle mésoscopique.

**Proposition 2.15** (convergence de la moyenne selon  $r_0$ ).

Avec le choix du noyau  $C^\infty$  donné par la définition 2.9, nous sommes en mesure de construire des suites régularisantes : pour toute fonction continue  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , la convolution  $f * K$  est une fonction régulière à  $r_0$  fixé. La suite régularisante  $f * K$  définie pour tout  $r_0 > 0$  converge, lorsque  $r_0$  tend vers zéro, vers  $f$ , uniformément sur tout ensemble compact de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} f * K = f \quad (2.17)$$

En particulier, lorsque  $f = \delta_0$  est la mesure de Dirac en zéro, on a :

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} K = \delta_0$$

la limite étant comprise au sens des distributions.

*Preuve.* Voir (Brezis, 2011, p. 108). □

**Définition 2.16** (moyennes).

Pour toute fonction  $\xi : ]0; +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit :

- la moyenne volumique

$$\langle \xi \rangle(t, \mathbf{x}) = (\xi * K)(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

- la moyenne dans la phase solide :

$$\langle \xi \rangle_s(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\phi(t, \mathbf{x})} \int_{\Omega_p(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} & \text{si } \phi(t, \mathbf{x}) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- la moyenne dans la phase fluide :

$$\langle \xi \rangle_f(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \phi(t, \mathbf{x})} \int_{\Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} & \text{si } \phi(t, \mathbf{x}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- la moyenne massique

$$\langle \xi \rangle_m(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho_s \phi(t, \mathbf{x}) \langle \xi \rangle_s(t, \mathbf{x}) + \rho_f (1 - \phi(t, \mathbf{x})) \langle \xi \rangle_f(t, \mathbf{x})}{\rho_m(t, \mathbf{x})}$$

où

$$\rho_m(t, \mathbf{x}) = \rho_s \phi(t, \mathbf{x}) + \rho_f (1 - \phi(t, \mathbf{x}))$$

**Définition 2.17** (moyenne particulière).

Soit  $\xi(t, \mathbf{x})$  une fonction définie dans  $]0; +\infty[ \times \Omega_p(t)$  et constante dans chaque particule :

$$\xi(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x})$$

alors sa moyenne particulière est définie par

$$\langle \xi \rangle_p(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\nu(t, \mathbf{x})} \sum_{i=1}^N \xi_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) & \text{si } \nu(t, \mathbf{x}) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque 2.18** (relations entre les moyennes).

Les moyennes  $\langle \cdot \rangle_s$  et  $\langle \cdot \rangle_f$  s'additionnent pour donner des moyennes sur le mélange. En revanche du fait de sa définition discrète la moyenne  $\langle \cdot \rangle_p$  ne peut être exprimée en fonction des autres de manière exacte.

$$\begin{aligned}\langle \xi \rangle &= \phi \langle \xi \rangle_s + (1 - \phi) \langle \xi \rangle_f \\ \rho_m \langle \xi \rangle_m &= \rho_s \phi \langle \xi \rangle_s + \rho_f (1 - \phi) \langle \xi \rangle_f \\ \langle \xi \rangle_p &\neq \langle \xi \rangle_s\end{aligned}$$

**Lemme 2.19** (moyennes en phase solide et en phase fluide d'une dérivée en espace).

Pour toute fonction  $\xi : ]0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  en espace, pour tout  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \right\rangle_s(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{ \phi(t, \mathbf{x}) \langle \xi \rangle_s(t, \mathbf{x}) \} + \int_{\partial \Omega_p(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{n}_\alpha(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ (1 - \phi(t, \mathbf{x})) \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \right\rangle_f(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{ (1 - \phi(t, \mathbf{x})) \langle \xi \rangle_f(t, \mathbf{x}) \} - \int_{\partial \Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{n}_\alpha(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})\end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}_\alpha$  est la  $\alpha^{\text{eme}}$  composante de la normale  $\mathbf{n}$ .

*Preuve.* Pour toute fonction  $\xi : ]0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  en espace, pour tout  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_{\Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \int_{\Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) \frac{\partial K}{\partial x_\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \{ K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \{ \xi(t, \mathbf{y}) \} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial \Omega_f(t)} \xi(\mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (-\mathbf{n}_\alpha(t, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y})\end{aligned}$$

La démonstration pour la phase solide est similaire. □

**Lemme 2.20** (moyennes en phases solide et en phase fluide d'une dérivée en temps).

Pour toute fonction  $\xi : ]0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  en temps :

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_s(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi(t, \mathbf{x}) \langle \xi \rangle_s(t, \mathbf{x}) \} - \int_{\partial \Omega_p(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ (1 - \phi(t, \mathbf{x})) \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_f(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \phi(t, \mathbf{x})) \langle \xi \rangle_f(t, \mathbf{x}) \} + \int_{\partial \Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})\end{aligned}$$

*Preuve.* Pour toute fonction  $\xi : ]0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  en temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial \xi}{\partial t}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial \Omega_f(t)} \xi(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{n}(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y})$$

La démonstration pour la phase solide est similaire. □

**Lemme 2.21** (moyenne particulière d'une dérivée temporelle).

Pour toute fonction  $\xi : ]0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  en temps :

$$\nu(t, \mathbf{x}) \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_p(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \nu(t, \mathbf{x}) \langle \xi \rangle_p(t, \mathbf{x}) \} + \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i(t) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

*Preuve.* Pour toute fonction  $\xi : ]0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  en temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \xi_i(t) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{d\xi_i}{dt}(t) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i(t) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

□

## 2.3 Équations de conservation

Nous utiliserons librement dans cette section les notations définies à la section 2.2. On commence par exprimer les conservations de la masse et de la quantité de mouvement de la phase liquide, de la phase granulaire et du mélange avec les moyennes des différentes grandeurs caractérisant l'écoulement d'une suspension telles que les vitesses et les interactions de contact définies dans la section 2.1 ou l'interaction fluide-particule. Ces systèmes d'équations comportent beaucoup de termes inconnus et il y a assez peu de méthodes simples et exactes permettant de les exprimer les uns en fonction des autres. Nous allons établir des approximations à  $\mathcal{O}(r_p^3/r_0^3)$  et à puis  $\mathcal{O}(r_p^2/r_0^2)$  afin de diminuer suffisamment le nombre d'inconnues, de manière à ce qu'un système comprenant autant d'équations que d'inconnues puisse être obtenu avec des hypothèses décrivant des expériences de laboratoires, notamment des écoulements viscosimétriques.

### 2.3.1 Conservation de la masse

**Proposition 2.22** (conservation de la masse).

Avec les notations définies aux sous-sections 2.2.2 et 2.2.3, nous écrivons ici la conservation de la masse dans les phases solide et liquide. On rappelle que les vitesses moyennes  $\langle \mathbf{u} \rangle_s$  et  $\langle \mathbf{u} \rangle_l$  désignent respectivement la vitesse de la phase granulaire et celle de la phase fluide, alors que  $\langle \mathbf{u} \rangle_p$  désigne la vitesse moyenne des centres de masse des particules.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_s) = 0 \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \phi) + \operatorname{div} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) = 0 \quad (2.18b)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \operatorname{div} (\nu \langle \mathbf{u} \rangle_p) = 0 \quad (2.18c)$$

*Preuve.* On applique le lemme 2.20 avec  $\xi = 1$  et le lemme 2.19 avec  $\xi = u_\alpha$  pour  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= - \int_{\partial\Omega_f(t)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\ \left( (1-\phi) \left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right\rangle_f \right)(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{ (1-\phi) \langle u_\alpha \rangle_f \}(t, \mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega_f(t)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_\alpha n_\alpha(t, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

En sommant, on obtient :

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \operatorname{div} ((1-\phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) = (1-\phi) \langle \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle_f$$

La relation d'incompressibilité (2.1) permet d'obtenir (2.18b). Remarquons que (2.18a) s'obtient de façon similaire. Pour obtenir le résultat (2.18c) dans la phase particulaire, on applique le lemme 2.21 avec  $\xi = 1$  :

$$0 = \frac{\partial \nu}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{u}}_i(t) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

On obtient (2.18c) en remarquant que, pour tout  $i$ , on a :

$$\bar{\mathbf{u}}_i(t) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) = \operatorname{div} \{ K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \bar{\mathbf{u}}_i(t) \}$$

□

### 2.3.2 Conservation de la quantité de mouvement – première version

**Proposition 2.23** (conservation de la quantité de mouvement – version initiale).

Avec les notations définies aux sous-sections 2.2.2 et 2.2.3, on présente ici respectivement, la conservation de

la quantité de mouvement moyennée du mélange, la conservation de la quantité de mouvement moyennée de la phase fluide et la moyenne particulaire effectuée sur la conservation de la quantité de mouvement d'une particule.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \langle \mathbf{u} \rangle_m) + \mathbf{div} (\rho_m \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_m) - \rho_m \mathbf{g} - \langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle = 0 \quad (2.19a)$$

$$\rho_f \left\{ \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) + \mathbf{div} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_f) \right\} - \mathbf{div} ((1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f) - (1 - \phi) \rho_f \mathbf{g} + \int_{\partial \Omega_f(t)} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0 \quad (2.19b)$$

$$\rho_s \Lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\nu \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_p) + \mathbf{div} (\nu \langle \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \rangle_p) \right\} - \rho_s \Lambda \nu \mathbf{g} - \sum_{i=1}^N K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \left( \int_{\partial \Lambda_i(t)} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N f_{c,(i,j)} \right) = 0 \quad (2.19c)$$

**Remarque 2.24** (redondance des trois conservations du mouvement).

Si aucune approximation n'était effectuée, on aurait ici trois équations indépendantes. Cela étant, les développements asymptotiques qui vont suivre conduisent à exprimer (2.19a) à partir de (2.19b) et (2.19c), via une approximation en  $\mathcal{O}\left(\frac{r_p^2}{R^2}\right)$ . Il ne restera donc que deux équations indépendantes, voir (Jackson, 1997), page 2463. Cela rejoint l'intuition qu'il suffit de deux vitesses et non de trois pour résoudre un problème diphasique. Rappelons que ces équations sont issues de la conservation de la quantité de mouvement via les trois moyennes  $\langle \cdot \rangle$ ,  $\langle \cdot \rangle_f$ , et  $\langle \cdot \rangle_p$ . Pour dériver un modèle rhéologique de la suspension, on préfère généralement garder la conservation de la masse du mélange (2.19a). On la complète ensuite avec une des deux autres équations. A noter aussi que l'équation (2.19a) fait appel à l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle_s$  via les moyennes  $\langle \cdot \rangle$  et  $\langle \cdot \rangle_m$ . Nous allons éliminer l'opérateur  $\langle \cdot \rangle_s$ , notamment au lemme 2.34.

*Preuve.* de la proposition 2.23. Pour obtenir (2.19b), on commence par moyenner chaque terme de la conservation de la quantité de mouvement de la phase liquide (2.6) en utilisant les lemmes 2.19 et 2.20 :

$$(1 - \phi) \left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \phi) \langle u_\alpha \rangle_f \} + \int_{\partial \Omega_f(t)} u_\alpha(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \quad (2.20a)$$

$$(1 - \phi) \langle \mathbf{div}(u_\alpha \mathbf{u}) \rangle_f = \mathbf{div} \{ (1 - \phi) \langle (u_\alpha \mathbf{u}) \rangle_f \} - \int_{\partial \Omega_f(t)} (u_\alpha \mathbf{u})(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \quad (2.20b)$$

$$(1 - \phi) \langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_f = \mathbf{div} \{ (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f \} - \int_{\partial \Omega_f(t)} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \quad (2.20c)$$

Pour obtenir (2.20b), on a sommé trois relations du type du lemme 2.19. On obtient le résultat (2.19b) en considérant des versions vectorielles de (2.20b).

Pour obtenir (2.19a), la procédure est similaire : on commence par écrire la quantité de mouvement dans chaque particule prise comme un milieu continu. En fusionnant (2.6) et (2.8), on peut écrire :

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right\} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_f(t) \cup \Omega_s(t)$$

La moyenne volumique du premier terme du membre de gauche donne successivement :

$$\begin{aligned}
\left\langle \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle &= \phi \left\langle \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle_s + (1 - \phi) \left\langle \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle_f \quad \text{d'après la remarque 2.18} \\
&= \rho_s \phi \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle_s + \rho_f (1 - \phi) \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle_f \\
&= \rho_s \frac{\partial}{\partial t} (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_s) + \rho_f \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) \quad \text{d'après le lemme 2.20} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \phi \langle \mathbf{u} \rangle_s + \rho_f (1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \langle \mathbf{u} \rangle_m)
\end{aligned}$$

De façon similaire, le second terme du membre de gauche s'écrit :

$$\langle \rho \mathbf{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \rangle = \mathbf{div}(\rho_m \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_m)$$

En regroupant ces termes, on obtient (2.19a).

Enfin, pour obtenir le résultat (2.19c), on effectue une moyenne particulière de la conservation de la quantité de mouvement pour une particule (2.10) en considérant que toutes les particules sont identiques, de volume  $\Lambda$ . On transforme ensuite la moyenne de l'accélération :

$$\nu \left\langle \frac{d\bar{u}_\alpha}{dt} \right\rangle_p = \frac{\partial}{\partial t} \{ \nu \langle \bar{u}_\alpha \rangle_p \} + \sum_{i=1}^N \bar{u}_{i,\alpha}(t) \bar{\mathbf{u}}_i(t) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

□

**Remarque 2.25** (développements asymptotiques en taille de particule).

Le membre en  $\sigma \mathbf{n}$  de (2.19b) diffère membre en  $\sigma \mathbf{n}$  de (2.19c). Aussi nous établissons dans la section 2.3 une relation entre ces deux expressions pour montrer qu'elles sont proches et obtenir une nouvelle formulation de la conservation de la quantité de mouvement.

### 2.3.3 Notations additionnelles

Par commodité, on introduit une nouvelle notation : pour tout tenseur d'ordre trois  $\mathbf{A} = (A_{\alpha\beta\gamma})$ , on définit  $\mathbf{div}^{(3)} \mathbf{A}$  comme étant le tenseur d'ordre deux de composante :

$$(\mathbf{div}^{(3)} \mathbf{A})_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial A_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}$$

Remarquons que

$$(\mathbf{div} \mathbf{div}^{(3)} \mathbf{A})_\alpha = \sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial A_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}$$

Pour tout  $\mathbf{B} = (B_{\beta\gamma})$  tenseur d'ordre 2, on note  $(\mathbf{A} : \mathbf{B})$  le produit doublement contracté de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , de composante :

$$(\mathbf{A} : \mathbf{B})_\alpha = \sum_{\beta,\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}$$

### 2.3.4 Moments

**Définition 2.26** (moments sur une particule).

Pour toute surface sphérique  $S$  et toute fonction  $f$  définie sur  $S$ , on définit les moments :

$$\begin{aligned} m_{0,S}(f) &= \int_S f(\mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\ \mathbf{m}_{1,S}(f) &= \int_S f(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\ \mathbf{m}_{2,S}(f) &= \int_S f(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\ \mathbf{m}_{k,S}(f) &= \int_S f(\mathbf{y}) \left( \bigotimes_{s=1}^k \mathbf{n}(\mathbf{y}) \right) \, ds(\mathbf{y}), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

De même, pour tout champ de vecteur  $\mathbf{f}$  de composantes  $f_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq 3$ , on définit le moment dont chaque ligne est constituée du moment de chaque composante :

$$\mathbf{m}_{k,S}(\mathbf{f}) = (\mathbf{m}_{k,S}(f_\alpha))_{1 \leq \alpha \leq 3}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Par extension, on notera également de façon similaire la somme sur toutes les particules d'un moment :

$$\mathbf{m}_{k,\partial\Omega_p(t)}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{k,\partial\Lambda_i(t)}(\mathbf{f}), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

**Lemme 2.27** (développement en moment sur une particule).

Supposons  $f$  développable en série d'harmoniques sphériques sur toute particule  $\Lambda_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , de rayon  $r_p$  (voir [Arfken \(2005, p. 786\)](#), section 12.6 et le lemme 2.33). Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_s(t)} f(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^N \left\{ m_{0,\partial\Lambda_i(t)}(f) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - r_p \mathbf{m}_{1,\partial\Lambda_i(t)}(f) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_p^2}{2} \mathbf{m}_{2,\partial\Lambda_i(t)}(f) : (\nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right\} \\ &\quad + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 r_0^{-1} \right) \end{aligned}$$

*Preuve.* Le développement en série d'harmoniques sphériques (voir [Arfken \(2005, p. 786\)](#), section 12.6) sur la sphère  $S$  de rayon  $r_p$  et de centre zéro s'écrit :

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{-\ell \leq m \leq \ell} r_p^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi) f_{\ell,m}$$

où  $f_{\ell,m} \in \mathbb{R}$  sont les coefficients du développement,  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$  et  $Y_{\ell,m}$  sont les harmoniques sphériques. À partir des expressions explicites des premières harmoniques sphériques  $Y_{\ell,m}$  données par ([Weisstein, 2016](#)), on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} m_{0,S}(Y_{0,0}) &\neq 0 \text{ et } m_{0,S}(Y_{\ell,m}) = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, -\ell \leq m \leq \ell \\ \mathbf{m}_{1,S}(Y_{1,m}) &\neq 0 \text{ pour certains } m \in \{-1, 0, 1\} \text{ et } \mathbf{m}_{1,S}(Y_{\ell,m}) = 0, \quad \ell = 0, 2, 3, -\ell \leq m \leq \ell \\ \mathbf{m}_{2,S}(Y_{0,0}) &\neq 0 \text{ et } \mathbf{m}_{2,S}(Y_{2,m}) \neq 0 \text{ pour certains } m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \mathbf{m}_{2,S}(Y_{1,m}) &= \mathbf{m}_{2,S}(Y_{3,m}) = 0, \quad \forall m \\ \mathbf{m}_{3,S}(Y_{0,0}) &= \mathbf{m}_{3,S}(Y_{2,m}) = 0, \quad \forall m \\ \mathbf{m}_{3,S}(Y_{1,m}) &\neq 0 \text{ et } \mathbf{m}_{3,S}(Y_{3,m}) \neq 0 \text{ pour certains } m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \mathbf{m}_{4,S}(Y_{0,0}) &\neq 0 \text{ et } \mathbf{m}_{4,S}(Y_{2,m}) \neq 0 \text{ pour certains } m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \mathbf{m}_{4,S}(Y_{1,m}) &= \mathbf{m}_{4,S}(Y_{3,m}) = 0, \quad \forall m \end{aligned}$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
m_{0,S}(f) &= m_{0,S}(Y_{0,0})f_{0,0} \\
\mathbf{m}_{1,S}(f) &= r_p \left( \sum_{-1 \leq m \leq 1} \mathbf{m}_{1,S}(Y_{1,m})f_{1,m} \right) + \mathcal{O}(r_p^4) \text{meas}(S) \\
\mathbf{m}_{2,S}(f) &= \mathbf{m}_{2,S}(Y_{0,0})f_{2,0} + \mathcal{O}(r_p^2) \text{meas}(S) \\
\mathbf{m}_{3,S}(f) &= r_p \left( \sum_{-1 \leq m \leq 1} \mathbf{m}_{3,S}(Y_{1,m})f_{1,m} \right) + \mathcal{O}(r_p^3) \text{meas}(S) \\
\mathbf{m}_{4,S}(f) &= \mathbf{m}_{4,S}(Y_{0,0})f_{4,0} + \mathcal{O}(r_p^2) \text{meas}(S)
\end{aligned}$$

où  $\text{meas}$  désigne la mesure de Lebesgue.

Si on choisit  $\mathbf{y} \in \partial\Lambda_i(t)$  dans (2.14), remarquant que  $\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t) = r_p \mathbf{n}(t, \mathbf{y})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - r_p \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{r_p^2}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(t, \mathbf{y}) : (\nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad - \frac{r_p^3}{6} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(t, \mathbf{y}) : (\nabla \otimes \nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \mathcal{O}(r_p^4 r_0^{-7})
\end{aligned}$$

Le facteur en  $r_0^{-7}$  provient de quatre dérivations en espace, qui font chacune apparaître un facteur en  $r_0^{-1}$  et du noyau  $K$  qui contient un facteur  $r_0^{-3}$ .

Avec  $\text{meas}(\partial\Lambda_i(t)) = 4\pi r_p^2$ , on obtient de ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_i(t)} f(\mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) &= m_0(f) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - r_p \mathbf{m}_1(f) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad + \frac{r_p^2}{2} \mathbf{m}_2(f) : (\nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad - \frac{r_p^3}{6} \mathbf{m}_3(f) : (\nabla \otimes \nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \mathcal{O}(r_p^6 r_0^{-7}) \\
&= m_0(f) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - r_p \mathbf{m}_1(f) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad + \frac{r_p^2}{2} \mathbf{m}_2(f) : (\nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad - \frac{r_p^3}{6} \left\{ r_p \left( \sum_{-1 \leq m \leq 1} \mathbf{m}_{3,S}(Y_{1,m})f_{1,m} \right) + \mathcal{O}(r_p^3) \right\} : (\nabla \otimes \nabla \otimes \nabla) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad + \mathcal{O}(r_p^6 r_0^{-7})
\end{aligned}$$

La dérivée troisième de  $K$  fait apparaître un facteur  $r_0^{-6}$  et le quatrième terme est donc en  $\mathcal{O}(r_p^4 r_0^{-6})$ . Le cinquième terme  $\mathcal{O}(r_p^4 r_0^{-7})$  est donc dominant : il est issu du terme d'ordre quatre du développement de Taylor de  $K$ .

On somme sur les particules présentes dans le support de  $K$ , dont le nombre est majoré par  $r_0^3 r_p^{-3}$ . On obtient  $\mathcal{O}(r_p^3 r_0^{-4})$ .  $\square$

### 2.3.5 Forces à la surface des particules

**Définition 2.28** (résultantes des forces et moments hydrodynamiques sur les particules).

On désigne la résultante des forces exercées par le fluide sur une particule ainsi que ses moments d'ordre 1

et 2 par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_l(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \int_{\partial\Lambda_i(t)} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \boldsymbol{\tau}_l(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} r_p \int_{\partial\Lambda_i(t)} \{\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y})\} \otimes \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \mathfrak{T}_l(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \frac{r_p^2}{2} \int_{\partial\Lambda_i(t)} \{\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y})\} \otimes \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarquons que ces forces et moments résultants sont constants pour tout  $\mathbf{x} \in \Lambda_i(t)$ . En particulier, on a  $\mathbf{f}_l(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_l(t, \mathbf{x}_i(t))$  et  $\boldsymbol{\tau}_l(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_l(t, \mathbf{x}_i(t))$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \Lambda_i(t)$ .

**Définition 2.29** (résultantes des forces et moments de contacts sur les particules).

On désigne la résultante des forces exercées par contact sur une particule ainsi que ses moments d'ordre 1 et 2 par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \boldsymbol{\tau}_c(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} r_p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) \otimes \mathbf{n}_{i,j}(t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \mathfrak{T}_c(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \frac{r_p^2}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{c,(j,i)}(t) \otimes \mathbf{n}_{i,j}(t) \otimes \mathbf{n}_{i,j}(t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Lambda_i(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

De même, ces forces et moments résultants sont constants pour tout  $\mathbf{x} \in \Lambda_i(t)$ .

**Remarque 2.30** (nouvelle expression des résultantes).

On peut reformuler les définitions 2.28 et 2.29 avec les notations de la définition 2.26 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_l(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{0, \partial \Lambda_i(t)}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{0, \partial \Lambda_i(t)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{f}_{c, (j, i)}(t) \delta_{\mathbf{x}_{i, j}(t)} \right) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x}) \\
 \boldsymbol{\tau}_l(t, \mathbf{x}) &= r_p \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{1, \partial \Lambda_i(t)}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x}) \\
 \boldsymbol{\tau}_c(t, \mathbf{x}) &= r_p \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{1, \partial \Lambda_i(t)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{f}_{c, (j, i)}(t) \delta_{\mathbf{x}_{i, j}(t)} \right) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x}) \\
 \boldsymbol{\mathfrak{T}}_l(t, \mathbf{x}) &= \frac{r_p^2}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{2, \partial \Lambda_i(t)}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x}) \\
 \boldsymbol{\mathfrak{T}}_c(t, \mathbf{x}) &= \frac{r_p^2}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{2, \partial \Lambda_i(t)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{f}_{c, (j, i)}(t) \delta_{\mathbf{x}_{i, j}(t)} \right) \mathbb{1}_{\Lambda_i(t)}(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

Avec ces notations, le membre de droite de (2.19c) s'écrit simplement  $\nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p$ . Le lemme suivant donne une expression du membre de droite de (2.19b).

**Lemme 2.31** (force hydrodynamique à la surface des particules).

Le membre de droite de (2.19b) admet l'approximation suivante :

$$\int_{\partial \Omega_f(t)} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) = \nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p - \mathbf{div} \left( \nu \langle \boldsymbol{\tau}_l \rangle_p - \mathbf{div}^{(3)} (\nu \langle \boldsymbol{\mathfrak{T}}_l \rangle_p) \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 r_0^{-1} \right)$$

*Preuve.* Ce résultat découle simplement de l'application du lemme 2.27 avec pour  $f$  chaque composante du vecteur  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  ainsi que de l'utilisation des notations précédentes pour les résultantes des forces et des moments.  $\square$

**Lemme 2.32** (force de contact à la surface des particules).

Le terme  $\nu \langle \mathbf{f}_c \rangle_p$  dans l'équation (2.19c), correspondant à la moyenne des forces de contact admet le développement suivant :

$$0 = \nu \langle \mathbf{f}_c \rangle_p - \mathbf{div} \left( \nu \langle \boldsymbol{\tau}_c \rangle_p - \mathbf{div}^{(3)} (\nu \langle \boldsymbol{\mathfrak{T}}_c \rangle_p) \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 r_0^{-1} \right)$$

*Preuve.* Remarquons que  $\mathbf{x}_{i, j}(t) = \mathbf{x}_{j, i}(t)$  tandis que le principe de l'action et de la réaction donne  $\mathbf{f}_{c, (i, j)}(t) = -\mathbf{f}_{c, (j, i)}(t)$ . Par sommation, ceci conduit à :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i, j}(t)) \mathbf{f}_{c, (i, j)}(t) = 0$$

Posant  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \delta_{\mathbf{x}_{i,j}(t)}(\mathbf{x})$  il vient

$$\phi\langle \mathbf{f} \rangle_s = \int_{\partial\Omega_s(t)} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i,j}(t)) \mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) = 0$$

Le résultat vient ensuite de l'application du lemme 2.27 avec pour  $f$  chaque composante du vecteur  $\mathbf{f}$  précédent, ainsi que de l'utilisation des notations précédentes pour les résultantes des forces et des moments. Cette preuve suppose que  $\mathbf{f}$  est décomposable en harmoniques sphériques, c'est-à-dire qu'elle vérifie les hypothèses du lemme 2.33.  $\square$

**Lemme 2.33** (convergence de la série des harmoniques sphériques).

*On considère une fonction  $f$  définie sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .*

1. *Si  $f$  est continue alors la série des harmoniques sphériques de  $f$  converge uniformément vers  $f$ .*
2. *Si  $f \in L^p$  avec  $1 \leq p < \infty$  alors la série des harmoniques sphériques converge sous certaines hypothèses.*

*Preuve.*

Pour 1. : Voir (Müller, 1966) et (Kalf et al., 1995).

Pour 2. : L'étude de la convergence de la série est une application de résultats de convergence sur les sommes de Césaro, voir (Bonami et Clerc, 1973), (Lin et Wang, 2004) et (Dai et Wang, 2008).  $\square$

### 2.3.6 Cinétique particule par particule

On a présenté dans le paragraphe 2.3.5 des approximations des interactions entre les particules d'une part et entre les phases d'autre part. Cela va permettre d'écrire différemment les membres de droite de (2.19b) et de (2.19c).

Nous nous occupons maintenant du terme  $\langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle$  dans (2.19a). Nous commençons par  $\phi\langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_s$  qui représente la moyenne dans la phase solide des forces internes exercées  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}$  sur la particule par le fluide, avant de passer au terme complet  $\langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle$ . Par la suite, on notera  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

**Lemme 2.34** (moyenne en phase solide des forces internes).

$$\begin{aligned} \phi\langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_s &= \nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p + \frac{r_p^2}{10} \Delta (\nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p) \\ &\quad - \mathbf{div} \left( \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l - \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c - \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} + \rho_s \Lambda \frac{r_p^2}{5} (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I}) \right\rangle_p \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

*Preuve.* Par définition de la moyenne dans la phase solide, il vient :

$$\begin{aligned}
& \phi \langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_s(t, \mathbf{x}) \\
= & \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\
= & \sum_{i=1}^N \rho_s \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (t, \mathbf{y}) - \mathbf{g} \right\} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \text{ en utilisant (2.8)} \\
= & \sum_{i=1}^N \rho_s \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \left\{ \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) - \mathbf{g} \right\} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\
& + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \left\{ \{ \boldsymbol{\omega}_i(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_i(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \mathbf{I} \} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \right\} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\
& \text{en utilisant (2.9a)}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Il s'agit d'une somme sur les  $N$  particules. Étudions la contribution de la  $i$ -ème particule et analysons tout d'abord le premier terme du membre de droite de (2.21). Le bilan de la conservation de la quantité de mouvement dans chaque particule (2.10) s'écrit encore :

$$\rho_s \Lambda \left\{ \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) - \mathbf{g} \right\} = \mathbf{f}_l(t, \mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}_i(t))$$

La contribution de la  $i$ -ème particule au premier terme du membre de droite de (2.21) s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
& \rho_s \Lambda \left\{ \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) - \mathbf{g} \right\} \left\{ \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^6 \right) \right\} \\
= & (\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c)(t, \mathbf{x}_i(t)) \left( \Lambda K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{r_p^2}{10} \Lambda \Delta K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right) \text{ en utilisant (2.15)}
\end{aligned}$$

En effectuant la somme sur toutes les particules et en divisant par  $\Lambda$  on obtient :

$$\rho_s \phi \left\langle \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt}(t) - \mathbf{g} \right\rangle_s = \nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p + \frac{r_p^2}{10} \Delta (\nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right) \tag{2.22}$$

La contribution de la  $i$ -ème particule au deuxième terme du membre de droite de (2.21) devient successive-

ment :

$$\begin{aligned} & \rho_s \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \left\{ \{\boldsymbol{\omega}_i(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_i(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \mathbf{I}\} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \right\} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ = & -\rho_s \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \left\{ \{\boldsymbol{\omega}_i(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_i(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \mathbf{I}\} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \right\} \\ & \{(\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))\} d\mathbf{y} \\ & + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^6 \right) \end{aligned}$$

après avoir utilisé le développement de Taylor (2.14) et en remarquant que les termes d'ordre zéro et deux de ce développement sont nuls, d'après le lemme 2.3.

$$\begin{aligned} = & \left( -\rho_s \left\{ \omega_{i,\alpha}(t) \omega_{i,\beta}(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\varphi\beta} \frac{d\omega_{i,\varphi}}{dt}(t) \right\} \frac{\partial K}{\partial x_\gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \int_{\mathbf{z} \in B} z_\beta z_\gamma d\mathbf{z} \right)_{1 \leq \alpha \leq 3} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^6 \right) \\ = & \left( -\frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} \left\{ \omega_{i,\alpha}(t) \omega_{i,\beta}(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\varphi\beta} \frac{d\omega_{i,\varphi}}{dt}(t) \right\} \frac{\partial K}{\partial x_\gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \delta_{\beta\gamma} \right)_{1 \leq \alpha \leq 3} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^6 \right) \\ & \text{d'après le lemme 2.3} \\ = & \left( -\frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} \left\{ \omega_{i,\alpha}(t) \omega_{i,\beta}(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\varphi\beta} \frac{d\omega_{i,\varphi}}{dt}(t) \right\} \frac{\partial K}{\partial x_\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right)_{1 \leq \alpha \leq 3} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^6 \right) \\ = & -\frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} \left( \{\boldsymbol{\omega}_i(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_i(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \mathbf{I}\} \cdot \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^6 \right) \end{aligned}$$

En effectuant la somme sur toutes les particules, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \rho_s \int_{\mathbf{y} \in \Lambda_i(t)} \left\{ \{\boldsymbol{\omega}_i(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_i(t) - |\boldsymbol{\omega}_i(t)|^2 \mathbf{I}\} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i(t)) \right\} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ = & -\frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} \mathbf{div} \left( \nu \langle \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I} \rangle_p \right) (t, \mathbf{x}) - \frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} \sum_{i=1}^N \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

En effet, le nombre de particules concernées par la somme dans le support du noyau est majorée par  $r_p^{-3} r_0^3$ .

Le deuxième terme du membre de droite de (2.23) s'écrit successivement :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}(t) \wedge \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \text{ en utilisant (2.11)} \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \varepsilon_{\nu\alpha\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \int_{\mathbf{y} \in \partial\Lambda_i(t)} (\mathbf{y}_\beta - x_{i,\beta}(t)) \sigma_{\gamma\varphi}(t, \mathbf{y}) n_\varphi(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (x_{i,j,\beta}(t) - x_{i,\beta}(t)) f_{c,(i,j),\gamma}(t) \right\} \frac{\partial K}{\partial x_\mu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right)_{1 \leq \nu \leq 3} \\
&\text{en utilisant (2.12)} \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( (\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\gamma} - \delta_{\nu\beta} \delta_{\mu\gamma}) \left\{ r_p \int_{\partial\Lambda_i(t)} \sigma_{\gamma\varphi}(t, \mathbf{y}) n_\varphi(t, \mathbf{y}) n_\beta(t, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + r_p f_{c,(i,j),\gamma}(t) n_{i,j,\beta}(t) \right\} \frac{\partial K}{\partial x_\mu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right)_{1 \leq \nu \leq 3} \\
&\text{avec le lemme 2.4} \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( (\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\gamma} - \delta_{\nu\beta} \delta_{\mu\gamma}) \{ \tau_{l,\gamma,\beta} + \tau_{c,\gamma,\beta} \}(t, \mathbf{x}_i(t)) \frac{\partial K}{\partial x_\mu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right)_{1 \leq \nu \leq 3} \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \{ -\tau_{l,\nu,\mu} - \tau_{c,\nu,\mu} + \tau_{l,\mu,\nu} + \tau_{c,\mu,\nu} \}(t, \mathbf{x}_i(t)) \frac{\partial K}{\partial x_\mu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right)_{1 \leq \nu \leq 3} \\
&= - \mathbf{div} \left( \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l - \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c - \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} \right\rangle_p \right) \tag{2.24}
\end{aligned}$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (2.23), puis en injectant ce dernier et (2.22) dans (2.21), on obtient finalement le résultat.  $\square$

**Lemme 2.35** (moyenne volumique des forces internes).

Le membre de droite de (2.19a) se développe en :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \frac{r_p^2}{10} \Delta (\nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p) \\
&+ \mathbf{div} \left\{ (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f + \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} - \frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I}) \right\rangle_p - \mathbf{div}^{(3)} \left( \nu \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_c \rangle_p \right) \right\} \\
&+ \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 (1 + r_0^{-1}) \right)
\end{aligned}$$

*Preuve.* On développe :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \phi \langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_s + (1 - \phi) \langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_f \text{ d'après la remarque 2.18} \\
&= \phi \langle \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \rangle_s + \mathbf{div} \langle (1 - \phi) \boldsymbol{\sigma} \rangle_f - \int_{\mathbf{y} \in \partial\Omega_f(t)} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})(t, \mathbf{y}) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Le résultat s'obtient ensuite directement des lemmes 2.32, 2.31 et 2.34.  $\square$

**Remarque 2.36.**

Dans cette modélisation, le rayon de la particule  $r_p$  est une donnée et  $r_0$  est un paramètre de modélisation.

La modélisation d'une suspension comme un milieu continu suppose de faire tendre  $r_p/r_0$  et  $r_0/R$  vers 0. Cela sous-entend que  $r_0$  n'est pas destiné à tendre vers 0 indépendamment de  $r_p$ . On peut donc écrire

$$\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3 (1 + r_0^{-1}) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3\right)$$

**Remarque 2.37.**

Le lemme 2.35 fait apparaître le terme  $\frac{r_p^2}{10}\Delta(\nu\langle\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c\rangle_p)$  qui n'est pas présent dans (Jackson, 1997) ou dans (Jackson, 2000), chapitre 2. En outre, les systèmes de lois de conservation construits dans (Jackson, 1997) ou au chapitre 2 de (Jackson, 2000) sont présentés comme des approximations en  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^2\right)$  du système (2.18)-(2.19). Dans la prochaine sous-section, nous montrons que le système (2.25) est une approximation du système (2.19) en  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3\right)$ . La construction proposée ici est rigoureuse dans la mesure où l'utilisation d'un noyau  $\mathcal{C}^\infty$  permet de justifier les estimations d'erreurs effectuées dans les différents développements de Taylor ou en harmoniques sphériques présentés ici. En revanche, Jackson (1997) utilise un noyau discontinu, la justification des estimations d'erreur qu'il présente est donc plus floue.

On peut retrouver le système donné par (Jackson, 1997) en faisant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{r_p^2}{10}\Delta(\nu\langle\mathbf{f}_l\rangle_p + \langle\mathbf{f}_c\rangle_p)(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3\right) \\ \left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3 &= \mathcal{O}\left(\rho_s\Lambda\frac{r_p^2}{5}\mathbf{div}(\nu\langle\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2\mathbf{I}\rangle_p)\right) \end{aligned}$$

### 2.3.7 Conservation de la quantité de mouvement – deuxième version

On approche les équations de conservation de la quantité de mouvement moyennées que l'on a présentées dans la section 2.3, à la proposition 2.23 :

**Proposition 2.38** (conservation de la quantité de mouvement – version intermédiaire).

Avec les notations définies aux sous-sections 2.2.2, 2.2.3 et 2.3.4 le système de la proposition 2.23 se voit approché à l'ordre 2 par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\{\rho_m\langle\mathbf{u}\rangle_m\} - \mathbf{div}\left\{(1-\phi)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_f - \rho_m\langle\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}\rangle_m + \nu\left\langle\frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} - \frac{\rho_s\Lambda r_p^2}{5}(\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2\mathbf{I})\right\rangle_p\right. \\ \left. - \mathbf{div}^{(3)}(\nu\langle\boldsymbol{\mathfrak{T}}_l + \boldsymbol{\mathfrak{T}}_c\rangle_p)\right\} = \rho_m\mathbf{g} + \frac{r_p^2}{10}\Delta(\nu\langle\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c\rangle_p) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} \rho_f\left\{\frac{\partial}{\partial t}((1-\phi)\langle\mathbf{u}\rangle_f) + \mathbf{div}\left((1-\phi)\langle\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}\rangle_f\right)\right\} - \mathbf{div}\left((1-\phi)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_f + \nu\langle\boldsymbol{\tau}_l\rangle_p - \mathbf{div}^{(3)}(\nu\langle\boldsymbol{\mathfrak{T}}_l\rangle_p)\right) \\ = \rho_f(1-\phi)\mathbf{g} - \nu\langle\mathbf{f}_l\rangle_p + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (2.25b)$$

$$\begin{aligned} \rho_s\Lambda\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\nu\langle\bar{\mathbf{u}}\rangle_p) + \mathbf{div}(\nu\langle\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}\rangle_p)\right\} - \mathbf{div}\left(\nu\langle\boldsymbol{\tau}_c\rangle_p - \mathbf{div}^{(3)}(\nu\langle\boldsymbol{\mathfrak{T}}_c\rangle_p)\right) \\ = \rho_s\Lambda\nu\mathbf{g} + \nu\langle\mathbf{f}_l\rangle_p + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (2.25c)$$



*Preuve.* On obtient la première équation (2.25a) à partir de la première équation (2.19a) de la proposition 2.23 et du lemme 2.35. La deuxième équation (2.25b) s'obtient de (2.19b) par le lemme 2.31. Enfin, la troisième équation (2.25c) s'obtient de (2.19c) par le lemme 2.32.  $\square$

**Proposition 2.39** (conservation du moment cinétique particulaire).

Avec les notations de l'équation (2.12) et du lemme 2.4, on donne ici la moyenne particulaire de la conservation du moment cinétique d'une particule :

$$I_p \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\nu \langle \boldsymbol{\omega} \rangle_p) + \mathbf{div} (\nu \langle \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{u} \rangle_p) \right\} = \nu \boldsymbol{\varepsilon} : \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_c \rangle_p$$

*Preuve.* On rappelle la conservation du moment cinétique (2.12) au centre de masse de chaque particule  $i$ . On applique le lemme 2.21 pour calculer le terme de moyenne particulaire du membre de gauche de cette équation, et on remarque qu'on peut exprimer la moyenne particulaire du membre de droite en fonction de  $r_p$  et des  $\mathbf{n}_{i,j}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & I_p \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\nu \langle \boldsymbol{\omega} \rangle_p) + \mathbf{div} (\nu \langle \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{u} \rangle_p) \right\} \\ &= r_p \sum_{i=1}^N K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \left\{ \int_{\partial \Lambda_i(t)} \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) \wedge (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})(t, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{n}_{i,j}(t) \wedge \mathbf{f}_{c,(i,j)}(t) \right\} \end{aligned}$$

et on utilise les notations précédentes pour les tenseurs des contraintes hydrodynamiques et des contacts.  $\square$

### 2.3.8 Terme d'inertie et variance de la vitesse

Dans ce paragraphe, on cherche à remplacer dans (2.25a)-(2.25c) les moyennes des produits du type  $\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle$  par des produits de moyennes du type  $\langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle$ . Pour cela, on va chercher à évaluer la différence de ces deux quantités. Celle-ci s'apparente à une variance et s'interprète comme une température particulaire pour  $\mathbf{V}_p$ , et  $\mathbf{V}_s$ . En revanche,  $\mathbf{V}_f$  correspond à une énergie turbulente.

**Définition 2.40** (variance de la vitesse).

Pour chacune des moyennes, on définit une variance de la vitesse :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m &= \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_m - \langle \mathbf{u} \rangle_m \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_m \\ \mathbf{V}_f &= \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_f - \langle \mathbf{u} \rangle_f \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_f \\ \mathbf{V}_s &= \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_s \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_s \\ \mathbf{V}_p &= \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle_p \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_p \end{aligned}$$

**Remarque 2.41** (variance de la vitesse et température granulaire).

Contrairement à ce que mentionne, Jackson (1997) à l'équation (42), on remarque que

$$\mathbf{V}_s \neq \langle (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_s) \otimes (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_s) \rangle_s \quad (2.26)$$

Il en est de même pour les autres moyennes.

Par commodité et pour alléger les expressions, on introduit la notation suivante :

$$\mathbf{tens}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

En effet, en développant, on trouve que

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) \mathbf{V}_s(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{y} \in \Omega_s(t)} \mathbf{tens} \left( \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) - \frac{1}{\phi(t, \mathbf{x})} \int_{\mathbf{z} \in \Omega_s(t)} \mathbf{u}(t, \mathbf{z}) K(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, dz \right) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ \langle (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_s) \otimes (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_s) \rangle_s &= \int_{\mathbf{y} \in \Omega_s(t)} \mathbf{tens} \left( \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) - \frac{1}{\phi(t, \mathbf{y})} \int_{\mathbf{z} \in \Omega_s(t)} \mathbf{u}(t, \mathbf{z}) K(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \, dz \right) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Nous notons ici que dans (Jackson, 2000), les deux quantités présentées en (2.26) sont traitées comme étant identiques.

**Définition 2.42** (dérivées lagrangiennes).

Pour tout champ de vecteur  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ , on définit

$$\begin{aligned}\frac{D_m \mathbf{v}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle_m \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ \frac{D_f \mathbf{v}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle_f \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ \frac{D_p \mathbf{v}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle_p \cdot \nabla) \mathbf{v}\end{aligned}$$

**Lemme 2.43** (forme conservative des dérivées lagrangiennes des variances des vitesses).

$$\rho_m \frac{D_m \langle \mathbf{u} \rangle_m}{Dt} + \mathbf{div}(\rho_m \mathbf{V}_m) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \langle \mathbf{u} \rangle_m) + \mathbf{div}(\rho_m \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_m) \quad (2.27a)$$

$$(1 - \phi) \frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle_f}{Dt} + \mathbf{div}((1 - \phi) \mathbf{V}_f) = \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) + \mathbf{div}((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_f) \quad (2.27b)$$

$$\nu \frac{D_p \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_p}{Dt} + \mathbf{div}(\nu \mathbf{V}_p) = \frac{\partial}{\partial t} (\nu \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_p) + \mathbf{div}(\nu \langle \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \rangle_p) \quad (2.27c)$$

*Preuve.* On traite ici le cas de la moyenne dans la phase fluide, les autres moyennes se traitent de façon identique. On a :

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) + \mathbf{div}((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_f) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) + \mathbf{div}((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_f + (1 - \phi) \mathbf{V}_f) \\ &= (1 - \phi) \left( \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_f}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle_f \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle_f \right) + \mathbf{div}((1 - \phi) \mathbf{V}_f) \\ & \quad + \left( \frac{\partial}{\partial t} (1 - \phi) + \mathbf{div}((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) \right) \langle \mathbf{u} \rangle_f\end{aligned}$$

D'après la conservation de la masse (2.18b) dans la phase fluide, le dernier terme de l'équation précédente est nul, d'où le résultat.  $\square$

### 2.3.9 Lois de conservation – version finale

Nous allons ici donner deux systèmes comportant les conservations de la masse et de la quantité de mouvement approchées en  $\mathcal{O}(r_p^3/r_0^3)$  et en  $\mathcal{O}(r_p^2/r_0^2)$ .

**Proposition 2.44** (Système de lois de conservation – ordre 2).

Nous utilisons les notations introduites à la définition 2.40 pour donner une forme conservative du système

introduit aux propositions 2.38 et 2.22.

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{D_m \langle \mathbf{u} \rangle_m}{Dt} - \mathbf{div} \left\{ ((1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f - \rho_m \mathbf{V}_m + \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} - \frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I}) \right\rangle_p \right. \\ \left. - \mathbf{div}^{(3)} (\nu \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_c \rangle_p) \right\} = \rho_m \mathbf{g} + \frac{r_p^2}{10} \Delta (\nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle_p) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \rho_f (1 - \phi) \frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle_f}{Dt} - \mathbf{div} \left\{ (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f - \rho_f (1 - \phi) \mathbf{V}_f + \nu \langle \boldsymbol{\tau}_l \rangle_p - \mathbf{div}^{(3)} (\nu \langle \boldsymbol{\tau}_l \rangle_p) \right\} \\ = \rho_f (1 - \phi) \mathbf{g} - \nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\begin{aligned} \rho_s \left( \phi - \frac{\Lambda r_p^2}{10} \Delta \nu \right) \frac{D_p \langle \mathbf{u} \rangle_p}{Dt} - \mathbf{div} \left\{ \nu \langle \boldsymbol{\tau}_c \rangle_p - \rho_s \phi \mathbf{V}_p - \mathbf{div}^{(3)} (\nu \langle \boldsymbol{\tau}_c \rangle_p) \right\} \\ = \rho_s \left( \phi - \frac{\Lambda r_p^2}{10} \Delta \nu \right) \mathbf{g} + \nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (2.28c)$$

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} + \mathbf{div} ((1 - \phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) = 0 \quad (2.28d)$$

$$\mathbf{div} (\langle \mathbf{u} \rangle_m) = 0 \quad (2.28e)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \mathbf{div} (\nu \langle \mathbf{u} \rangle_p) = 0 \quad (2.28f)$$

*Preuve.* Les équations (2.28a) et (2.28b) proviennent directement de (2.25a) et (2.25b) avec le lemme 2.43. Pour obtenir (2.28c) à partir de (2.25c), on a de plus utilisé la preuve de la proposition 2.14 pour remplacer  $\Lambda \nu$  par  $\phi - \frac{\Lambda r_p^2}{10} \Delta \nu$  avec une erreur en  $(r_p/r_0)^3$ . L'équation (2.28e) provient de la somme de (2.18a) et (2.18b).  $\square$

#### Remarque 2.45.

Les quantités  $\phi$  et  $\Lambda \nu$  jouent des rôles similaires sur le plan de la modélisation, c'est pourquoi nous allons réaliser une approximation à l'ordre un de la proposition 2.44. À noter que dans (Jackson, 2000), et dans (Jackson, 1997) les moments d'ordre deux sont conservés alors qu'il est annoncé une approximation à l'ordre un.

#### Proposition 2.46 (Système de lois de conservation – ordre 1).

Si on se restreint à l'ordre un, le système de la proposition 2.44 devient :

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{D_m \langle \mathbf{u} \rangle_m}{Dt} - \mathbf{div} \left\{ (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f - \rho_m \mathbf{V}_m + \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} - \frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I}) \right\rangle_p \right\} \\ = \rho_m \mathbf{g} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.29a)$$

$$\begin{aligned} \rho_f (1 - \phi) \frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle_f}{Dt} - \mathbf{div} \left\{ (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_f - \rho_f (1 - \phi) \mathbf{V}_f + \nu \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T \rangle_p \right\} \\ = \rho_f (1 - \phi) \mathbf{g} - \nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.29b)$$

$$\rho_s \phi \frac{D_p \langle \mathbf{u} \rangle_p}{Dt} - \mathbf{div} \left\{ \nu \langle \boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T \rangle_p - \rho_s \phi \mathbf{V}_p \right\} = \phi \rho_s \mathbf{g} + \nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right) \quad (2.29c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_p) = \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right) \quad (2.29d)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \operatorname{div} ((1-\phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) = 0 \quad (2.29e)$$

$$\operatorname{div} (\langle \mathbf{u} \rangle_m) = 0 \quad (2.29f)$$

*Preuve.* Les moments d'ordre 2 sont négligés par application du lemme 2.27. La proposition 2.14 permet de négliger les termes en  $\Delta\nu$ . La preuve du lemme 2.34 permet de négliger le terme en  $\Delta\nu \langle \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_c \rangle$ .

L'équation (2.24) implique

$$\nu \langle \boldsymbol{\tau}_l - \boldsymbol{\tau}_l^T \rangle_p = \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right)$$

$$\nu \langle \boldsymbol{\tau}_c - \boldsymbol{\tau}_c^T \rangle_p = \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right)$$

□

**Remarque 2.47.** On sait d'après (2.15) que

$$\phi \langle \mathbf{u} \rangle_s = \Lambda \nu \langle \mathbf{u} \rangle_p + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^2 \right)$$

$$\phi \langle \mathbf{u} \rangle_s = \Lambda \nu \langle \mathbf{u} \rangle_p + \frac{r_p^2}{10} \Delta (\Lambda \nu \langle \mathbf{u} \rangle_p) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r_p}{r_0} \right)^3 \right)$$

Si on injecte cette approximation à l'ordre un dans la proposition 2.46, alors la compatibilité des équations (2.29a), (2.29b) et (2.29c) implique la relation

$$\rho_m \mathbf{V}_p + \nu \left\langle \frac{\rho_s \Lambda r_p^2}{5} (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I}) \right\rangle_p - ((1-\phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f \cdot \nabla) (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_p) - (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_p \cdot \nabla) ((1-\phi) \langle \mathbf{u} \rangle_f) = \rho_s \phi \mathbf{V}_p + \rho_s (1-\phi) \mathbf{V}_f \quad (2.30)$$

## 2.4 Suspensions newtoniennes à faible nombre de Stokes

Le système de la proposition 2.46 présente de nombreuses quantités inconnues. Le but est ici de donner des systèmes de lois de conservation qui en comportent un nombre restreint, par exemple, deux vitesses une pression et la fraction volumique. Nous allons étudier des systèmes dans lesquels les effets inertiels sont faibles, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho_f U R}{\eta_0}$  vérifie  $Re = \mathcal{O}(1)$ .  $U$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement macroscopique et  $\eta_0$  une viscosité caractéristique du fluide suspendant. Ce cadre étant trop général, nous allons effectuer des hypothèses supplémentaires que nous choisirons parmi les quatre assertions suivantes :

$\mathcal{H}_1$  Le fluide est newtonien de viscosité  $\eta_0$ .

$\mathcal{H}_2$  Les sphères sont de flotabilité neutre :  $\rho_f = \rho_s$ .

$\mathcal{H}_3$  Le nombre de Reynolds est négligeable :  $Re = \frac{\rho_f U R}{\eta_0} \ll 1$ .

$\mathcal{H}_4$  La suspension est très diluée, c'est à dire  $\phi < 0.005$ .

Nous utiliserons par la suite le résultat suivant :

**Proposition 2.48.**

1. Si on suppose  $\mathcal{H}_1$  alors  $(1 - \phi)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_f = \eta_0 D(\langle\mathbf{u}\rangle) - (1 - \phi)\langle p\rangle_f$
2. Si on suppose  $\mathcal{H}_2$  alors pour toute fonction  $\xi$  on a  $\langle\xi\rangle = \langle\xi\rangle_m$ .

*Preuve.* Par définition,  $(1 - \phi)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_f = \eta_0(1 - \phi)\langle D(\mathbf{u})\rangle_f - (1 - \phi)\langle p\rangle_f$ . Mais

$$\begin{aligned} (1 - \phi(t, \mathbf{x}))\langle D(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))\rangle_f &= \int_{\Omega_f(t)} D(\mathbf{u}(t, \mathbf{y})) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} D(\mathbf{u}(t, \mathbf{y})) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= D\left(\int_{\Omega} (\mathbf{u}(t, \mathbf{y})) K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}\right) = D(\langle\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\rangle) \end{aligned}$$

□

Si on fait l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  alors on peut introduire le nombre de Stokes  $St = T_1/T_2$  qui est le rapport entre deux constantes de temps, voir le chapitre deux de (Guazzelli et Morris, 2012) pour plus de détails.  $T_2 = r_p/U$  est le temps caractéristique lié à la vitesse de l'écoulement à l'échelle particulaire.  $T_1$  est celui lié à l'établissement de la traînée de Stokes. Le nombre de Stokes modélise donc le rapport entre la fluctuation de la trajectoire des particules et celle des lignes de courant. Nous interprétons la proposition 2.49 comme le fait que la trajectoire des particules fluctue très lentement par rapport aux lignes de courant.

**Proposition 2.49.** Le nombre de Stokes vérifie  $St \ll 1$ .

*Preuve.* Si une particule sphérique de vitesse  $\mathbf{u}(t)$  est plongée dans un fluide immobile, alors cette vitesse est donnée par l'équation :

$$\rho_s \Lambda \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) + 6\pi r_p \eta_0 \mathbf{u}(t) = 0 \iff \frac{2\rho_s r_p^2}{9\eta_0} \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) + \mathbf{u}(t) = 0$$

On déduit de ceci que  $T_1 = 2\rho_s r_p^2 / (9\eta_0)$  ce qui implique

$$St = \frac{2\rho_s r_p U}{9\eta_0} = Re \frac{2r_p}{9R}$$

L'hypothèse  $Re = \mathcal{O}(1)$  garantit que  $St = \mathcal{O}(r_p/R)$  comme  $r_p \ll R$  nous avons  $T_1 \ll T_2$ . □

Les termes d'inertie et les interactions de contact rendent la modélisation des suspensions dans un fluide newtonien très difficile. Dans un premier temps, on va se placer dans un cadre où ces deux difficultés sont absentes. Nous donnerons ensuite des éléments pour intégrer celles-ci.

### 2.4.1 Suspensions stokésiennes diluées

Dans cette sous-section, nous allons reconstruire le modèle d'Einstein (1906). Dans ce but, nous effectuons les hypothèses  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$ . Ainsi, on peut négliger tous les termes d'inertie, moments compris, dans la proposition 2.46. Puisque  $\mathcal{H}_4$  implique que les sphères sont éloignées les unes des autres, les forces de contact  $\mathbf{f}_c$  sont donc nulles et

$$\nu\langle\mathbf{f}_c\rangle_p = 0 \quad \nu\langle\boldsymbol{\tau}_c\rangle_p = 0$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$-\text{div} \left( 2\eta_0 D(\langle\mathbf{u}\rangle) - (1 - \phi)\langle p\rangle_f + \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} \right\rangle_p \right) = \rho_m \langle\phi\rangle \mathbf{g} \quad (2.31a)$$

$$0 = \rho_s \phi \mathbf{g} + \nu \langle\mathbf{f}_l\rangle_p \quad (2.31b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \langle \mathbf{u} \rangle_p) = 0 \quad (2.31c)$$

$$\operatorname{div}(\langle \mathbf{u} \rangle) = 0 \quad (2.31d)$$

On va donner un développement à l'ordre 2 de la force de traînée d'une particule dans l'hypothèse où cette particule perturbe un écoulement de Stokes. Autrement dit, les particules sont assez éloignées les unes des autres pour que l'effet d'une particule soit vu comme une perturbation de l'écoulement global. Dans ce but, nous utiliserons des résultats de microhydrodynamique.

**Proposition 2.50** (Interaction particule-fluide).

Soit  $B(\mathbf{x}_0, r_p)$  une boule de centre  $\mathbf{x}_0$  et de rayon  $r_p$ , vérifiant  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  pour  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r_p)$ . On suppose que cette sphère perturbe un écoulement de Stokes vérifiant

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_0) + \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) : \nabla \otimes \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0)$$

La pression non perturbée vérifie alors

$$P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\eta_0 \mathbf{I} : \nabla \otimes \nabla \mathbf{U})$$

L'expression de l'interaction entre la sphère et le fluide, sur  $\partial B(\mathbf{x}_0, r_p)$  est donnée par

$$\begin{aligned} (-p\mathbf{I} + 2\eta_0 D(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} &= \frac{3\eta_0}{2r_p}(\mathbf{U} - \mathbf{u}_0) + 3\eta_0(W(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{n}) + 5\eta_0 D(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \\ &+ \frac{\eta_0 r_p}{2} \left[ \frac{35}{4}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\gamma} + \frac{5}{3}\mathbf{n} \wedge (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) - 3(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \Delta \mathbf{U} + \frac{3}{2}\Delta \mathbf{U} \right] \quad (2.32) \\ &- P\mathbf{n} - (\rho_f r_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \boldsymbol{\theta} &= \nabla(\nabla \wedge \mathbf{U}) + {}^T(\nabla(\nabla \wedge \mathbf{U})) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à  $B(\mathbf{x}_0, r_p)$  et  $W(\mathbf{U}) = \nabla(\mathbf{U}) - D(\mathbf{U})$ .  $(\mathbf{u}, p)$  désignent la solution perturbée pour  $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{x}_0, r_p)$ .

*Preuve.* On déduit des équations de Stokes une expression exacte de la pression non perturbée  $P$ . Ensuite, on utilise le lemme 2.52. Le résultat est alors obtenu en calculant directement  $(-p\mathbf{I} + 2\eta_0 D(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}$  alors que l'on connaît explicitement  $\mathbf{u}$  et  $p$ .  $\square$

**Lemme 2.51** (hessien de la vitesse).

Avec les notations de la proposition 2.50, on peut décomposer le tenseur  $\nabla \otimes \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0)_{\gamma, \eta, \chi} = \frac{\partial U_\chi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_\gamma \partial x_\eta}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0)_{\gamma, \eta, \chi} &= \frac{1}{10} \sum_{\alpha} (4\delta_{\gamma, \eta} \delta_{\chi, \alpha} - \delta_{\gamma, \chi} \delta_{\eta, \alpha} - \delta_{\eta, \chi} \delta_{\gamma, \alpha})(\Delta \mathbf{U})_{\alpha} \\ &- \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} (\varepsilon_{\gamma, \chi, \alpha} \delta_{\beta, \eta} + \varepsilon_{\eta, \chi, \beta} \delta_{\alpha, \gamma}) (\nabla(\nabla \wedge \mathbf{U}) + {}^T(\nabla(\nabla \wedge \mathbf{U})))_{\alpha, \beta} \\ &+ \gamma_{\gamma, \eta, \chi} \\ \gamma_{\gamma, \eta, \chi} &= \frac{1}{3} (\nabla \otimes \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0)_{\gamma, \eta, \chi} + \nabla \otimes \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0)_{\chi, \gamma, \eta} + \nabla \otimes \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}_0)_{\eta, \chi, \gamma}) \\ &- \frac{1}{15} (\delta_{\gamma, \eta} \Delta(\mathbf{U})_{\chi} + \delta_{\gamma, \chi} \Delta(\mathbf{U})_{\eta} + \delta_{\eta, \chi} \Delta(\mathbf{U})_{\gamma}) \end{aligned}$$

*Preuve.* Voir (Nadim et Stone, 1991).  $\square$

**Lemme 2.52** (Perturbation d'une sphère dans un écoulement de Stokes).

On se place dans les hypothèses de la proposition 2.50. Les solutions perturbées du problème de Stokes  $(\mathbf{u}, p)$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_0 &= \boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \frac{r_p^3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + \left( 1 - \frac{3r_p}{4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} - \frac{r_p^3}{4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \right) \mathbf{U} \\
&\quad - \left( \frac{3r_p}{4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} - \frac{3r_p^3}{4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) (\mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \\
&\quad + D(\mathbf{U}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \left( 1 - \frac{r_p^5}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \right) + W(\mathbf{U}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \left( 1 - \frac{r_p^3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \right) \\
&\quad - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) (D(\mathbf{U}) : ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))) \frac{5r_p^3}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \left( 1 - \frac{r_p^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \right) \\
&\quad + ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) : \nabla \otimes \nabla \mathbf{U} \cdot \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{r_p^5}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \left( \frac{-15r_p^2}{8\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} + \frac{7}{8} \right) ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) : \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{1}{2} \\
&\quad - 35 \frac{r_p^7}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^7} \left( \frac{-r_p^2}{8\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} + \frac{1}{8} \right) ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) : \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{1}{2} \\
&\quad - \frac{r_p^5}{3\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\nabla(\nabla \wedge \mathbf{U}) + {}^T(\nabla(\nabla \wedge \mathbf{U})))) \cdot \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{r_p^3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \left( \frac{9r_p^2}{20\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} - \frac{1}{4} \right) ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{U}) \cdot \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{r_p^3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \left( \frac{-3r_p^2}{20\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} - \frac{1}{4} \right) \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{U}) \cdot \frac{1}{2} \\
p(\mathbf{x}) &= P - \frac{3r_p \eta_0}{2} \frac{\mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} - \frac{5\eta_0 r_p^3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} D(\mathbf{U}) : ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \\
&\quad + \eta_0 r_p \left[ \left( 1 - \frac{r_p^3}{4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{U}) - \frac{35r_p^5}{8\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^7} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) : \boldsymbol{\gamma} \right] \\
&\quad + \rho_f \mathbf{g} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)
\end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\gamma}$  est défini dans le lemme 2.51.

*Preuve.* On utilise le théorème de superposition, voir (Guazzelli et Morris, 2012), annexe du chapitre 1. Dans la proposition 2.50, on donne l'expression de la pression non perturbée  $P$ . Le chapitre 8 de (Leal, 2007) permet de calculer la perturbation des termes d'ordre 0 et 1. Nadim et Stone (1991) donne la perturbation du terme d'ordre 2.  $\square$

Dans (Jackson, 1997), les fermetures sont données pour  $\nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p$   $\nu \langle \boldsymbol{\tau}_l \rangle_p$  en régime dilué, à partir de la force d'interaction fluide-particule donnée à la proposition 2.50

$$\nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p = -\rho_f \phi \mathbf{g} + \frac{9\eta_0 \phi}{2r_p^2} \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f - \langle \mathbf{u} \rangle_p + \frac{r_p^2}{6} \boldsymbol{\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle_f \right) \quad (2.33a)$$

$$\nu \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T \rangle_p = -\phi \langle p \rangle_f \mathbf{I} + 5\eta_0 \phi D(\langle \mathbf{u} \rangle_f) \quad (2.33b)$$

On déduit de (2.33a) et de (2.33b) un problème fermé :

( $P_{dil}$ ) :

Trouver  $\langle \mathbf{u} \rangle : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle_p : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\langle p \rangle_f : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{div} (2\eta_0 D(\langle \mathbf{u} \rangle) - \langle p \rangle_f \mathbf{I} + 5\eta_0 \phi D(\langle \mathbf{u} \rangle_f)) = ((1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s) \mathbf{g} \end{array} \right. \quad (2.34a)$$

$$0 = \phi(\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} + \frac{9\eta_0 \phi}{2r_p^2} \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f - \langle \mathbf{u} \rangle_p + \frac{r_p^2}{6} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle_f \right) \quad (2.34b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{div} (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_p) = 0 \quad (2.34c)$$

$$\mathbf{div} (\langle \mathbf{u} \rangle) = 0 \quad (2.34d)$$

+ conditions au bord + conditions initiales

On rappelle que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ .

L'équation (2.34b) s'écrit aussi  $\langle \mathbf{u} \rangle_p = \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{r_p^2}{6} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{2r_p^2}{9\eta_0} (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g}$ .

On en déduit  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{\phi r_p^2}{6} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle_f + \phi \frac{2r_p^2}{9\eta_0} (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g}$ .

Le système (2.34a), (2.34c), (2.34d) est alors équivalent à :

**(P<sub>f</sub>) :**

Trouver  $\langle \mathbf{u} \rangle_f : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\langle p \rangle_f : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{div} \left( 2\eta_0 D \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{\phi r_p^2}{6} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle_f + \phi \frac{2r_p^2}{9\eta_0} (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \right) \right. \\ \left. - \langle p \rangle_f \mathbf{I} + 5\eta_0 \phi D(\langle \mathbf{u} \rangle_f) \right) = ((1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s) \mathbf{g} \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (2.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{div} \left( \phi \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{r_p^2}{6} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{2r_p^2}{9\eta_0} (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \right) \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (2.35b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f + \frac{\phi r_p^2}{6} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle_f + \phi \frac{2r_p^2}{9\eta_0} (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (2.35c)$$

+ conditions au bord + conditions initiales

On écrit une version sans dimension de (2.35) telle que  $\tilde{\mathbf{x}} = L\mathbf{x}$  et  $\tilde{\mathbf{u}} = U\mathbf{u}$  où  $U$  est une vitesse de référence. On néglige ensuite les termes en  $\mathcal{O}(r_p^2/L^2)$ . On ajoute une condition de Dirichlet en vitesse et une condition de non-pénétration pour la fraction volumique et on note  $\mathbf{n}_e$  la normale sortante de  $\Omega$ . En omettant les  $\tilde{\cdot}$  on obtient le problème :

**(P<sub>E</sub>) :**

Trouver  $\langle \mathbf{u} \rangle_f : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\langle p \rangle_f : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{div} \left( 2 \left( 1 + \frac{5\phi}{2} \right) D(\langle \mathbf{u} \rangle_f) - \langle p \rangle_f \mathbf{I} \right) = ((1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s) \frac{L^2}{\eta_0 U} \mathbf{g} \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{div} \left( \phi \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f + (\rho_s - \rho_f) \frac{2r_p^2}{9\eta_0 U} \mathbf{g} \right) \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (2.36b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f + \phi(\rho_s - \rho_f) \frac{2r_p^2}{9\eta_0 U} \mathbf{g} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (2.36c)$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_f = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.36d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \phi \left( \langle \mathbf{u} \rangle_f + (\rho_s - \rho_f) \frac{2r_p^2}{9\eta_0 U} \mathbf{g} \right) \right) \cdot \mathbf{n}_e = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.36e)$$

+ conditions initiales



Le système (2.36) a été obtenu supposant que  $r_p \ll R$  et en faisant les hypothèses  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_3$ , et  $\mathcal{H}_4$ . On retrouve ainsi le résultat obtenu par Einstein (1906). Ce choix de modélisation implique  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle_f = \langle \mathbf{u} \rangle_p$ . Dans ces conditions les particules sont transportées passivement. Si on prend  $St > 0$ , c'est-à-dire que l'on considère que les effets inertiels des particules ne sont pas négligeables, alors on peut modéliser des effets de migration en régime dilué. Le chapitre 8 de (Guazzelli et Morris, 2012) donne une discussion sur ce sujet. Dans les sous-sections suivantes, nous aborderons plutôt des effets de migration à faible nombre de Stokes mais dans des régimes plus concentrés.

### 2.4.2 Suspensions à nombre de Reynolds nul pour une fraction volumique quelconque

Dans cette sous-section, nous allons reconstruire le modèle de Miller et Morris (2006). Dans ce but, nous effectuons les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . On peut donc négliger les termes d'inertie dans la proposition 2.46, et on obtient le système suivant

$$-\mathbf{div} \left( 2\eta_0 D(\langle \mathbf{u} \rangle) - (1 - \phi) \langle p \rangle_f + \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} \right\rangle_p \right) = ((1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s) \mathbf{g} \quad (2.37a)$$

$$-\mathbf{div} \left( \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} \right\rangle_p \right) = \rho_s \phi \mathbf{g} + \nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p \quad (2.37b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{div} (\phi \langle \mathbf{u} \rangle_p) = 0 \quad (2.37c)$$

$$\mathbf{div} (\langle \mathbf{u} \rangle) = 0 \quad (2.37d)$$

Le système (2.37) est très proche de celui donné par Lhuillier (2009). Il apparaît ici que le terme portant la contribution de la phase particulaire au bilan des forces n'est pas le même selon que l'on se place dans le mélange (2.37a) ou dans la phase particulaire (2.37b). Ainsi, en accord avec Nott et al. (2011), nous obtenons que l'hypothèse due à Nott et Brady (1994) selon laquelle les deux contributions mentionnées sont égales est fausse. Cependant, il est possible de retrouver les modèles construits avec cet argument illégitime en effectuant des fermetures. Nous allons traiter l'exemple du *suspension balance model* proposé par Miller et

Morris (2006). Il suffit de donner des équations constitutives pour  $\nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p$ ,  $\nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} \right\rangle_p$ ,  $\nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} \right\rangle_p$ .

Dans (Lhuillier, 2009) le système de lois de conservation est donc complété par trois équations faisant intervenir de nouvelles inconnues si bien qu'il faut faire des hypothèses plus fortes pour obtenir un problème comportant autant d'équations que d'inconnues. Dans une suspension assez concentrée, il est difficile de séparer les effets liés à des interactions hydrodynamiques inter-particules à courte distance de ceux liés à des interactions de contact. C'est pourquoi il est assez naturel d'introduire un tenseur de contrainte particulaire  $\boldsymbol{\tau}_p$  vérifiant la relation :

$$\phi \langle p \rangle_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_p (\phi, D(\langle \mathbf{u} \rangle)) = \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T}{2} \right\rangle_p \quad (2.38)$$

Le terme en  $\phi \langle p \rangle_f$  est introduit ici dans un souci de cohérence avec Lhuillier (2009) qui mentionne un terme en  $\langle p \rangle_f$  dans son équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange. On notera d'autre part que ce choix est compatible avec le cas dilué. En effet, on peut voir l'équation (2.33b) comme un cas particulier de (2.38).

On suppose en outre que

$$\nu \langle \mathbf{f}_l \rangle_p = \frac{9\eta_0}{2r_p^2} s(\phi) (\langle \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle_p) + \mathbf{div} \left( \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} \right\rangle_p \right) - (\nabla (\phi \langle p \rangle_f) + \rho_f \phi \mathbf{g}) \quad (2.39)$$

où  $s(\phi)$  est un terme correctif de la trainée de Stokes évalué par exemple dans (Miller et Morris, 2006) p. 152 équation (11) d'après les travaux expérimentaux de Richardson et Zaki (1997). A noter que Lhuillier (2009)

ne tient pas rigoureusement compte du terme  $\phi\langle p \rangle_f$ , à savoir que celui-ci est intégré dans (2.37b) mais alors qu'il ne l'est pas dans (2.38). Lorsqu'on injecte (2.39) dans (2.37b) on obtient :

$$\langle \mathbf{u} \rangle_p = \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{2r_p^2}{9\eta_0} s^{-1}(\phi) \{ \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_p(\phi, D(\langle \mathbf{u} \rangle))) + \phi(\rho_s - \rho_f)\mathbf{g} \} \quad (2.40)$$

On en déduit alors le problème :

( $P_{sbm}$ ) :

Trouver  $\langle \mathbf{u} \rangle : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\langle p \rangle_f : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi : ]0; \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}\langle \mathbf{u} \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \quad (2.41a) \\ -\mathbf{div}(-\langle p \rangle_f \mathbf{I} + 2\eta_0 D(\langle \mathbf{u} \rangle) + \boldsymbol{\tau}_p(\phi, D(\langle \mathbf{u} \rangle))) = (\phi\rho_s + (1-\phi)\rho_f)\mathbf{g} & \text{dans } \Omega \quad (2.41b) \\ \partial_t \phi + (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \phi = -\mathbf{div} \left\{ \frac{2r_p^2}{9\eta_0} \phi s^{-1}(\phi) (\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_p(\phi, D(\langle \mathbf{u} \rangle))) \right. \\ \quad \left. + \phi(\rho_s - \rho_f)\mathbf{g} \right\} & \text{dans } \Omega \quad (2.41c) \\ \langle \mathbf{u} \rangle = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad (2.41d) \\ \{-\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_p(\phi, D(\langle \mathbf{u} \rangle))) + \phi(\rho_s - \rho_f)\mathbf{g}\} \cdot \mathbf{n}_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad (2.41e) \\ + \text{conditions initiales} & \end{array} \right.$$

En suivant Miller et Morris (2006), on prendra pour  $\tau_p$  et  $s$  les équations constitutives suivantes

$$\boldsymbol{\tau}_p = \eta_0 (2\eta_p(\phi) D(\langle \mathbf{u} \rangle) - \eta_m(\phi) |2D(\langle \mathbf{u} \rangle)| Q) \quad (2.41f)$$

$$s(\phi) = \phi \left( \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right) (1 - \phi)^{\alpha-1} \right)^{-1} \quad (2.41g)$$

avec :

$$\eta_p(\phi) = 2.5\phi_m \left( \frac{\frac{\phi}{\phi_m}}{1 - \frac{\phi}{\phi_m}} \right) + K_s \left( \frac{\frac{\phi}{\phi_m}}{1 - \frac{\phi}{\phi_m}} \right)^2 \quad (2.41h)$$

$$\eta_m(\phi) = K_n \left( \frac{\frac{\phi}{\phi_m}}{1 - \frac{\phi}{\phi_m}} \right)^2 \quad (2.41i)$$

$K_n$  et  $K_s$  sont des constantes qui pilotent le ratio entre les contraintes de cisaillement et les contraintes normales.  $\phi_m$  est la fraction volumique maximale et  $\alpha$  pilote le comportement du terme correctif de la trainée de Stokes. Ce sont des paramètres physiques pouvant varier.

**Remarque 2.53.** Le modèle obtenu par Miller et Morris (2006) constitue finalement une approximation correcte puisque nous l'avons retrouvé en effectuant une hypothèse raisonnable. En effet, Nott et al. (2011) avaient proposé une fermeture de l'équation constitutive de la force d'interaction entre les phases fluide et granulaire proche de (2.39). On retrouve l'équation (62) de (Nott et al., 2011) à partir de (2.39) en prenant

$$n\langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p = \frac{\langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T \rangle_p}{2} - \phi\langle p \rangle_f \mathbf{I} \quad (2.42)$$

où  $n\langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p$  est défini dans (Nott et al., 2011) comme la contribution des forces hydrodynamiques interparticulaires à la contrainte totale et exprimé comme la somme des moyennes des moments de l'interaction fluide-particule. Encore une fois, la présence du terme  $\phi\langle p \rangle_f$  dans (2.42) est discutable et il serait plus rigoureux, de supprimer celui-ci de (2.38) et de (2.42) ce qui implique de remplacer  $\langle p \rangle_f$  par  $(1-\phi)\langle p \rangle_f$  dans (2.41b). Nous reviendrons plus en détail sur cette discussion au chapitre 5.

Le problème  $(P_{sbm})$  présente l'intérêt de se réduire à un système à une seule vitesse. En outre, il peut être interprété comme un couplage entre deux sous-problèmes classiques. Le système (2.41a)-(2.41b)-(2.41d) est un problème de Stokes à viscosité non-homogène avec une condition au bord de Dirichlet. Celui-ci est couplé avec le système (2.41c)-(2.41e) qui est une équation d'advection-réaction-diffusion non-linéaire avec une condition au bord de Neumann non-linéaire. L'utilisation de ce modèle est cependant limitée par deux éléments. Le premier est lié à la rhéologie choisie pour le tenseur de contrainte particulaire à l'équation (2.41f). Le second est une conséquence de la réduction à un problème comportant une seule vitesse, réduction effectuée à l'équation (2.40). Nous détaillons ces deux limitations :

1. Le tenseur  $Q$  est diagonal dans une certaine base définie dans (Bird et al., 1987) page 158 pour des écoulements viscosimétriques dans des géométries particulières. Dans cette base, on notera  $Q = \text{diag}(1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Les constantes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pilotent donc l'amplitude des différences de contrainte normale. Le modèle ne peut donc pas prédire correctement les différences de contrainte normale dans des géométries quelconques.
2. L'équation (2.41c) fait intervenir le terme en  $\text{div}\{\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_p(\phi, D(\langle \mathbf{u} \rangle)))\}$ , d'après (2.41f), ce terme présente une dérivée d'ordre trois pour la vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle$  alors que la condition de Dirichlet (2.41d) ne porte que sur la vitesse. En outre, la condition au bord (2.41e) présente de nombreuses non-linéarités, elle est donc difficile à résoudre. On peut même se demander si le problème  $(P_{sbm})$  est bien posé. Cela peut s'expliquer par le fait qu'on ait remplacé une condition sur un flux par une condition sur une contrainte. En effet, si on avait conservé la vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle_p$ , alors on aurait (2.41e)  $\Leftrightarrow \phi \langle \mathbf{u} \rangle_p \cdot \mathbf{n}_e = 0$  qui est une condition au bord bien plus classique. Finalement, en éliminant la vitesse de la phase particulaire  $\langle \mathbf{u} \rangle_p$ , on obtient un problème bien moins classique que ce qu'il y paraît. La réduction à une vitesse que nous avons présentée dans cette sous-section n'apporte donc pas une simplification du problème mathématique, il est donc pertinent de conserver des formulations à deux vitesses. En plus de proposer une modélisation explicite de la différence de vitesse entre les deux phases, ces problèmes à deux vitesses peuvent être dotés d'une structure mathématique solide, nous reviendrons en détail sur ce point au chapitre 5.

### 2.4.3 Vers des modèles plus généraux

L'objet des trois chapitres suivants est d'améliorer les deux faiblesses du modèle présenté à la sous-section 2.4.2.

Dans les chapitres 3 et 4, nous effectuons les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  afin de proposer une nouvelle modélisation de la rhéologie des suspensions, une nouvelle inconnue modélisant la microstructure sera introduite. Dans le chapitre 3 nous nous focaliserons sur des effets transitoires à court terme observés sur la contrainte de cisaillement d'une suspension. A noter que ces effets ne pouvaient pas être modélisés sans expliciter le lien entre la rhéologie d'une suspension et sa microstructure. Le chapitre 4 traitera d'une extension du modèle présente au chapitre 3. Le nouveau système donne non seulement les bons effets transitoires pour la viscosité apparente mais il prédit aussi correctement les différences de contrainte normale en régime établi.

Le chapitre 5 sera consacré à la construction d'un problème à deux vitesses en faisant les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . Nous donnerons ensuite une application de ce problème dans un cas simple en faisant en plus l'hypothèse  $\mathcal{H}_2$ .



# Chapitre 3

## Inversion de Couette

Ce chapitre est constitué par l'article ([Ozenda et al., 2018](#)). Nous en donnons un résumé.

Nous proposons un modèle expliquant l'influence de l'anisotropie de la microstructure d'une suspension sur la viscosité apparente de celle-ci. Le modèle reproduit la majorité des comportements que l'on peut observer sur des suspensions de sphères dures non-colloïdales pour des concentrations moyennes à élevées. En particulier, l'introduction d'un tenseur de texture nous permet de simuler le comportement transitoire de l'anisotropie de la microstructure durant une inversion de cisaillement. La force de notre contribution réside dans le faible nombre de paramètres ajustables introduit. Malgré sa simplicité, notre modèle a permis de réaliser des comparaisons quantitatives, non seulement avec des profils transitoires de viscosité apparente durant une inversion de cisaillement, mais aussi avec des mesures de la fonction de distribution de paires en régime stationnaire.

Dans ce chapitre, certaines notations diffèrent de celles définies dans de la table de notations,

La variable  $\mathbf{u}$  désigne ici la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{u} \rangle$ .

La variable  $\alpha$  désigne ici la variable  $\delta_1$ .

La variable  $\beta$  désigne ici la variable  $\beta_1$ .

La constante  $a$  désigne ici le rayon de la particule  $r_p$ .

### 3.1 Introduction

Despite the apparent simplicity of the system, concentrated suspensions of non-colloidal, rigid spheres in a Newtonian fluid display a rich and complex rheological behavior ([Stickel et Powell, 2005](#); [Guazzelli et Morris, 2012](#); [Denn et Morris, 2014](#)). In the inertialess limit (zero Reynolds number), particle dynamics is essentially governed by hydrodynamic interactions since lubrication forces prevent, in principle, direct contacts. Linearity and reversibility of Stokes equation then lead to expect that the macroscopic behavior of the suspension should remain Newtonian. Thus, numerous investigations documented the increase of the effective steady-state viscosity of suspensions with particle volume fraction  $\phi$  ([Zarraga et al., 2000](#); [Ovarlez et al., 2006](#); [Denn et Morris, 2014](#)). However, a wealth of experimental evidence also showed the existence of non-Newtonian rheological effects as soon as  $\phi$  exceeds 0.2, typically. One of the most prominent examples is the the existence of transient viscosity drops upon reversal of the shearing direction ([Gadala-Maria et Acrivos, 1980](#); [Kolli et al., 2002](#); [Blanc et al., 2011a](#)). There is nowadays a general agreement to relate these non-Newtonian characteristics to flow-induced changes in the microstructure of the suspension ([Brady et Morris, 1997](#); [Morris, 2009](#); [Denn et Morris, 2014](#)). The pair distribution function  $g(\mathbf{x})$ , i.e. the likelihood of finding pairs of particles at a separation vector  $\mathbf{x}$ , has been shown to become anisotropic and lose fore-aft symmetry under shear, with development of preferential concentration and depletion orientations that depend on the volume fraction  $\phi$  ([Blanc et al., 2013](#)). This asymmetry of the microstructure is the hallmark of a loss of reversibility of the system that, again, contradicts expectations based on Stokes equation. Although the

precise mechanisms remain to be elucidated, it is generally interpreted as resulting from chaotic dynamics induced by the nonlinearity of the multi-body hydrodynamic interactions (Drazer et al., 2002), and/or from even weak perturbations of the hydrodynamic interactions by non-hydrodynamic near-contact forces (Metzger et Butler, 2010; Gallier et al., 2014c). Note that the asymmetric microstructure, and the associated normal stresses, are also at the origin of the cross-stream particle migration process observed in these suspensions when the shear rate is heterogeneous (Morris et Boulay, 1999; Miller et al., 2009).

Since the pioneering work of Einstein (Einstein, 1906), most rheological models for suspensions assume an additive decomposition of the total Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  into fluid and particle contributions (Einstein, 1906, 1956; Guazzelli et Morris, 2012). This decomposition naturally arises from mixture theories in which macroscopic quantities are obtained from averages over both phases (Jackson, 1997, 2000; Nott et al., 2011). While the fluid contribution is simply given by a Newtonian model (with the viscosity of the interstitial fluid), closure relations are needed to express the particle stresses. Schematically, two groups of models are found in the literature. The first group encompasses purely macroscopic approaches that do not contain explicit reference to the suspension microstructure, apart from the volume fraction  $\phi$ . The most popular representative of this class is the suspension balance model (SBM), introduced in 1994 by Nott and Brady (Nott et Brady, 1994) (see also (Morris et Boulay, 1999; Miller et Morris, 2006)), in which particle stresses are expressed as the sum of a shear and a normal term that are both linear in shear rate, with corresponding shear and normal viscosities given by empirical functions of  $\phi$ . By construction, SBM well reproduces experimental rheological measurements obtained in stationary shear. It also leads to realistic predictions concerning particle migration when the particle normal stresses are used as the driver of the migration flux, even if this approach has been questioned (Lhuillier, 2009; Nott et al., 2011). However, as a counterpart for its simplicity, this model is devoid of any time or strain scale, and therefore unable to account for transients observed during shear reversal experiments. In addition, earlier versions were not invariant by changes of reference frame, although an ad hoc frame-invariant extension has been proposed (Miller et al., 2009).

In the second group of models, particle stress is made explicitly dependent on the microstructure through the consideration of a local *conformation tensor* that is inspired from the orientation distribution tensor defined for dilute fiber suspensions (see e.g. (Lipscomb et al., 1988; Reddy et Mitchell, 2001)). The conformation tensor, denoted  $\mathbf{b}_e$  in this paper, is a second-order symmetric positive definite tensor describing microstructure anisotropy. Hand (Hand, 1962) formulated a general representation theorem for the total Cauchy stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in term of the conformation tensor  $\mathbf{b}_e$  and the deformation rate tensor  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ . This general representation should be closed by a constitutive equation for the evolution of the conformation tensor  $\mathbf{b}_e$ . An important constraint is that the characteristic time associated to the evolution of  $\mathbf{b}_e$  must scale inversely with the deformation rate  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$  in order to ensure strain-scaling and *rate-independence* of the transients, as observed experimentally (see e.g. (Blanc et al., 2011a)) and imposed by dimensional analysis (Brady et Morris, 1997; Goddard, 2006). Note that the rate-independence constraint leads to constitutive equations that are formally similar to hypo-elastic models (see e.g. (Kolymbas, 1991)). For concentrated suspensions of spherical particles, Phan-Thien (Phan-Thien, 1995) proposed a differential constitutive equation for the conformation tensor, that led to prediction qualitatively in agreement with time-dependent experimental observations in shear reversal (Gadala-Maria et Acrivos, 1980; Kolli et al., 2002; Narumi et al., 2002). The structural unit used to define the conformation tensor was taken as the unit vector  $\mathbf{n}$  joining two neighboring particles, thereby encoding a direct connection with the pair distribution function  $g(\mathbf{x})$ . Later, Phan-Thien et al. (1999, 2000) went further with a micro-macro model inspired from statistical mechanics for the constitutive equation of the conformation tensor, but no quantitative comparisons were obtained. In 2006, Goddard (2006) revisited this approach, and proposed a model involving twelve material parameters and two tensors for describing the anisotropy. By a systematic fitting procedure of the parameters, he obtained numerical results in quantitative agreement with shear reversal experiments (Kolli et al., 2002; Narumi et al., 2002). Also in 2006, Stickel et al. (2006) (see also (Stickel et al., 2007; Yapici et al., 2009)) defined the conformation tensor on the base of particle mean free path, and simplified the expression of the stress to be linear in the deformation rate and the conformation tensor. Their model nevertheless also involves 13 free parameters. These authors obtained numerical results in qualitative agreement with a shear reversal experiment (Kolli et al., 2002; Narumi et al., 2002), but failed to obtain quantitative comparisons. In contrast with SBM model, all these tensorial models are, by construction, frame-invariant and potentially applicable to arbitrary flow geometries and conditions. As for polymer models, normal stress differences naturally arise from the use of

some objective derivative of the conformation tensor  $\mathbf{b}_e$  (see (Saramito, 2016)). The time-dependent relaxation of this tensor, representing microstructure evolution, leads to transient responses when the loading is varied. Nevertheless, these microstructure-based models are still rather complex, and the identification of parameters is generally not obvious.

This paper is a contribution to an ongoing effort for the development of more tractable microstructure-based rheological models. With the least number of adjustable parameters, the proposed model is relatively simple, yet capable of accounting both for the macroscopic non-Newtonian rheological features of non-colloidal suspensions and for the rate-independent evolution of the microstructure. In particular, this model is able to describe the experimentally observed anisotropic effects expressed by the pair-distribution function. It also qualitatively and quantitatively agrees, for a wide range of volume fraction, with experimental data for time-dependent shear reversals.

The outline of the paper is as follows. The second section concerns model statement. The third section turns to predictions in stationary shear and validation against experimental data for microstructure anisotropy and depletion angle. Section 4 deals with time-dependent flows, specifically shear reversals, and present comparisons with experiments for the apparent viscosity. Finally, the last section develops a discussion and a conclusion.

## 3.2 Mathematical model

### 3.2.1 Rheological model

As illustrated in Fig. 3.1, a key feature of the microstructure of sheared suspensions is the existence of preferential directions along which the average inter-distance between particles varies: particles are closer along the compression axis, and farther apart along the depletion axis. In inertialess systems, these preferential directions depend on the concentration  $\phi$ , but not on the deformation rate  $|\dot{\gamma}|$  (see (Blanc et al., 2013)). The rheological model developed in this work is purely macroscopic, and hence no attempt is made at deriving a microscopic evolution equation for the microstructure. However, to clarify the physical meaning of the conformation tensor  $\mathbf{b}_e$  used in the sequel, and to provide a direct link with the microstructure, the following definition is proposed:

$$\mathbf{b}_e = d_0^2 \langle \boldsymbol{\ell} \otimes \boldsymbol{\ell} \rangle^{-1}, \quad (3.1)$$

where  $\boldsymbol{\ell}$  is the branch vector joining the centers of two neighboring particles, and  $d_0$  is the average distance between neighboring particle centers in an isotropic configuration at rest. In what follows, the isotropic configuration at rest will be referred to as the *reference configuration*. In concentrated suspensions,  $d_0$  is close to  $2a$ , where  $a$  denotes particle radius, since particles are in near-contact. The choice of an inverse relation between  $\mathbf{b}_e$  and  $\langle \boldsymbol{\ell} \otimes \boldsymbol{\ell} \rangle$  in (3.1) is motivated by the wish to have a conformation tensor whose largest principal direction is aligned with the depletion axis of the microstructure (Fig. 3.1). The use of  $\boldsymbol{\ell}$  as the main microstructural unit is notably different from the approach followed in most earlier studies, which define a *fabric* tensor  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle$  based on the *unit* vector joining neighboring particles,  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\ell}/|\boldsymbol{\ell}|$  (Phan-Thien et al., 1999, 2000; Goddard, 2006; Denn et Morris, 2014; Chacko et al., 2018). In particular, while the trace of the tensor  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle$  is by construction equal to one, the  $\langle \boldsymbol{\ell} \otimes \boldsymbol{\ell} \rangle$  tensor and the present  $\mathbf{b}_e$  conformation tensor do not have such a constraint, and thus present additional degrees of freedom.

To couple the conformation tensor  $\mathbf{b}_e$  with a rheological model, we introduce a deformation  $\boldsymbol{\gamma}_e$  defined as:

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \mathbf{b}_e - \mathbf{I}$$

where  $\mathbf{I}$  is the identity tensor. For an isotropic microstructure at rest, i.e. the reference configuration, we have  $\mathbf{b}_e = \mathbf{I}$ , and thus  $\boldsymbol{\gamma}_e = 0$ . Hence,  $\boldsymbol{\gamma}_e$  can be interpreted as the average deformation of the local *cages* formed by neighboring particles, with respect to the reference configuration. Note that a similar concept of cages formed by nearest neighbors was already introduced by (Stickel et al., 2006). We then assume that the total deformation of the suspension  $\boldsymbol{\gamma}$  can be decomposed into the sum of the cage deformation  $\boldsymbol{\gamma}_e$  and of

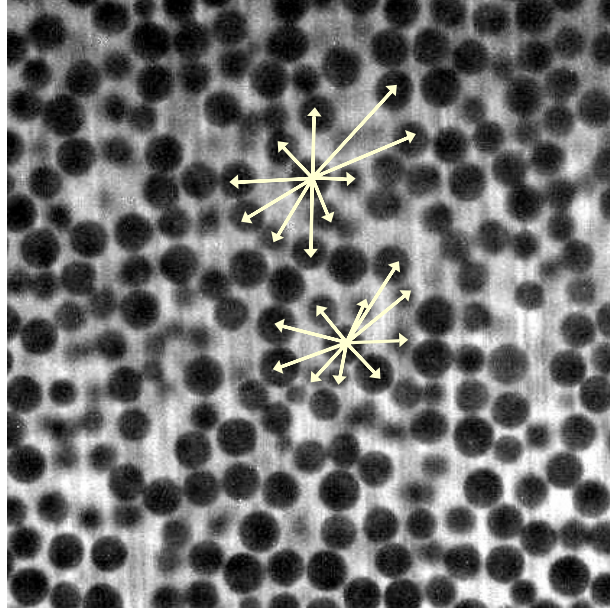


Figure 3.1: (left) Schematic representation of the branch vectors  $\ell$  joining neighboring particles in a sheared suspension. (right) Representation of the local conformation tensor  $\mathbf{b}_e$  by an ellipse. The compression axis is the line and the depletion axis is the dashed line. In the electronic version they are drawn in red and in green, respectively. Background photography taken from [Blanc \(2011\)](#), Fig. 4.7 ( $\phi = 0.55$ ).

a *viscous* deformation  $\gamma_v$ , which represents the global rearrangements of neighboring particles through the flow:

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_v \quad (3.2)$$

The next step is to write a constitutive equation for the variable  $\gamma_e$ . To that aim, we define a *local stress*, denoted as  $\tau_e$ , and assume the following relation between  $\tau_e$  and  $\gamma_e$ :

$$\tau_e = \eta_g |\dot{\gamma}| \gamma_e \quad (3.3)$$

where the tensorial norm  $|\xi|$  is defined as  $|\xi| = [(1/2)\xi : \xi]^{1/2}$  for any second-order tensor  $\xi$ . Observe that this expression is linear with respect to  $\gamma_e$  and involves a factor  $\eta_g |\dot{\gamma}|$  that ensures rate-independence of the constitutive relation. Here,  $\eta_g$  is a constant coefficient with the dimension of a viscosity. This local stress  $\tau_e$  is also assumed to be linearly related to the rate of viscous deformation  $\dot{\gamma}_v$  through:

$$\tau_e = \eta_e \dot{\gamma}_v \quad (3.4)$$

where  $\eta_e \geq 0$  is an associated viscosity. Finally, differentiating (3.2), replacing  $\dot{\gamma}_v$  from (3.4) and using (3.3), the following linear differential equation is obtained for  $\gamma_e$ :

$$\dot{\gamma}_e + \frac{\eta_g}{\eta_e} |\dot{\gamma}| \gamma_e = \dot{\gamma}$$

The previous constitutive equation is completed by the following expression for the total Cauchy stress tensor of the suspension:

$$\begin{aligned} \sigma &= -p_f \mathbf{I} + \eta \dot{\gamma} + \tau, \\ \text{where } \tau &= \eta_g |\dot{\gamma}| \gamma_e + \eta_d (\gamma_e \otimes \gamma_e) : \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

The first term involves  $p_f$ , the pressure in the fluid phase. The second term represents the *base viscosity* of the suspension, expressed here by  $\eta \geq 0$ . Finally, the third term represents the *microstructure stress*  $\tau$ .



This microstructure stress itself expresses as the sum of the local stress  $\boldsymbol{\tau}_e$  and of a quadratic term with respect to  $\boldsymbol{\gamma}_e$ . Such quadratic terms commonly derive from the closure of a fourth-order structure tensor in statistical micro-macro models for spherical or fiber suspensions (see e.g. (Lipscomb et al., 1988; Reddy et Mitchell, 2001)). It involves an additional parameter  $\eta_d$  with the dimension of a viscosity. Note that this last term writes equivalently  $\eta_d(\dot{\boldsymbol{\gamma}}:\boldsymbol{\gamma}_e)\boldsymbol{\gamma}_e$  and, thus, the two tensors  $\boldsymbol{\tau}$  and  $\boldsymbol{\gamma}_e$  are co-linear and share the same eigensystem. The influence of this additional quadratic contribution will be analyzed in the following.

In the present model, the total stress is thus split into the stress that would be observed for an isotropic microstructure (the base viscosity), and the stress induced by the anisotropic arrangement of the microstructure (represented by  $\boldsymbol{\tau}$ ). This stress decomposition could appear similar to the decomposition  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_p$  between fluid  $\boldsymbol{\sigma}_f$  and particle  $\boldsymbol{\sigma}_p$  stresses, used in classical mixture theories (Jackson, 2000) and in most suspensions models, such as SBM (Nott et Brady, 1994; Morris, 2009). It shall be emphasized however that, in our approach, the base viscosity  $\eta$  also contains a contribution from the particle phase. More precisely, for the present model, we have  $\boldsymbol{\sigma}_f = -p_f\mathbf{I} + \eta_0\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  and  $\boldsymbol{\sigma}_p = (\eta - \eta_0)\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\tau}$ , where  $\eta_0$  is the viscosity of the suspending fluid. Roughly, the base viscosity  $\eta$  can be seen as accounting for long-range hydrodynamic interactions between particles, while the microstructure stress  $\boldsymbol{\tau}$  accounts for short-range, hydrodynamic and contact, interactions. As a consequence, we expect all the parameters of the model, including  $\eta$ ,  $\eta_e$ ,  $\eta_g$  and  $\eta_d$  to depend on volume fraction  $\phi$ . Finally, also recall that  $\text{tr}(\boldsymbol{\gamma}_e)$ , and thus  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau})$ , are not necessarily zero, such that the microstructure stress  $\boldsymbol{\tau}$  may also contribute to the total pressure  $p = -(1/3)\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  of the suspension. Indeed,  $p = p_f + p_p$  with  $p_p = -(1/3)\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_p) = -(1/3)\text{tr}(\boldsymbol{\tau})$ , as the mixture is assumed to be isochoric with  $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = 0$ .

The time derivative  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_e$  is given by the upper-convected tensor derivative (see e.g. (Saramito, 2016), chap 4), denoted hereafter  $\mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}_e/\mathcal{D}t$ :

$$\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}_e}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\gamma}_e - \nabla\mathbf{u}\boldsymbol{\gamma}_e - \boldsymbol{\gamma}_e\nabla\mathbf{u}^T$$

The deformation rate  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  is identified to two times the symmetric part of the velocity gradient tensor  $D(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$ , where  $\mathbf{u}$  is the velocity field of the mixture. The constitutive equations thus become:

$$2D(\mathbf{u}) = \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}_e}{\mathcal{D}t} + \alpha|2D(\mathbf{u})|\boldsymbol{\gamma}_e, \quad (3.5a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_f\mathbf{I} + 2\eta D(\mathbf{u}) + \eta_e \{ \alpha|2D(\mathbf{u})| + \beta(D(\mathbf{u}):\boldsymbol{\gamma}_e) \} \boldsymbol{\gamma}_e, \quad (3.5b)$$

where  $\alpha = \eta_g/\eta_e$  and  $\beta = 2\eta_d/\eta_e$  are dimensionless parameters. These constitutive equations can be seen as a rate-independent variant of a viscoelastic Oldroyd (Oldroyd, 1950) model with an additional quadratic term for the total stress. Rate-independence is guaranteed by the use of an ‘‘effective elastic modulus’’  $\eta_g|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$  proportional to the deformation rate.

### 3.2.2 Problem statement

Coupling the above constitutive model with the mass and momentum conservation equations of the mixture, the problem can be formulated as a system of three equations for three unknowns:  $\boldsymbol{\gamma}_e$ , the particle cage deformation;  $\mathbf{u}$ , the mixture velocity; and  $p_f$ , the pressure in the fluid phase:

$$\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}_e}{\mathcal{D}t} + \alpha|2D(\mathbf{u})|\boldsymbol{\gamma}_e - 2D(\mathbf{u}) = 0, \quad (3.6a)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \text{div} \{ -p_f\mathbf{I} + 2\eta D(\mathbf{u}) \} - \text{div} \{ \eta_e\boldsymbol{\gamma}_e (\alpha|2D(\mathbf{u})| + \beta(D(\mathbf{u}):\boldsymbol{\gamma}_e)) \} = \rho\mathbf{g}, \quad (3.6b)$$

$$\text{div}\mathbf{u} = 0. \quad (3.6c)$$

The isochoric relation (3.6c) of the mixture is a consequence of mass conservation of the fluid and solid phases. From a mathematical point of view, the fluid pressure  $p_f$  acts as a Lagrange multiplier associated to this isochoric constraint. The problem is closed by suitable initial and boundary conditions.

In (3.6b),  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  denotes the Lagrange derivative and  $\rho$  is the density of the mixture. From Hulsen (Hulsen, 1990), it is possible to show that the constitutive equation (3.6a) leads to a conformation tensor  $\mathbf{b}_e = \mathbf{I} + \gamma_e$  that is always positive definite. Note that the volume fraction  $\phi$ , and hence  $\rho$ , are supposed to be constant during the flow: in agreement with experimental evidences (Denn et Morris, 2014), we assume the time scale for migration to be large compared to the typical time scales for microstructure evolution, and focus here on the short-time response of the suspensions. Otherwise, the system could be also coupled with an additional diffusion equation for the volume fraction (Miller et Morris, 2006).

### 3.3 Stationary shear flows and microstructure anisotropy

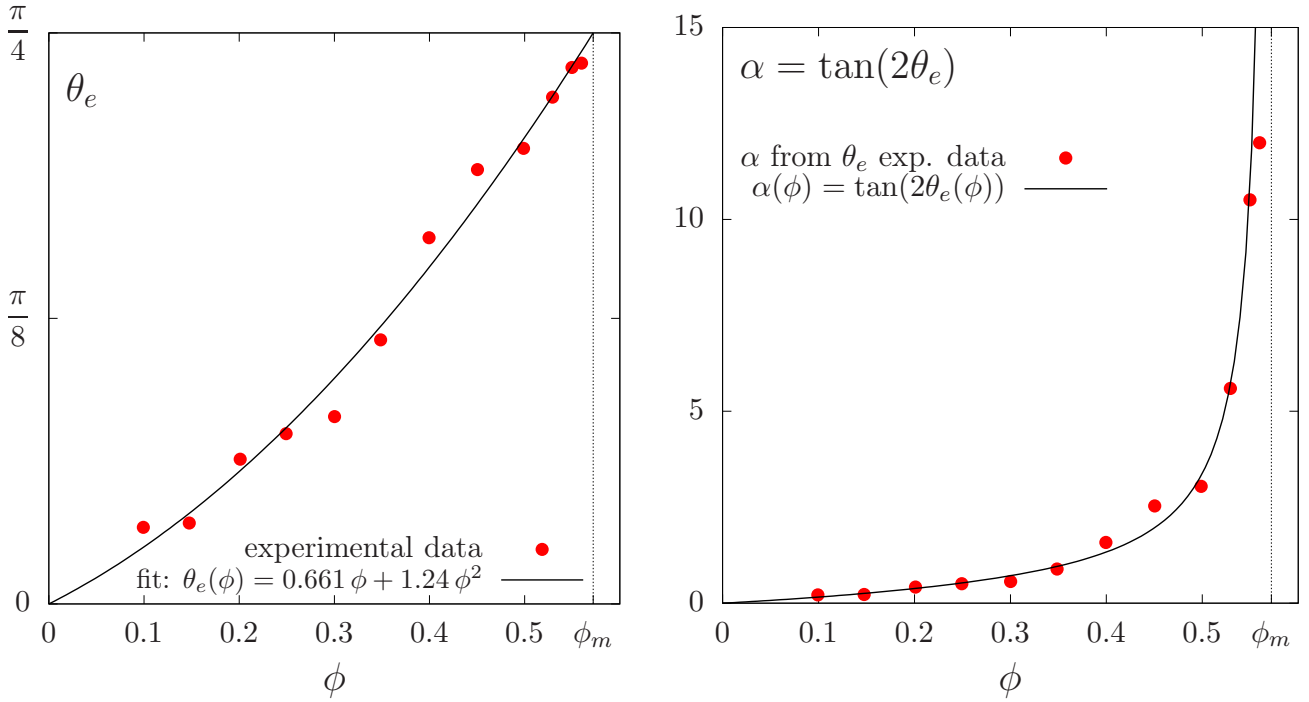


Figure 3.2: (left) Depletion angle  $\theta_e$  versus volume fraction  $\phi$ : experimental data from Blanc (2011), Fig. 5.11, and best fit with the second-order polynomial (3.10). (right) Dependence upon  $\phi$  of model parameter  $\alpha$ .

Let us consider a simple shear flow. The  $x$  axis is in the flow direction and the  $y$  axis is in the direction of the gradient  $\nabla = (0, \partial_y, 0)$ . Let  $\mathbf{u}(t, x, y, z) = (u_x(t, y), 0, 0)$  be the velocity and  $\dot{\gamma}(t) = \partial_y u_x$  be the spatially uniform shear rate. The constitutive equations (3.5a)-(3.5b) become, after expanding the upper-convected derivative (Saramito, 2016, chap. 4):

$$\partial_t \gamma_{e,xy} + \alpha |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xy} = \dot{\gamma}, \quad (3.7a)$$

$$\partial_t \gamma_{e,xx} - 2\dot{\gamma} \gamma_{e,xy} + \alpha |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xx} = 0, \quad (3.7b)$$

$$\partial_t \gamma_{e,yy} + \alpha |\dot{\gamma}| \gamma_{e,yy} = 0, \quad (3.7c)$$

$$\partial_t \gamma_{e,zz} + \alpha |\dot{\gamma}| \gamma_{e,zz} = 0, \quad (3.7d)$$

$$\sigma_{xy} = \alpha \eta_e |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xy} + \beta \eta_e \dot{\gamma} \gamma_{e,xy}^2 + \eta \dot{\gamma}, \quad (3.7e)$$

$$\sigma_{xx} = \alpha \eta_e |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xx} + \beta \eta_e \dot{\gamma} \gamma_{e,xy} \gamma_{e,xx}, \quad (3.7f)$$

completed by an initial condition for  $\gamma_e$ . For simplicity, we assume an isotropic microstructure at  $t = 0$ . Hence,  $\gamma_{e,yy}(0) = \gamma_{e,zz}(0) = 0$ , which yields  $\gamma_{e,yy}(t) = \gamma_{e,zz}(t) = 0$  for all  $t > 0$ . Similarly,  $\gamma_{e,xz}(0) = \gamma_{e,yz}(0) = 0$ .

We first focus on a stationary simple shear flow where the shear rate is supposed to be constant and is denoted  $\dot{\gamma}_0$ . In that case, the solution writes explicitly:

$$\gamma_{e,xy} = \text{sgn}(\dot{\gamma}_0)\alpha^{-1}, \quad \gamma_{e,xx} = 2\alpha^{-2} \quad (3.8a)$$

$$\sigma_{xy} = (\eta + (1 + \beta\alpha^{-2})\eta_e) \dot{\gamma}_0 \quad (3.8b)$$

$$\sigma_{xx} = 2\alpha^{-1}(1 + \beta\alpha^{-2})\eta_e|\dot{\gamma}_0| \quad (3.8c)$$

normal stress component proportional to the shear rate  $|\dot{\gamma}_0|$ . This feature is in agreement with several experimental observations (Zarraga et al., 2000). In contrast, most classical viscoelastic models, such as Maxwell and Oldroyd models, predict normal stresses in shear flows proportional to  $\dot{\gamma}_0^2$  (Saramito, 2016, p. 157). In the present model, normal stresses proportional to  $|\dot{\gamma}_0|$  arise from the use in (3.3) of an ‘‘effective elastic modulus’’ that is itself proportional to  $|\dot{\gamma}_0|$ , as required to obtain a rate-independent rheological behavior. The particle pressure  $p_p = -\text{tr}(\boldsymbol{\tau})/3$  is given by, for the present stationary simple shear flow:

$$p_p = -(2/3)\alpha^{-1}(1 + \beta\alpha^{-2})\eta_e|\dot{\gamma}_0| \quad (3.8d)$$

Thus,  $p_p$  is also proportional to the shear rate  $|\dot{\gamma}_0|$ , again in agreement with experimental observations (Deboeuf et al., 2009). Finally note that, from (3.8b), the shear stress component  $\sigma_{xy}$  also scales linearly with  $\dot{\gamma}_0$ , as expected.

Let us now turn to microstructural aspects, described by the particle cage deformation tensor  $\boldsymbol{\gamma}_e$ . As we only consider stationary simple flows in this paragraph, we can assume without loss of generality that  $\dot{\gamma}_0 > 0$ . From (3.8a), the eigenvector associated to the largest eigenvalue of the tensor  $\boldsymbol{\gamma}_e$ , makes an angle with the  $x$  axis denoted as  $\theta_e$  and given by:

$$\begin{aligned} \theta_e &= \text{atan} \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \text{atan}(\alpha) \\ \iff \alpha &= \tan(2\theta_e). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Since  $\mathbf{b}_e = \mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_e$ , the tensors  $\mathbf{b}_e$  and  $\boldsymbol{\gamma}_e$  share the same eigensystem. The angle  $\theta_e$  is thus also associated to largest eigenvalue of  $\mathbf{b}_e$ , i.e. to the dilation direction of the microstructure: in this direction, the probability to find two particles in contact is the smallest, and  $\theta_e$  thus corresponds to the so-called *depletion angle*. Experimental data for the depletion angle  $\theta_e$  versus volume fraction  $\phi$  are presented by Blanc (2011), Fig. 5.11, and are reproduced on Fig. 3.2 (left), together with a best fit using a second-order polynomial denoted by  $\theta_e(\phi)$ . Assuming  $\theta_e(0) = 0$  and  $\theta_e(\phi_m) = \pi/4$ , with  $\phi_m$  the maximum volume fraction of the suspension, the second-order polynomial template can be expressed as:

$$\theta_e(\phi) = \delta_e \phi + \left( \frac{\pi}{4} - \delta_e \phi_m \right) \left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^2 \quad (3.10)$$

where  $\phi_m = 0.571$  and  $\delta_e = 0.661$  are adjusted through a nonlinear least square method, as implemented in `gnuplot` (Williams et Keley, 2010). Through (3.9), the dependence upon  $\phi$  of the  $\alpha$  parameter of the present model is thus directly deduced from the experimental data (see Fig. 3.2, right):

$$\alpha(\phi) = \tan(1.32\phi + 2.48\phi^2) \quad (3.11)$$

In experiments or in numerical simulations, the microstructure of suspensions is generally represented through the pair distribution function  $g(\mathbf{x})$ . As an example, Fig. 3.3 shows, for a suspension at  $\phi = 0.35$  submitted to a stationary shear flow, the experimentally-determined evolution of  $g(\mathbf{x})$  in the shear plane  $(x, y)$  (Blanc et al., 2013). Recall that  $g(\mathbf{x})$  is the conditional probability, when there is already a particle in  $\mathbf{x}_0 = 0$ , to find a particle at any location  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , normalized by the average particle density  $\phi/(4\pi a^3/3)$  (where  $a$  is particle radius). Observe on Fig. 3.3 that  $g$  is zero in the central disk of diameter  $2a$ , due to non-penetration of particles. It is maximum in a thin band  $[2a, 2a + \delta]$ , and then tends to 1 when the distance increases. Most of the relevant microstructure information is encoded in this thin band, whose thickness  $\delta$  is sufficient to include contact and near-contact interactions, and which thus describes the average arrangement

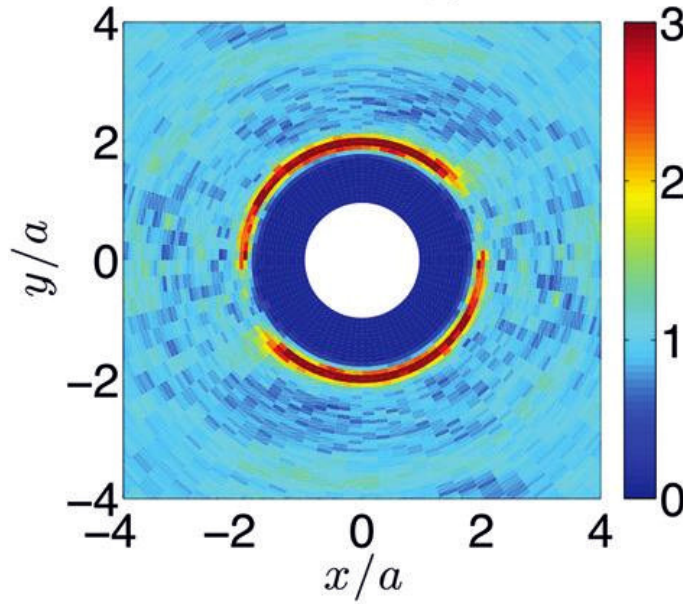


Figure 3.3: Pair distribution function  $g(x, y)$ : experimental observation by [Blanc et al. \(2013\)](#) for a stationary shear flow with  $\phi = 0.35$ .

of neighboring particles ([Brady et Morris, 1997](#); [Morris, 2009](#)). Switching to polar coordinates  $(r, \theta)$  in the shear plane, we assume, in order to simplify the modeling of  $g$ , that this function only depends upon  $\theta$  in the thin band. We thus introduce its average value, denoted as  $\tilde{g}(\theta)$ , in radial direction in the thin band, and the associated probability distribution function  $p(\theta)$  such that

$$p(\theta) = \frac{\tilde{g}(\theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\theta) d\theta}$$

This distribution  $p(\theta)$  is interpreted as the probability to find, for each particle in the suspension, a neighboring particle in the  $\theta$  direction inside the thin band. Assuming furthermore that the probability to find a neighboring particle outside the thin band is negligible,  $p(\theta)$  can be related to the fabric tensor  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle$  introduced in section 3.2.1 as follows:

$$\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle = \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} p(\theta) d\theta \quad (3.12)$$

where  $\mathbf{n}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  is the unit outward normal vector to the unit circle. Observe that, as expected,

$$\text{tr} \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(\theta) d\theta = 1$$

since  $p$  is a probability distribution. Accordingly, from (3.1), we can thus postulate the following relation between  $p(\theta)$  and the conformation tensor  $\mathbf{b}_e$  introduced in our model:

$$\int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} p(\theta) d\theta = \frac{\mathbf{b}_e^{-1}}{\text{tr}(\mathbf{b}_e^{-1})} \quad (3.13)$$

As shown in section 3.6, for a given conformation tensor  $\mathbf{b}_e$ , (3.13) can be used to reconstruct the probability distribution  $p(\theta)$  through a Fourier mode decomposition. From (3.13), the first Fourier mode of  $p(\theta)$  can be expressed explicitly in terms of the parameter  $\alpha$  and the depletion angle  $\theta_e$ : see section 3.6, relation (3.19). This prediction is compared on Fig. 3.4 with experimental data from [Blanc \(2011\)](#), Figs. 5.9 and 5.10. Observe that both predicted (in black) and experimental (in dotted-red) curves present two main lobes, separated by the depletion angle direction. The experimental probability distribution is however also affected by higher-frequency modes, which are potentially very sensitive to both experimental errors from image

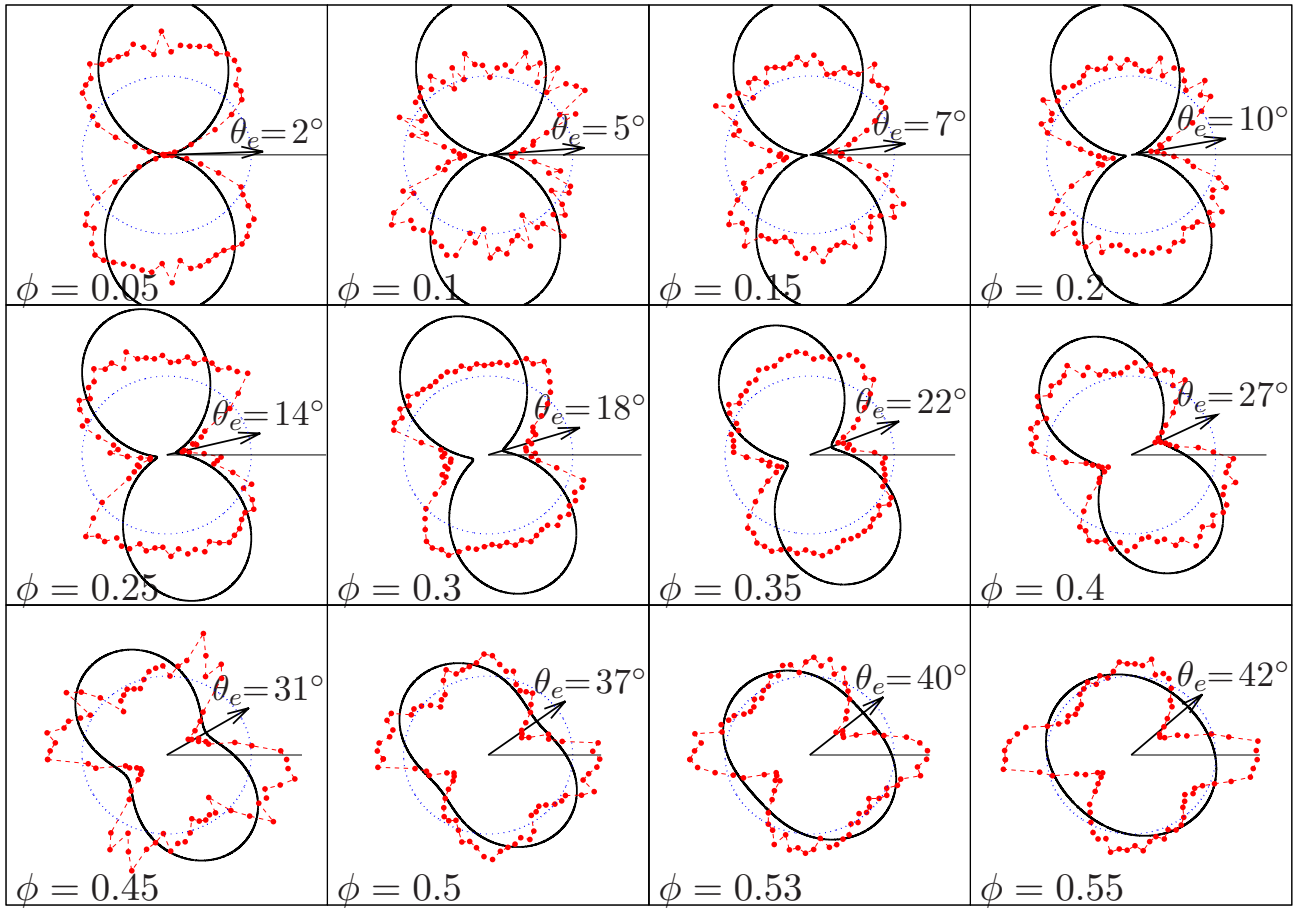


Figure 3.4: Probability distribution function  $p(\theta)$ , represented in polar coordinates as  $r = p(\theta)$ . Comparison between model prediction (black curve) and experimental data (red dotted-curves) by Blanc (2011), Fig. 5.10. The experimental pdfs are obtained as radial averages of the pair distribution function in the thin band corresponding to  $r/a \in [1.87, 2.14]$ . The depletion angle is indicated by an arrow and its value is given in degrees. The dotted blue circle represents the equiprobable (isotropic) distribution  $p(\theta) = 1/(2\pi)$ .

preprocessing and the choice of the width of the thin band  $[2a, 2a + \delta]$  used to integrate the pair distribution function, as pointed out by Blanc (2011), Fig. 5.6. Fig. 3.5 represents the five first Fourier coefficients of the experimental data. Observe in general the rapid decrease of these coefficients, as expected. However, when the volume fraction  $\phi$  becomes close to the maximal fraction  $\phi_m$ , the second mode dominates. A similar behavior has already been experimentally observed for dry granular material (Troade et al., 2002), and can be explained by steric exclusion of neighbors. This second Fourier mode cannot be determined by the present model, as explained in section 3.6.

## 3.4 Time-dependent simple shear flows

### 3.4.1 Shear startup, reversal and pause

For simple shear flows, the problem reduces to the time-dependent linear system of ordinary differential equation (3.7a)-(3.7f). For a constant applied shear rate  $\dot{\gamma}_0$ , the system can be explicitly solved by performing the change of variable  $\gamma = |\dot{\gamma}_0|t$ , where  $\gamma$  represents the deformation. The solution writes:

$$\gamma_{e,xy}(\gamma) = (1 - e^{-\alpha\gamma}) \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_0) \alpha^{-1} + e^{-\alpha\gamma}, \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{e,xx}(\gamma) &= (1 - e^{-\alpha\gamma}) 2\alpha^{-2} + e^{-\alpha\gamma} \gamma_{e,xy}(0) \\ &\times \{ \gamma_{e,xx}(0) + 2\gamma (\operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_0) \gamma_{e,xy}(0) - \alpha^{-1}) \}, \end{aligned} \quad (3.14b)$$

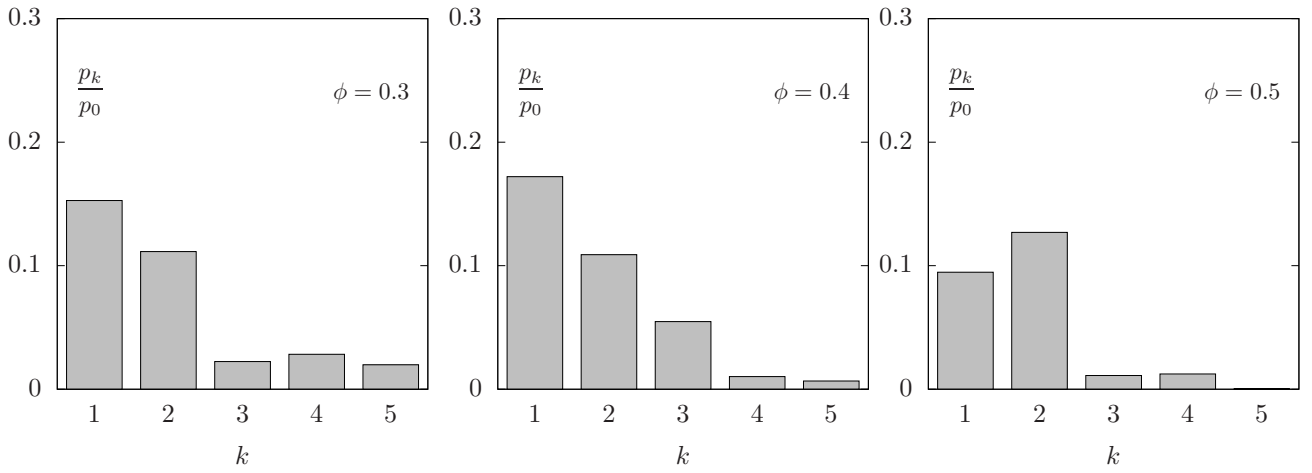


Figure 3.5: Five first Fourier coefficients  $p_k$ ,  $k \geq 1$  of the probability distribution function  $p(\theta)$ , from experimental data by Blanc (2011), Fig. 5.10, for  $\phi = 0.3, 0.4$  and  $0.5$ .

and, then, the total stress tensor  $\sigma$  is explicitly given by (3.7e)-(3.7f).

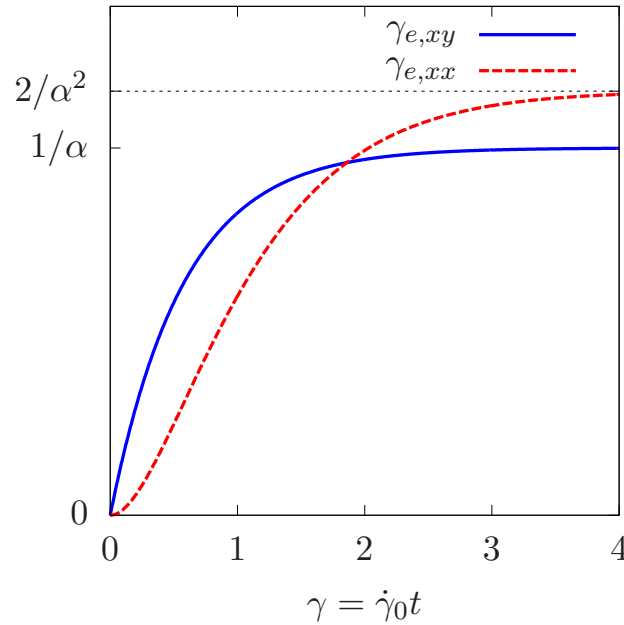


Figure 3.6: Shear startup from rest: exponential relaxation of the  $\gamma_e$  tensor components versus shear deformation  $\gamma = \dot{\gamma}_0 t$  (with  $\alpha = \sqrt{3}$ ).

For a startup from a material at rest at  $t = 0$  with an isotropic microstructure, we have  $\gamma_e(0) = 0$ . If a constant shear rate  $\dot{\gamma}_0 > 0$  is imposed for  $t > 0$ , the solution (3.14a)-(3.14b) becomes:

$$\begin{aligned}\gamma_{e,xy}(\gamma) &= (1 - e^{-\alpha\gamma}) \alpha^{-1}, \\ \gamma_{e,xx}(\gamma) &= (1 - e^{-\alpha\gamma}) 2\alpha^{-2} - e^{-\alpha\gamma} 2\alpha^{-1}\gamma.\end{aligned}$$

As shown on Fig. 3.6, this solution displays an exponential relaxation towards the steady state solution. Remark that the graph of the solution versus shear deformation  $\gamma = \dot{\gamma}_0 t$ , is invariant when changing the value of shear rate  $\dot{\gamma}_0 > 0$ . This constitutes a fundamental property of rate-independent materials.

Let us now turn to a case of shear reversal: the material is first sheared with a negative shear rate  $-\dot{\gamma}_0$  until a first stationary regime is reached. Then, at  $t = 0$ , the shear rate is suddenly reversed to the opposite value

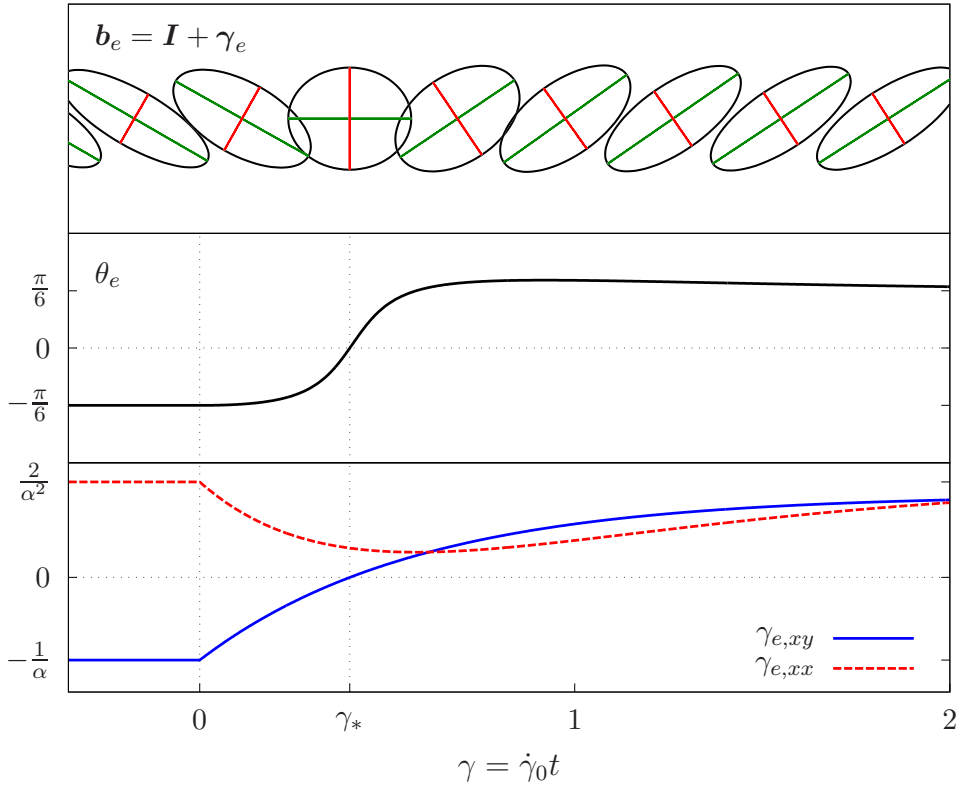


Figure 3.7: Shear reversal at  $t = 0$ : evolution versus shear deformation  $\gamma = \dot{\gamma}_0 t$  of the conformation tensor  $\mathbf{b}_e = \mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_e$  represented as an ellipse. Eigenvector associated to compression (resp. dilation), i.e. to the smallest (resp. largest) eigenvalue of  $\mathbf{b}_e$ , is represented as the smallest (resp. largest) axis. In the electronic version it is drawn in red (resp. green). On the bottom, plots for the depletion angle  $\theta_e(t)$ , and the  $\boldsymbol{\gamma}_e$  tensor components versus shear deformation  $\gamma = \dot{\gamma}_0 t$ . (Parameter  $\alpha$  is taken as  $\sqrt{3}$  in this plot.)

$+\dot{\gamma}_0 > 0$ . In that case,  $\gamma_{e,xy}(0) = -\alpha^{-1}$ ,  $\gamma_{e,xx}(0) = 2\alpha^{-2}$  and the solution (3.14a)-(3.14b) becomes:

$$\begin{aligned}\gamma_{e,xy}(\gamma) &= (1 - 2e^{-\alpha\gamma}) \alpha^{-1}, \\ \gamma_{e,xx}(\gamma) &= (1 - e^{-\alpha\gamma}) 2\alpha^{-2} + e^{-\alpha\gamma} (2\alpha^{-2} - 4\alpha^{-1}\gamma).\end{aligned}$$

As shown on Fig. 3.7, at  $t = 0$ , the particle cages, represented by the conformation tensor  $\mathbf{b}_e = \mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_e$  as an ellipse, start to rotate towards a symmetrically opposite position. According to (3.9), the depletion angle increases from  $\theta_e(0) = -\text{atan}(\alpha)/2$  at  $t = 0$  to reach asymptotically its new value  $\theta_e(\infty) = +\text{atan}(\alpha)/2$ . With the choice  $\alpha = \sqrt{3}$  made in Fig. 3.7, we have  $\theta_e(\infty) = \pi/6$ . The depletion angle is expressed at any  $\gamma = \dot{\gamma}_0 t$  from the  $\boldsymbol{\gamma}_e$  tensor components by:

$$\theta_e(\gamma) = \text{atan} \left( \frac{-\gamma_{e,xx}(\gamma) + \sqrt{\gamma_{e,xx}^2(\gamma) + 4\gamma_{e,xy}^2(\gamma)}}{\gamma_{e,xy}(\gamma)} \right)$$

A Taylor development for small  $\gamma_{e,xy}(\gamma)$  shows that  $\theta_e(\gamma)$  vanishes when  $\gamma_{e,xy}(\gamma) = 0$ , i.e. when the shear deformation is equal to the critical value  $\gamma_* = \alpha^{-1} \log(2)$ . For this critical deformation, the ellipse axis associated to the largest eigenvalue (in green on Fig. 3.7), is horizontal with  $\gamma_{e,xy}(\gamma_*) = 0$  and  $\gamma_{e,xx}(\gamma_*) = 2(1 - \log(2))\alpha^{-2} > 0$ . It means that the microstructure temporarily presents a fore-aft symmetry, but is not isotropic, i.e.  $\mathbf{b}_e \neq \mathbf{I}$  when  $\gamma = \gamma_*$ . Fig. 3.7 also plots separately the two components  $\gamma_{e,xy}$  and  $\gamma_{e,xx}$  of the tensor: observe that  $\text{tr}(\boldsymbol{\gamma}_e) = \gamma_{e,xx}$  is not constant during the reversal. This constitutes an important difference with approaches based on a fabric tensor  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle$  that always has trace equal to one (Phan-Thien et al., 1999, 2000; Goddard, 2006; Denn et Morris, 2014; Chacko et al., 2018).

For a general  $\dot{\gamma}(t)$  evolution, the system of ordinary differential equations (3.7a)-(3.7f) is solved using `lsode` library (Radhakrishnan et Hindmarsh, 1993), as interfaced in `octave` software (Eaton et al., 2011). Fig. 3.8

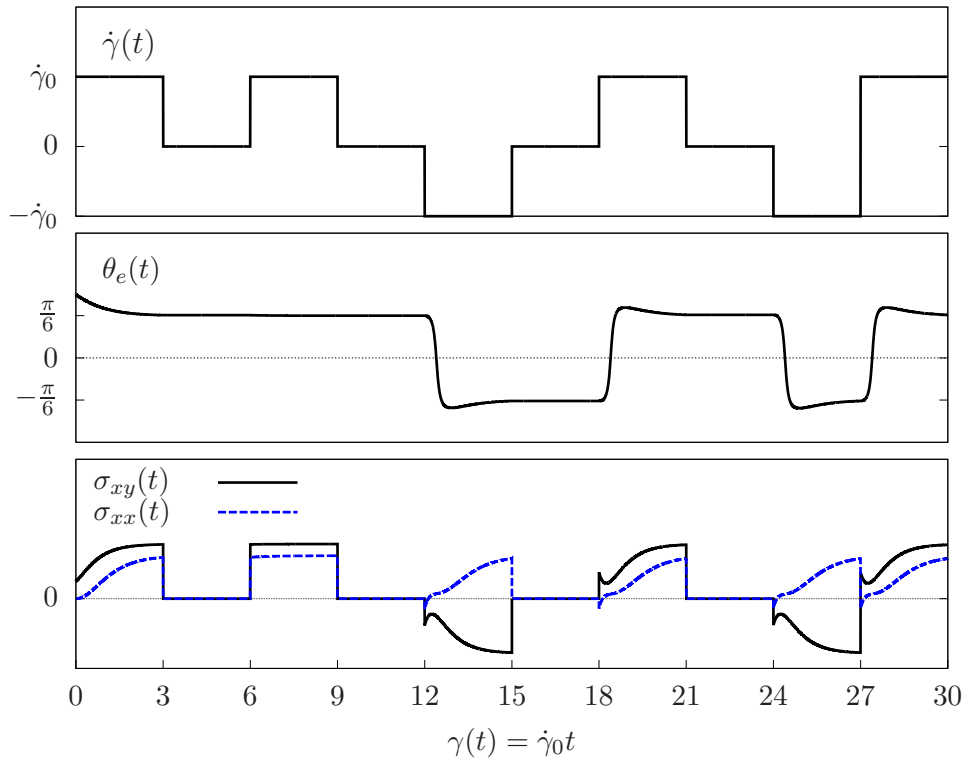


Figure 3.8: Shear evolution with pauses, startups and reversals: evolution of imposed shear rate, depletion angle, and stress components versus shear deformation (choice of parameters:  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\beta = 5$ ,  $\eta_e = 10$  Pa.s,  $\eta = 10$  Pa.s).

plots the response in stress components and depletion angle when applying a succession of startups and reversals, possibly separated by pauses. In agreement with experimental observations (Kolli et al., 2002, Fig. 3), when the imposed shear rate changes from  $\dot{\gamma}_0 \neq 0$  to zero, i.e. during a pause, both particle pressure  $p_p = -\text{tr}(\boldsymbol{\tau})/3 = -\tau_{xx}/3$  and shear stress  $\sigma_{xy}$  instantaneously fall to zero. Observe however that the depletion angle remains constant during the pause: the microstructure is conserved. This latter feature can be deduced from constitutive equation (3.5a), which simply reduces to  $\mathcal{D}\gamma_e/\mathcal{D}t = 0$  when the shear rate is zero. After a pause, if the shear restarts suddenly in the same direction, experimental observations (Kolli et al., 2002, Fig. 3) showed that both particle pressure  $p_p = -\tau_{xx}/3$  and shear stress  $\sigma_{xy}$  jump instantaneously to their previous stationary values. Conversely, if the shear rate restarts suddenly in the direction opposite to its previous value, e.g.  $-\dot{\gamma}_0$ , experimental observations by Narumi et al. (2002), Fig. 3, showed that particle pressure  $p_p$  progressively increases from zero to its previous stationary value while shear stress  $\sigma_{xy}$  progressively decreases from zero to the opposite of its previous stationary value. As shown on Fig. 3.8, all these features are remarkably well captured by the present model.

The apparent viscosity of the suspension is defined as  $\eta_{app} = \sigma_{xy}/\dot{\gamma}$ . From (3.7e), we obtain:

$$\eta_{app}(\dot{\gamma}) = \eta + \eta_e \gamma_{e,xy}(\dot{\gamma}) (\alpha \text{sgn}(\dot{\gamma}) + \beta \gamma_{e,xy}(\dot{\gamma})) \quad (3.15)$$

Notice that the apparent viscosity is independent of the shear rate. Fig. 3.9 presents the evolution of apparent viscosity for a shear reversal, together with a sensitivity analysis to the model parameters. The apparent viscosity shows three regimes after the shear reversal: First, an instantaneous decrease is observed. The apparent viscosity then continues to decrease with a smooth shape until a minimum is reached. Finally, the apparent viscosity increases and relaxes exponentially to its stationary value. As shown in Fig. 3.9, these different regimes are diversely affected by the model parameters  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_e$  and  $\eta$ . The parameter  $\alpha$  controls the relaxation of the solution to its stationary value: the larger  $\alpha$ , the faster the solution reaches the stationary regime. In fact,  $\alpha^{-1}$  interprets as a characteristic deformation for reaching the stationary regime. The parameter  $\beta$  controls the existence of the smooth minimum and the shape of the curve around this minimum. When  $\beta = 0$ , there is no smooth minimum, and the apparent viscosity is monotonically



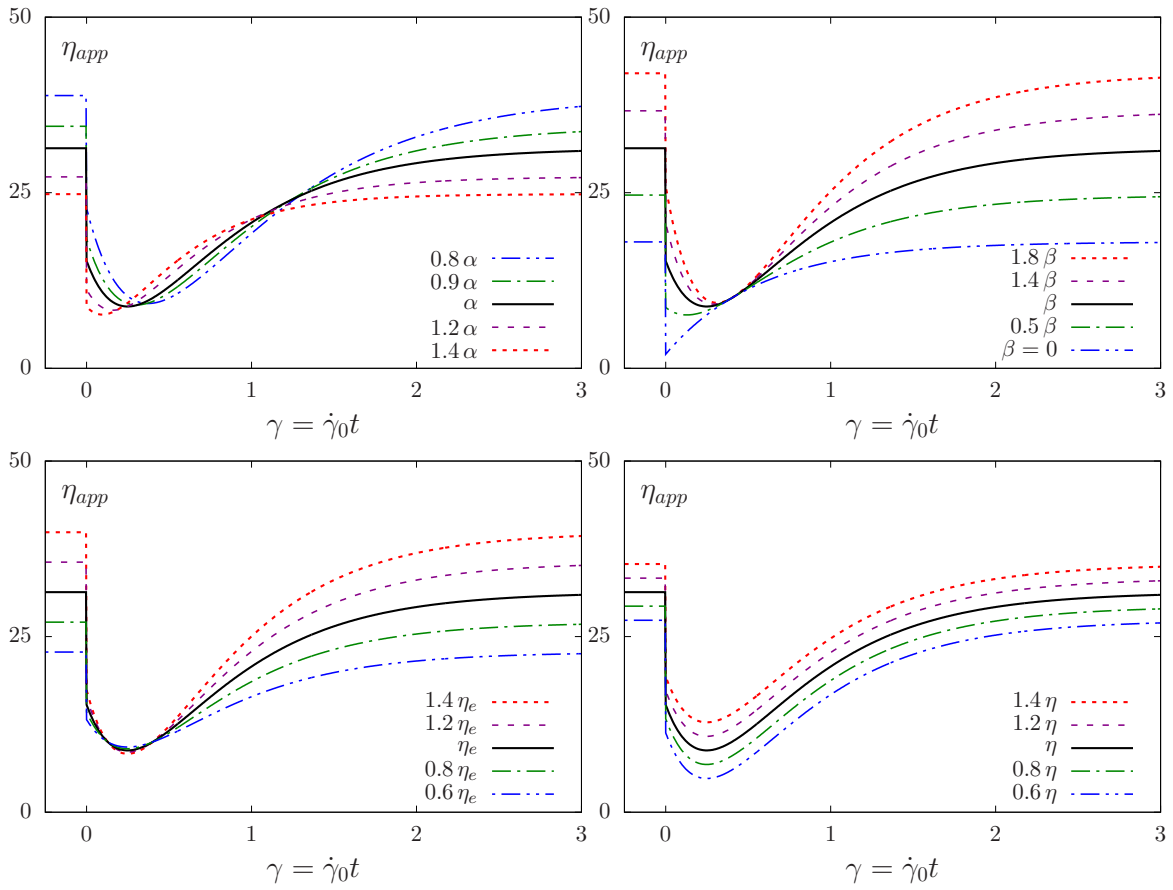


Figure 3.9: Apparent viscosity during shear reversal: sensitivity of the response to the model parameters (base value of the parameters:  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\beta = 5$ ,  $\eta_e = 10$  Pa.s,  $\eta = 10$  Pa.s).

increasing immediately after the shear reversal. The viscosity  $\eta_e$  influences the stationary plateau, while the minimum remains unchanged. Finally, the parameter  $\eta$  globally shifts the apparent viscosity: note that this effect is obvious when considering (3.15).

### 3.4.2 Comparison with experiments

We quantitatively compared our model to the unsteady shear flow experiments of Blanc (2011), sec 3.3 (see also (Blanc et al., 2011a,b, 2013)). This author performed shear reversal experiments in a Couette rheometer. The suspensions were prepared with polymethyl methacrylate (PMMA) spherical particles in a Newtonian oil at various volume fractions  $\phi$  ranging from 0.30 to 0.50. The experiments were performed at an imposed torque whose value was adjusted in order to obtain, for each volume fraction, similar angular velocities in the stationary regime. All geometrical and material parameters of the experiments are summarized in Table 3.1. Note that, experimentally, the suspensions have been found to be slightly shear-thinning, with a power index on the order 0.9 (see (Blanc, 2011)). This slight shear-thinning is not considered in the following comparison with our model.

Neglecting the variations inside the gap, we assume the shear rate as uniform and consider this experiment as a simple shear flow. The problem is then described again by (3.7a)-(3.7f), where now  $\sigma_{xy}$  is imposed and  $\dot{\gamma}$  is unknown. Observe that, based on relation (3.7e), the unknown shear rate  $\dot{\gamma}$  expresses explicitly in terms of the unknown  $\gamma_{e,xy}$  and the given data  $\sigma_{xy}$  (see section 3.7). This expression can then be inserted in (3.7a), yielding a nonlinear scalar ordinary differential equation for  $\gamma_{e,xy}$ . This equation does not admit, to our knowledge, an explicit solution and should be solved numerically. As in the previous paragraph, the numerical procedure uses `lsode` library (Radhakrishnan et Hindmarsh, 1993).

The present model involves four parameters that need to be determined:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_e$  and  $\eta$ . The  $\alpha$  parameter

description	unit	symbol	value
fluid viscosity	$Pa.s$	$\eta_0$	1.03
outer radius	$m$	$R_e$	$2.4 \cdot 10^{-2}$
inner radius	$m$	$R_i$	$1.4 \cdot 10^{-2}$
height	$m$	$L$	$4.5 \cdot 10^{-2}$
torque	$N.m$	$T_m$	<i>imposed</i>
angular velocity	$s^{-1}$	$\omega_1$	<i>measured</i>
shear stress	$Pa$	$\sigma_{xy}$	$\frac{0.818 \times T_m}{2\pi LR_c^2}$
shear rate	$s^{-1}$	$\dot{\gamma}$	$\frac{\omega_1 R_i}{R_e - R_i}$

Table 3.1: Parameters of the shear reversal experiments of Blanc (2011).

$\phi$	$T_m$ ( $10^{-3}$ Nm)	$\alpha$	$\beta$	$\eta_e$ (Pa.s)	$\eta$ (Pa.s)
0.30	0.07	0.715	0.79	0.35	3.5
0.40	0.10	1.33	1.5	2.9	6.6
0.44	0.25	1.80	3.0	9.9	11.5
0.47	0.50	2.37	5.3	21	17
0.50	2.00	3.38	9.3	97	79

Table 3.2: Model parameters used to fit the experiments of Blanc (2011).

has been already identified for this experimental setup, and its dependence upon  $\phi$  is given by (3.11). For each volume fraction, identification of the three other parameters can be performed based on the evolution of the apparent viscosity  $\eta_{app} = \sigma_{xy}/\dot{\gamma}$  during the shear reversals, as illustrated in the previous sensitivity analysis.

Fig. 3.10 presents direct comparisons between model prediction and experimental measurements of the apparent viscosity. Observe that the sudden decrease of the apparent viscosity the after shear reversal, and its relaxation to the stationary value, are qualitatively and quantitatively very well reproduced by the present continuous model, and this for the different volume fractions investigated. For  $\phi = 0.47$ , the apparent viscosity measured during the experiments displays a very slowly increasing trend for large deformations  $\gamma$ . This feature, which is obviously not captured by the model, could be due to slow migration of the particles induced by the small variations of the shear rate in the Couette gap.

$\phi_m$	$\delta_e$ (rad)	$\bar{\beta}$	$\bar{\eta}_e$ (Pa.s)	$\omega$
0.571	0.661	0.152	0.0213	0.652

Table 3.3: Fitting parameters involved in expressions (3.10) and (3.16a)-(3.16c).

Table 3.2 summarizes, for each volume fraction, the values of the four adjustable parameters  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_e$  and  $\eta$  provided by the fitting. Fig. 3.11 shows the dependency upon  $\phi$  of the parameters  $\beta$ ,  $\eta_e$  and  $\eta$ . The regularity

of these dependencies suggests the existence of material functions with the following forms:

$$\beta(\phi) = \bar{\beta} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2}, \quad (3.16a)$$

$$\eta_e(\phi) = \bar{\eta}_e \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-4}, \quad (3.16b)$$

$$\begin{aligned} \eta(\phi) = & \eta_0 \left(1 - \omega + \left(\frac{5}{2} - \frac{2\omega}{\phi_m}\right) \phi\right) \\ & + \eta_0 \omega \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2}. \end{aligned} \quad (3.16c)$$

Hence,  $\beta$  and  $\eta_e$  vs  $\phi$  are expressed by simple power-law dependencies diverging at  $\phi = \phi_m$ , where  $\phi_m$  is the maximum volume fraction of the suspension. Expression (3.16c) for  $\eta(\phi)$  is an original extension of Krieger and Dougherty (Krieger et Dougherty, 1959)'s rule, associated to the  $-2$  power-law index, where  $\omega$  is a balance parameter. Note that, when volume fraction is small, the first order development of (3.16c) coincides with Einstein (Einstein, 1906)'s rule  $\eta(\phi)/\eta_0 = 1 + 5\phi/2 + \mathcal{O}(\phi^2)$  for any value of  $\phi_m$  and  $\omega \in [0, 1]$ . Best-fitted values of all the material parameters involved in (3.16a)-(3.16c) are indicated in Table 3.3. Lastly, recall that the evolution of  $\alpha$  upon  $\phi$  was obtained independently, and is given by (3.11).

### 3.5 Discussion and conclusions

This paper proposes a minimal tensorial model attempting to clearly represent the role of microstructure on the apparent viscosity of non-colloidal suspensions of rigid particles. The contribution to the total stress of the suspension of local anisotropic particle arrangements, is accounted for through a specific *microstructure stress*. This microstructure stress is expressed as a function of a local conformation tensor, whose evolution is governed by a rate-independent viscoelastic-like differential equation. Qualitatively, this model proves capable of reproducing several important non-Newtonian trends exhibited by concentrated suspensions. First, the development of an anisotropic, and fore-aft asymmetric, microstructure in simple shear is well captured by the conformation tensor. As expected, the stationary microstructure is independent of shear rate (see (3.9)). The depletion angle, which corresponds to the largest eigenvalue of the the conformation tensor, is a function of a single model parameter  $\alpha$  that can be adjusted to fit experimental observations. Second, in time-dependent cases, the model predicts transient responses associated to the progressive relaxation of the microstructure towards its stationary state. In agreement with experimental observations, these transient responses occur for shear reversals (due to the associated reversal of anisotropy direction), but not for changes of shear rate with the same sign (since microstructure is rate-independent). Also in agreement with experiments, the microstructure remains frozen during shear pauses, and its evolution during the transients is fully controlled by the shear deformation. The critical deformation to reach the stationary regime is directly related, again, to the parameter  $\alpha$ .

Overall, the model presented here includes only 4 constitutive parameters. Besides  $\alpha$ , two viscosities  $\eta$  and  $\eta_e$  represent the base viscosity of the suspension for an isotropic microstructure and the excess viscosity induced by microstructure anisotropy, respectively, while the non-linearity parameter  $\beta$  controls the early stage of the transients. This limited number of parameters, and their clear physical meaning, is an advantage compared to most previous microstructure-based rheological models proposed in the literature (Phan-Thien et al., 1999; Goddard, 2006; Stickel et al., 2006). In particular, parameter identification for quantitative comparisons with experimental data is relatively straightforward. We showed that the model is capable of quantitatively reproducing the complex transient evolution of apparent viscosity observed after shear reversals for a large range of volume fractions. Both the immediate response, characterized by an instantaneous drop followed by a smooth minimum, and the subsequent exponential relaxation, are well captured. Note that the quadratic term in (3.5b), and the parameter  $\beta$ , are essential to obtain the smooth minimum observed in experimental data. To our knowledge, it is the first time that a microstructure-based rheological model is successfully compared to such a wide experimental data set. This comparison allowed us to derive material functions for the evolution of the constitutive parameters with volume fraction. Noteworthy, the values of the parameter

$\alpha$  were determined from microstructure data (depletion angle), and then applied without adjustment to model the transient response. This validates the use of a single parameter controlling both microstructure anisotropy and the characteristic deformation during transients.

As a further quantitative validation, the model also proved capable of reproducing not only the depletion angle, but the overall shape of the pair distribution function. Here also, it is the first time, to our knowledge, that a continuous model is used to obtain detailed microstructural predictions in agreement with experimental data. Accounting for higher-frequency modes would further improve the prediction of the pair distribution function both for high and low values of the volume fraction, but would require the consideration of higher-order structure tensors in the model. Other promising prospects include the addition of a friction term to the microstructure stress, which could prove important for modeling volume fractions close to  $\phi_m$  and/or experiments performed at imposed particle pressure (Boyer et al., 2011a). Finally, through an approach analogous to SBM (Miller et al., 2009), our model could also be used to predict particle migration in flows involving heterogeneous shear rates, as Couette flows in large gaps, by considering the microstructure stress  $\boldsymbol{\tau}$  as the driver of the particle flux.

Future works shall also consider in more details the issue of normal stresses. Indeed, another important non-Newtonian rheological feature exhibited by non-colloidal suspensions is the development of normal stress differences in simple shear flow, with negative values of  $N_2$ , an ongoing debate concerning the sign of  $N_1$ , and a ratio  $|N_2/N_1|$  on the order of three, typically (Zarraga et al., 2000; Boyer et al., 2011b; Couturier et al., 2011; Dai et al., 2013; Dbouk et al., 2013b). In agreement with experimental observations, our model effectively predicts that microstructure anisotropy is associated to the existence of normal stresses proportional to shear rate. However, expressions of stresses in simple shear lead to  $N_2 = 0$  and  $N_1 > 0$  (see (3.8c)). As a consequence, the particle pressure  $p_p$ , expressed in (3.8d), has a sign opposite to that expected. This indicates that, although the minimal model presented here is capable to reproduce microstructure evolutions, additional degrees of freedom would be needed to capture the full rheological behavior of suspensions. These improvements will be required to consider, e.g., more complex non-viscosimetric flows such as extensional flows (Dai et Tanner, 2017) or flows around an obstacle (Haddadi et al., 2014; Dbouk, 2016). These improvements are also required in order to predict particle migration, by considering the microstructure stress  $\boldsymbol{\tau}$  as the driver of the particle flux, through an approach analogous to SBM (Miller et al., 2009).

## Acknowledgments

It is a pleasure to thank Frédéric Blanc, Élisabeth Lemaire, Laurent Lobry and François Peters for fruitful discussions about the rheology of suspensions and for providing us data files of experimental measurements used in this paper for comparison with our model. The authors would like to thank the three anonymous reviewers for their careful reading of the paper and their constructive comments.

## 3.6 Appendix A : Computation of the probability distribution function

Let  $\mu_{\pm}$  be the two eigenvalues of the fabric tensor  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle$ , with  $\mu_- \leq \mu_+$  and  $\mathbf{e}_- = (\cos(\theta_e), \sin(\theta_e))$  and  $\mathbf{e}_+ = (-\sin(\theta_e), \cos(\theta_e))$  the two corresponding eigenvectors, where  $\theta_e$  is the depletion angle. Expressing (3.12) in the eigenbasis, observing that  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_- = \cos(\theta - \theta_e)$  and  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_+ = \sin(\theta - \theta_e)$ , we get:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\theta - \theta_e) p(\theta) d\theta = \mu_- \quad (3.17a)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\theta - \theta_e) p(\theta) d\theta = \mu_+ \quad (3.17b)$$

Note that, by construction,  $p(\theta)$  is even (see Fig. 3.3). Then, expressing  $p(\theta)$  in terms of a Fourier series as:

$$p(\theta) = \sum_{k \geq 0} p_k \cos(2k(\theta - \theta_e))$$

where  $p_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$  are the Fourier coefficients, we obtain from (3.17a)-(3.17b), after computation of the integrals, that  $p_0 = 1/(2\pi)$  and  $p_1 = -(\mu_+ - \mu_-)/(2\pi)$ . The coefficients  $p_k$  for  $k \geq 2$  remain undetermined. Observe from Fig. 3.5 that, in experimental data, these coefficients present a fast decrease. By retaining only the two first coefficients, the present model is able to predict the following probability distribution:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} (1 - (\mu_+ - \mu_-) \cos\{2(\theta - \theta_e)\}) \quad (3.18)$$

Note that such expression was previously used by Troadec et al. (2002), eqn (1). Remark that  $\theta_e$  minimizes  $p(\theta)$ : as expected, the depletion angle is the direction where the probability to find a neighbor particle is minimal.

In the present model, the fabric tensor is expressed from (3.13) by  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle = \mathbf{b}_e^{-1}/\text{tr}(\mathbf{b}_e^{-1})$  with  $\mathbf{b}_e = \mathbf{I} + \gamma_e$ . Accordingly, the two eigenvalues of the fabric tensor  $\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle$  are

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \frac{(1 + \lambda_-)^{-1}}{(\lambda_+ + 1)^{-1} + (\lambda_- + 1)^{-1}}, \\ \mu_- &= \frac{(1 + \lambda_+)^{-1}}{(\lambda_+ + 1)^{-1} + (\lambda_- + 1)^{-1}}, \end{aligned}$$

where  $\lambda_{\pm}$  denotes the two eigenvalues of  $\gamma_e$ . From (3.8a), we have  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2})/\alpha^2$ . Then  $\mu_+ - \mu_- = 1/\sqrt{1 + \alpha^2}$  and the previous relation (3.18) writes explicitly in terms of the model parameter  $\alpha$  only:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cos(2(\theta - \theta_e)) \right) \quad (3.19)$$

where  $\theta_e$  is expressed explicitly versus  $\alpha$  by (3.9).

### 3.7 Appendix B : System of ODE for imposed stress

Assuming a strictly positive apparent viscosity, we have  $\text{sgn}(\dot{\gamma}(t)) = \text{sgn}(\sigma_{xy}(t))$  for all time  $t \geq 0$  and relation (3.7e) leads to the following explicit expression of the shear rate  $\dot{\gamma}$  versus the given shear stress  $\sigma_{xy}$  and the unknown  $\gamma_{e,xy}$ :

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} \text{if } \sigma_{xy}(t) \neq 0 \text{ then :} \\ \frac{\sigma_{xy}(t)}{\eta + \eta_e (\alpha \text{sgn}(\sigma_{xy}(t)) \gamma_{e,xy}(t) + \beta \gamma_{e,xy}^2(t))} \\ \text{otherwise: } 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

This expression of the shear rate  $\dot{\gamma}$  is replaced in (3.7a)-(3.7b) and we then obtain a nonlinear ordinary differential equations (ODE) in terms of the two unknowns  $\gamma_{e,xy}$  and  $\gamma_{e,xx}$ . These EDO are closed by two initial conditions  $\gamma_{e,xy}(0) = \text{sgn}(\sigma_{xy}(0)) \alpha^{-1}$  and  $\gamma_{e,xx}(0) = 2\alpha^{-2}$ . For the shear reversal,  $\sigma_{xy}(0)$  is chosen and  $\sigma_{xy}(t) = -\sigma_{xy}(0)$  for all  $t > 0$ . For the shear reversal experiments of Blanc (2011) with an imposed torque  $T_m$ ,  $\sigma_{xy}(0)$  is given in table 3.1. After computation of  $\gamma_{e,xy}$  and  $\gamma_{e,xx}$ , the rate of deformation  $\dot{\gamma}(s)$  is computed from (3.20) and finally, the deformation  $\gamma(t)$  is obtained by a numerical integration as  $\int_0^t |\dot{\gamma}(s)| ds$ .

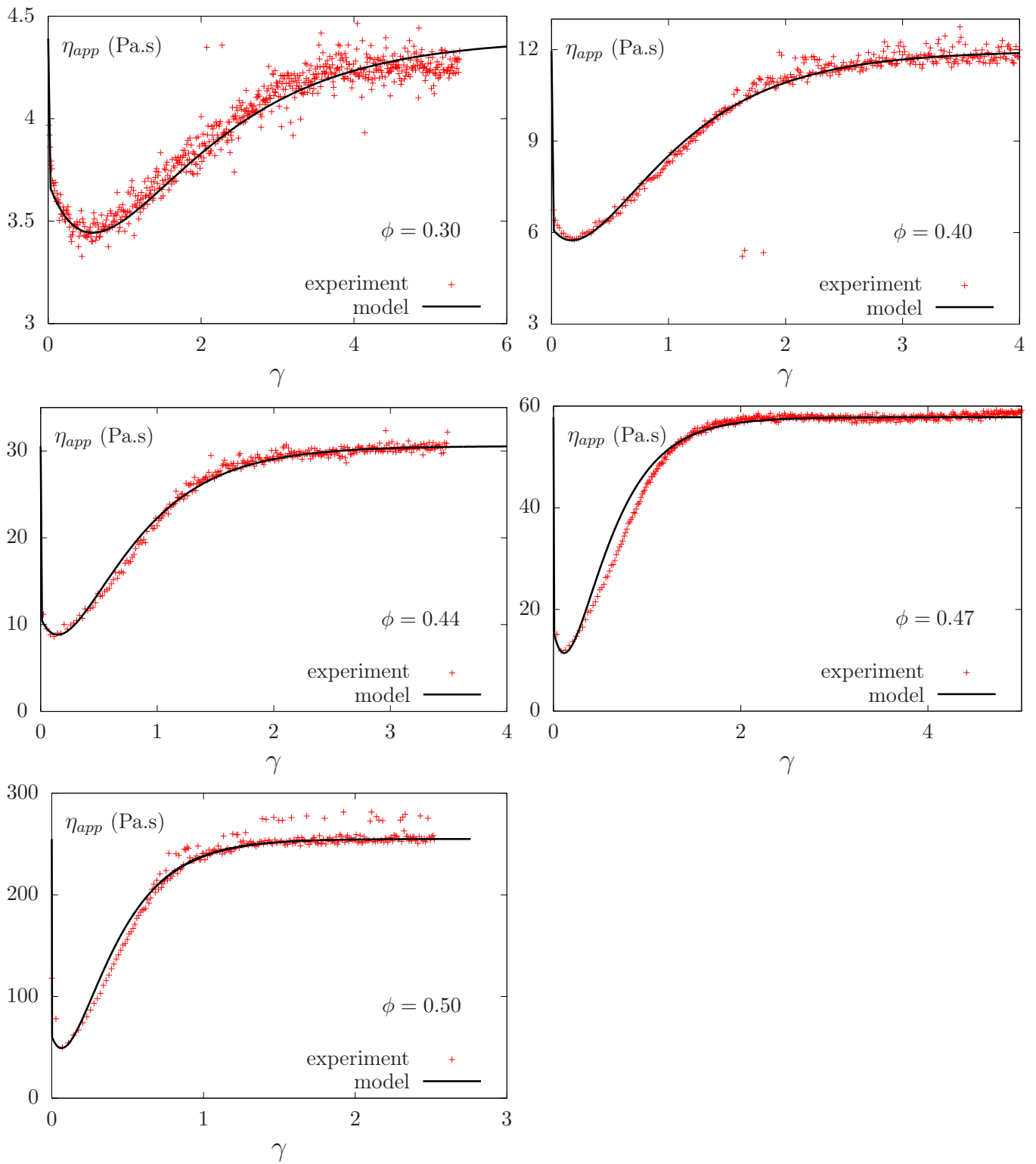


Figure 3.10: Shear reversal: apparent viscosity  $\eta_{app}$  vs deformation  $\gamma$ . Comparison between experimental measurements from [Blanc \(2011\)](#) for a suspension of PMMA particles in a Couette geometry and computations with the present model. For each volume fraction  $\phi$ , the three model parameters  $\beta$ ,  $\eta_e$ , and  $\eta$  were obtained through a best-fit procedure. Parameter values are indicated in [Table 3.2](#).

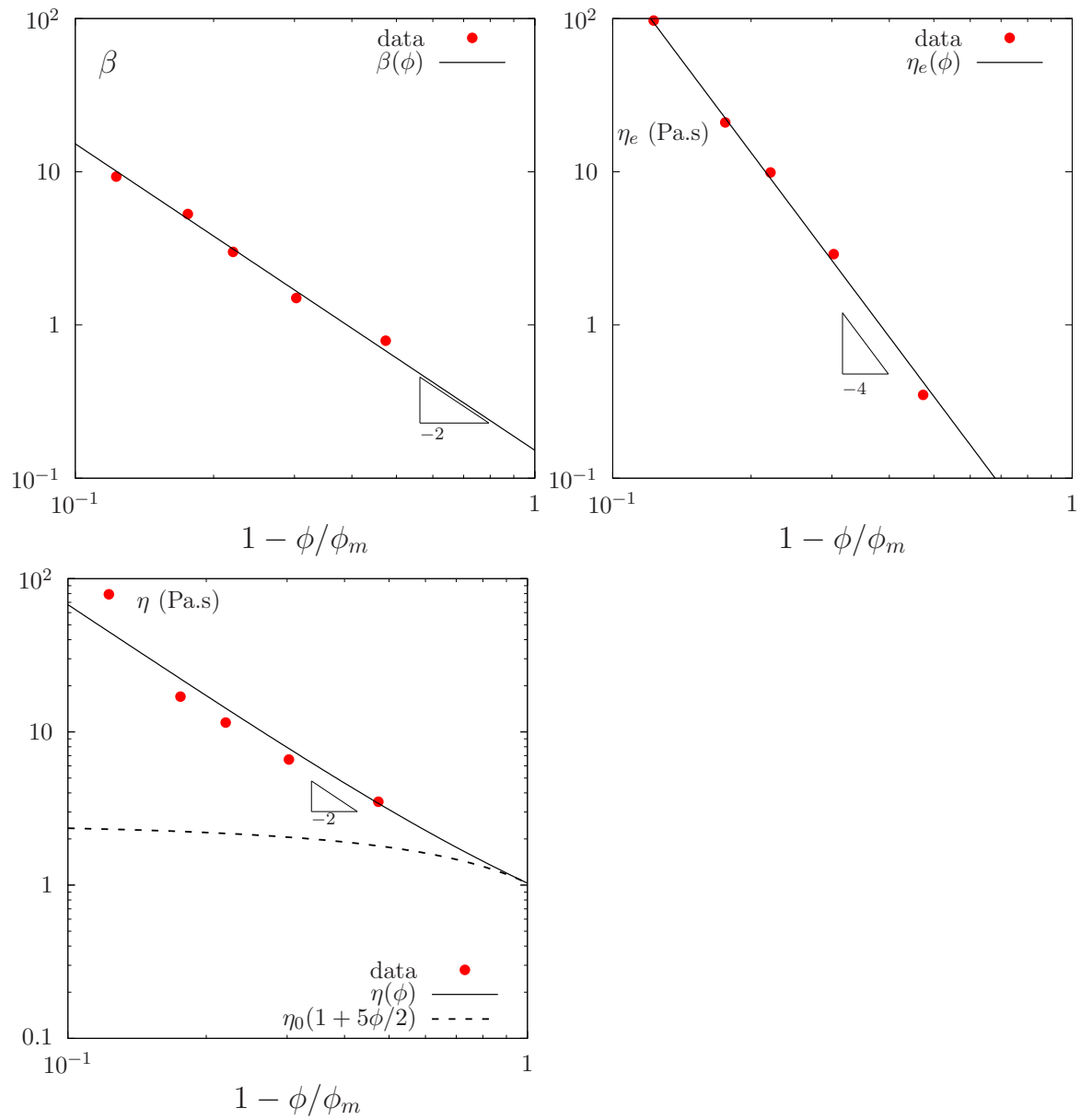


Figure 3.11: Evolution with  $\phi$  of the model parameters  $\beta$ ,  $\eta_e$ , and  $\eta$ , and best fits provided by expressions (3.16a)-(3.16c).





# Chapitre 4

## Différences de contraintes normales

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons introduit un *tenseur de conformation*  $\mathbf{b}_e$  afin de décrire l'anisotropie de la microstructure d'une suspension par une variable continue. Nous poursuivons dans ce chapitre cette démarche. Hand (1962) avait formulé un cadre général pour l'équation constitutive du tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  d'un fluide dont la microstructure est anisotrope. Dans ce contexte,  $\boldsymbol{\sigma}$  est exprimé comme un polynôme en  $\mathbf{b}_e$  et en  $D(\mathbf{u})$ . L'équation d'évolution de  $\mathbf{b}_e$  et l'équation constitutive de  $\boldsymbol{\sigma}$  doivent être indépendantes du taux de cisaillement, comme nous l'avons expliqué au chapitre 3.

Une première motivation à l'introduction d'un tenseur de conformation est la prédiction des variations de la viscosité apparente durant une inversion de cisaillement que présentent les suspensions non-colloïdales. Ces phénomènes observés d'abord par Gadala-Maria et Acrivos (1980) puis par Kolli et al. (2002) et Blanc et al. (2011a) sont apparus comme étant corrélés à une évolution de la microstructure en fonction de la déformation  $\gamma$ . Cette évolution affecte en particulier la distribution des contacts entre les particules, mesurée à l'aide de la fonction de distribution de paires. Différents modèles tensoriels ont permis la réalisation de comparaisons qualitatives avec des mesures de viscosité apparentes lors d'une inversion de cisaillement. Les premières ont été proposées par Phan-Thien (1995) en formulant une fermeture du modèle proposé par Hinch et Leal (1972). Plus récemment, Stickel et al. (2006), et Stickel et al. (2007); Yapici et al. (2009) ont postulé une équation constitutive linéaire en  $\mathbf{b}_e$  et en  $D(\mathbf{u})$  pour le tenseur de contrainte de Cauchy mais leurs comparaisons sont restées qualitatives malgré l'emploi de treize paramètres ajustables. Les premières comparaisons quantitatives sont dues à Goddard (2006) qui a employé deux tenseurs pour décrire l'anisotropie de la microstructure et douze paramètres ajustables. Nous avons proposé au chapitre 3 un modèle intégrant une évolution linéaire pour  $\mathbf{b}_e$  et seulement quatre paramètres ajustables. Ce modèle présente un bon accord quantitatif avec les profils de viscosité apparente mesurés par Blanc et al. (2011a) ainsi qu'avec les angles de déplétion et les fonctions de distribution de paires mesurées par Blanc et al. (2013). Cependant, à notre connaissance, aucun modèle à tenseur de conformation n'a permis d'effectuer des comparaisons quantitatives avec des mesures de contrainte normale dans des suspensions non-colloïdales. En particulier, la pression particulaire prévue par le modèle présenté au chapitre 3 n'a pas le même signe que les pressions particulières mesurées par exemple par Deboeuf et al. (2009). En revanche, la question d'intégrer des contraintes normales réalistes dans les modèles continus présentant des équations constitutives explicites pour le tenseur de Cauchy est étudiée depuis plusieurs années. La première proposition de Morris et Boulay (1999) présente une version du *suspension balance model* améliorant la qualité des prédictions dans la géométrie cône-plan par rapport aux précédents modèles de flux diffusifs (Leighton et Acrivos, 1987) et (Phillips et al., 1992). Ensuite, Miller et Morris (2006) propose une nouvelle version, à la lumière des mesures expérimentales de Zarraga et al. (2000). Les mesures plus récentes de Boyer et al. (2011b), Couturier et al. (2011) et Dbouk et al. (2013b) ont permis à Dbouk et al. (2013a) de proposer un nouveau jeu de valeurs pour les paramètres ajustables du modèle introduit par Miller et Morris (2006). On peut aussi citer une formulation en géométrie quelconque (Miller et al., 2009) ayant donné lieu à une simulation numérique autour d'un obstacle (Dbouk, 2016). En résumé, ces modèles donnent des prédictions assez pertinentes en régime établi mais ne permettent pas de prévoir les

effets transitoires qui sont observés lors d’une inversion de cisaillement. En effet les différentes versions du *suspension balance model* sont fondés sur des fermetures empiriques à l’échelle macroscopique des interactions entre les particules incluant notamment une description de la distribution des contacts mais la construction de ces fermetures ne modélise pas de régime transitoire pour la fonction de distribution de paires, voir (Morris, 2009; Denn et Morris, 2014).

Les simulations discrètes constituent une alternative particulièrement pertinente aux modèles continus comme l’avait déjà remarqué Nott et Brady (1994). Une modélisation dynamique de la fonction de distribution de paires a été proposée en premier par Brady et Bossis (1985). Ces modèles n’intégraient pas d’interaction de contact. L’approche développée par Mari et al. (2014) implémente des forces de contact dotées d’un terme de tangential de friction relié au terme normal par un modèle de contact frottant de type Coulomb. Cependant, la composante normale de l’interaction de contact est définie comme un terme de répulsion électrostatique. Ce modèle de dynamique des contacts couplé avec une version simplifiée de la dynamique stokésienne a permis la réalisation de nombreuses simulations. Mari et al. (2014) obtient une dépendance de la fraction volumique maximale en la rugosité des particules et calcule des profils de contraintes normales reproduisant des phénomènes de rhéo-épaississement très marqués dans les régimes concentrés. Plus récemment la simulation d’une inversion de cisaillement par Chacko et al. (2018) a permis de retrouver le comportement transitoire de la viscosité apparente juste après une inversion de cisaillement. D’autre part, Seto et al. (2017) a réalisé des simulations en régime élongationnel mettant en évidence la présence de différences de contrainte normale et de phénomènes de rhéo-épaississement. L’anisotropie de la microstructure simulée en régime élongationnel par Seto et al. (2017) est qualitativement très différente de celle simulée en cisaillement simple par Chacko et al. (2018). Cependant, on retrouve dans ces deux cas un rhéo-épaississement et la présence de différences de contrainte normale. D’autres méthodes incluant une description plus précise des interactions hydrodynamiques ont permis de réaliser la simulation d’une inversion de cisaillement (Peters et al., 2016) ou des profils de contraintes normales (Gallier et al., 2014c). Ces approches sont prometteuses mais les méthodes présentant les modélisations les plus fines sont aussi les plus difficiles à résoudre.

Face à cela, dans ce chapitre, nous allons proposer un nouveau modèle dans l’esprit de celui présenté au chapitre 3. Celui-ci devra permettre de prédire des différences contrainte normale et une pression particulière pouvant se comparer quantitativement avec des données expérimentales pour des fractions volumiques variables. C’est à dire que l’on veut réaliser des prédictions correctes sur une plage étendue de fractions volumiques, de la suspension très diluée aux cas très concentrés. Afin de valider notre modèle, nous utiliserons deux jeux de données supplémentaires par rapport à ceux utilisés au chapitre 3 issus de (Couturier et al., 2011) et de (Dbouk et al., 2013b). Ces deux expériences s’accordent sur le fait que la seconde différence de contrainte normale  $N_2$  est négative, croissante en valeur absolue avec la fraction volumique  $\phi$  et nulle pour  $\phi = 0$ . En revanche, la mesure de la première différence de contrainte normale  $N_1$  pose plus de difficultés. Ainsi si les deux jeux de données s’accordent pour dire que  $N_1$  est au moins trois fois plus petite de  $N_2$  en valeur absolue, Dbouk et al. (2013b) prévoit  $N_1 > 0$  alors que Couturier et al. (2011) prévoit  $N_1 < 0$ . La section 4.2 présentera un nouveau modèle rhéologique en donnant tout d’abord les équations constitutives qui seront complétées par les conservations de la masse et de la quantité de mouvement. Ensuite, la section 4.3 sera dédiée à l’inversion de cisaillement, nous développerons sur cet exemple un système d’équations faisant apparaître une dépendance temporelle dont nous donnerons explicitement la solution stationnaire. Puis, nous étudierons comment les différents paramètres introduits dépendent de la fraction volumique. Nous veillerons à prévoir des comportements asymptotiques connus dans les limites très diluées et très concentrées. Enfin, nous comparerons nos prédictions avec des données expérimentales. Nous traiterons conjointement le cas de la viscosité apparente lors d’une inversion de cisaillement et le cas des contraintes normales ainsi que de la pression particulière en régime stationnaire. Nous terminerons ce chapitre par une discussion concernant ce nouveau modèle.

## 4.2 Modélisation mathématique

### 4.2.1 Équations constitutives

Comme dans le chapitre 3, nous introduisons le *tenseur de conformation*  $\mathbf{b}_e = d_0^2 \langle \boldsymbol{\ell} \otimes \boldsymbol{\ell} \rangle^{-1}$  où  $\boldsymbol{\ell}$  est un vecteur reliant les centres de deux particules voisines et  $d_0$  est la distance moyenne entre deux particules voisines, dans une configuration isotrope. Remarquons qu'en configuration isotrope,  $\mathbf{b}_e$  vérifie  $\mathbf{b}_e = c_0 \mathbf{I}$  où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité et  $c_0$  est une constante sans dimension que nous choisirons par la suite. Par commodité, nous introduisons  $\boldsymbol{\gamma}_e = \mathbf{b}_e - c_0 \mathbf{I}$  que l'on peut interpréter comme la déformation d'un réseau de proches voisins. Dans le chapitre 3, nous avons pris  $c_0 = 1$ . Nous ferons ici un choix différent afin de s'assurer que  $\mathbf{b}_e$  reste défini positif, sans cette propriété mathématique les valeurs prises par  $\mathbf{b}_e$  seraient incohérentes avec sa définition, voir la remarque 4.1. Nous allons maintenant écrire une équation aux dérivées partielles sur  $\boldsymbol{\gamma}_e$  très proche de (3.5a). Nous reprenons ici les grandes lignes de construction de celle-ci. Nous décomposons d'abord la déformation totale :  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_e + \boldsymbol{\gamma}_v$  où  $\boldsymbol{\gamma}_v$  représente une déformation du matériau associée à un potentiel visqueux. On supposera que la *contrainte locale*,  $\eta_g |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| \boldsymbol{\gamma}_e$  est colinéaire au *tenseur de texture*  $\boldsymbol{\gamma}_e$  et proportionnelle à la norme du taux de cisaillement  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$ .  $\eta_g > 0$  a ici la dimension d'une viscosité. On rappelle la définition de la norme matricielle  $|\boldsymbol{\xi}| = [(1/2)\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}]^{1/2}$  pour toute matrice  $\boldsymbol{\xi}$ . La condition d'équilibre reliant les contraintes locale et visqueuse s'écrit  $\eta_g |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| \boldsymbol{\gamma}_e = \eta_e \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v$  où  $\eta_e > 0$  est la viscosité associée à la contrainte visqueuse. Puis en utilisant la décomposition  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v$  on obtient l'équation suivante pour  $\boldsymbol{\gamma}_e$  :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_e + \frac{\eta_g}{\eta_e} |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| \boldsymbol{\gamma}_e = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.1a)$$

Jusqu'ici, la seule différence avec la construction de l'équation (3.5a) est d'autoriser  $c_0 \neq 1$ . On rappelle que la solution est indépendante du taux de cisaillement c'est-à-dire que celle-ci n'a pas d'échelle de temps caractéristique, voir par exemple (Goddard, 1982). En particulier, si on utilise la variable temporelle sans dimension  $\tilde{t} = |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| t$  l'amplitude de  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$  la solution  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_e$  ne dépend pas de la valeur de  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$ . Ensuite, nous faisons à nouveau l'hypothèse que le tenseur de contrainte de *Cauchy*  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dépend que de deux variables tensorielles  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , le taux de déformation total et  $\boldsymbol{\gamma}_e$ , modélisant l'anisotropie du matériau. Nous poursuivons dans ce chapitre l'exploration du cadre défini par Hand (1962). C'est à dire que nous supposons que  $\boldsymbol{\sigma}$  est développable en séries entières par rapport aux deux variables  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  et  $\boldsymbol{\gamma}_e$ . Le théorème de Cayley-Hamilton en dimension trois implique que les termes d'ordre strictement supérieurs à deux sont combinaisons linéaires des termes d'ordre inférieurs à deux si bien que  $\boldsymbol{\sigma}$  peut être exprimé en fonction des termes d'ordre zéro, un et deux. Ainsi nous donnons au tenseur de contrainte de *Cauchy* l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & -p_b \mathbf{I} + \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left( \eta_g |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| + \eta_1 \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}} : \boldsymbol{\gamma}_e)}{2} \right) \boldsymbol{\gamma}_e \\ & + \eta_2 \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}_e^2 \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma}_e^2}{2} \right) + \eta_3 |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| \boldsymbol{\gamma}_e^2 + \eta_4 \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}_e \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma}_e}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.1b)$$

où  $p_b$  est la somme de la pression dans la phase fluide et d'une pression granulaire due à la rigidité des particules que nous définirons au chapitre 5.  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sont des constantes ayant la dimension d'une viscosité. On remarquera que lorsque  $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$ , les équations (4.1a)-(4.1b) se réduisent aux équations (3.5a)-(3.5b) et on retrouve le modèle présenté au chapitre 3. Nous avons introduit ici tous les termes non-sphériques proposés par Hand (1962). Le terme sphérique  $p_b \mathbf{I}$  dépend implicitement de  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  et de  $D(\mathbf{u})$  contrairement à ceux que Hand (1962) a mentionnés.

### 4.2.2 Présentation du problème

Nous commençons par redéfinir la variable  $\mathbf{u}$ , celle-ci désigne dans ce chapitre la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{u} \rangle$  mentionnée dans la table de notations.

Nous allons maintenant coupler l'équation d'évolution (4.1a) et l'équation constitutive (4.1b) aux équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse du mélange. Ainsi, nous obtiendrons un problème

fermé. On commence par écrire que  $\dot{\gamma} = 2D(\mathbf{u})$  où  $2D(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$  et  $\mathbf{u}$  désigne la vitesse du mélange. L'équation constitutive (4.1b) devient alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p_b \mathbf{I} + 2\eta D(\mathbf{u}) \\ &+ \eta_e \left\{ (\delta_1 |2D(\mathbf{u})| + \beta_1 (D(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\gamma}_e)) \boldsymbol{\gamma}_e + \beta_2 (\boldsymbol{\gamma}_e^2 D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \boldsymbol{\gamma}_e^2) \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 |2D(\mathbf{u})| \boldsymbol{\gamma}_e^2 + \delta_2 (\boldsymbol{\gamma}_e D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \boldsymbol{\gamma}_e) \right\} \end{aligned} \quad (4.2a)$$

Nous avons ici introduit les constantes sans dimensions suivantes :  $\delta_1 = \eta_g/\eta_e$ ,  $\beta_1 = \eta_1/\eta_e$ ,  $\beta_2 = \eta_2/\eta_e$ ,  $\beta_3 = \eta_3/\eta_e$  et  $\delta_2 = \eta_4/\eta_e$ . Le taux de déformation du réseau de proches voisins,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_e$  a été remplacé par une dérivée de tenseur de type *Gordon-Schowalter* (Gordon et Schowalter, 1972) voir aussi (Saramito, 2016), p. 150 :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_e = \frac{\mathcal{D}_a \boldsymbol{\gamma}_e}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\gamma}_e - W(\mathbf{u}) \boldsymbol{\gamma}_e + \boldsymbol{\gamma}_e W(\mathbf{u}) - a(D(\mathbf{u}) \boldsymbol{\gamma}_e + \boldsymbol{\gamma}_e D(\mathbf{u}))$$

où  $W(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2}$  et  $a \in [-1, 1]$  est le paramètre de la dérivée de tenseur. Ainsi, on peut coupler (4.1a) aux conservations de la masse et de la quantité de mouvement du mélange et obtenir un système avec trois inconnues.  $p_b$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_e$  et trois équations :

$$\frac{\mathcal{D}_a \boldsymbol{\gamma}_e}{\mathcal{D}t} + \delta_1 |2D(\mathbf{u})| \boldsymbol{\gamma}_e - 2D(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.2b)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (4.2c)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (4.2d)$$

+ conditions initiales + conditions au bord

où  $\boldsymbol{\sigma}$ , dans (4.2c) est donné par (4.2a). À noter que si  $\beta_2 = \beta_3 = \delta_2 = 0$  et  $a = 1$  alors le présent modèle coïncide avec celui présenté dans le chapitre 3.

**Remarque 4.1.** D'après (4.2b), le tenseur de conformation  $\mathbf{b}_e = c_0 \mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_e$  vérifie :

$$\frac{\mathcal{D}_a \mathbf{b}_e}{\mathcal{D}t} - \frac{-c_0 \delta_1 |2D(\mathbf{u})|}{a} \mathbf{I} + \delta_1 |2D(\mathbf{u})| \mathbf{b}_e = 2(1 - ac_0) D(\mathbf{u}) \quad (4.3)$$

Par conséquent, si on suppose  $c_0 = 1/a$  dans la définition de  $\mathbf{b}_e$ , alors le terme de droite est nul dans (4.3). On rappelle que  $\delta_1 > 0$ , on peut alors utiliser le résultat de Hulslen (1990) pour montrer que le tenseur de conformation est symétrique défini positif en tout temps si sa condition initiale satisfait cette hypothèse et que le paramètre de la dérivée vérifie  $a \in ]0, 1]$

## 4.3 Cisaillement simple et inversion de cisaillement

### 4.3.1 Problème réduit

On considérera dans cette partie un écoulement en cisaillement simple. L'axe  $x$  est choisi dans la direction de l'écoulement et l'axe  $y$  est choisi dans la direction du gradient  $\nabla = (0, \partial_y, 0)$ . La vitesse vérifie donc  $\mathbf{u}(t, x, y, z) = (u_x(t, y), 0, 0)$ . Le taux de cisaillement est uniforme et on le notera  $\dot{\gamma} = \partial_y u_x$ , ainsi,  $|2D(\mathbf{u})| = |\dot{\gamma}|$ . L'équation d'évolution (4.2b) de  $\boldsymbol{\gamma}_e(t)$  se réduit alors au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\partial_t \gamma_{e,xx} - (1+a) \dot{\gamma} \gamma_{e,xy} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xx} = 0 \quad (4.4a)$$

$$\partial_t \gamma_{e,yy} + (1-a) \dot{\gamma} \gamma_{e,xy} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,yy} = 0 \quad (4.4b)$$

$$\partial_t \gamma_{e,xy} - \frac{1+a}{2} \dot{\gamma} \gamma_{e,yy} - \frac{1-a}{2} \dot{\gamma} \gamma_{e,xx} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xy} = \dot{\gamma} \quad (4.4c)$$

$$\partial_t \gamma_{e,xz} - (1+a) \dot{\gamma} \gamma_{e,yz} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,xz} = 0 \quad (4.4d)$$

$$\partial_t \gamma_{e,yz} + (1-a) \dot{\gamma} \gamma_{e,xz} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,yz} = 0 \quad (4.4e)$$

$$\partial_t \gamma_{e,zz} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,zz} = 0 \quad (4.4f)$$

On remarquera que si on prend pour condition initiale  $\gamma_{e,xz} = \gamma_{e,yz} = \gamma_{e,zz} = 0$  alors ces composantes sont nulles pour tout temps. L'équation constitutive (4.2a) de  $\boldsymbol{\sigma}$  devient donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & -p_b + \eta_e \{ (\delta_1 |\dot{\gamma}| + \beta_1 \dot{\gamma} \gamma_{e,xy}) \gamma_{e,xx} + \beta_2 \dot{\gamma} (\gamma_{e,xx} + \gamma_{e,yy}) \gamma_{e,xy} \\ & + \beta_3 |\dot{\gamma}| (\gamma_{e,xx}^2 + \gamma_{e,xy}^2) + \delta_2 \dot{\gamma} \gamma_{e,xy} \} \end{aligned} \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & -p_b + \eta_e \{ (\delta_1 |\dot{\gamma}| + \beta_1 \dot{\gamma} \gamma_{e,xy}) \gamma_{e,yy} + \beta_2 \dot{\gamma} (\gamma_{e,xx} + \gamma_{e,yy}) \gamma_{e,xy} \\ & + \beta_3 |\dot{\gamma}| (\gamma_{e,xy}^2 + \gamma_{e,yy}^2) + \delta_2 \dot{\gamma} \gamma_{e,xy} \} \end{aligned} \quad (4.5b)$$

$$\sigma_{zz} = -p_b \quad (4.5c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \eta \dot{\gamma} + \eta_e \left\{ (\delta_1 |\dot{\gamma}| + \beta_1 \dot{\gamma} \gamma_{e,xy}) \gamma_{e,xy} + \frac{\beta_2 \dot{\gamma}}{2} (\gamma_{e,xx}^2 + \gamma_{e,yy}^2 + 2\gamma_{e,xy}^2) \right. \\ & \left. + \beta_3 |\dot{\gamma}| (\gamma_{e,xx} + \gamma_{e,yy}) \gamma_{e,xy} + \frac{\delta_2 \dot{\gamma}}{2} (\gamma_{e,xx} + \gamma_{e,yy}) \right\} \end{aligned} \quad (4.5d)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (4.5e)$$

Comme au chapitre 3, le système (4.5) est linéaire et admet des solutions explicites si le cisaillement  $\dot{\gamma}$  est imposé. Nous considérerons également le cas où la contrainte  $\sigma_{xy}$  est imposée car nous avons pour but de comparer les résultats de calcul avec les données expérimentales de [Blanc et al. \(2013\)](#). Une résolution numérique du système (4.5) est alors nécessaire et nous effectuerons celle-ci avec les mêmes outils qu'au chapitre 3.

### 4.3.2 Solution explicite en régime stationnaire

On donne ici une solution explicite du système (4.4a)-(4.4c) en régime stationnaire :

$$\gamma_{e,xx} = \frac{1+a}{1-a^2+\delta_1^2} \quad (4.6a)$$

$$\gamma_{e,yy} = \frac{-(1-a)}{1-a^2+\delta_1^2} \quad (4.6b)$$

$$\gamma_{e,xy} = \frac{\delta_1 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma})}{1-a^2+\delta_1^2} \quad (4.6c)$$

Le viscosité apparente,  $\eta_{app} = \sigma_{xy}/\dot{\gamma}$  les différences de contrainte normale  $N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$  et  $N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz}$  associées à la solution stationnaire se déduisent facilement de (4.5a)-(4.5d) et de (4.6a)-(4.6c) :

$$\eta_{app} = \eta + \frac{\eta_e}{1-a^2+\delta_1^2} \left( \delta_1^2 + a\delta_2 + \frac{\delta_1^2 \beta_1 + (1+a^2+\delta_1^2) \beta_2 + 2a\delta_1 \beta_3}{1-a^2+\delta_1^2} \right) \quad (4.7a)$$

$$N_1 = \frac{2\eta_e |\dot{\gamma}|}{1-a^2+\delta_1^2} \left( \delta_1 + \frac{\delta_1 \beta_1 + 2a\beta_3}{1-a^2+\delta_1^2} \right) \quad (4.7b)$$

$$N_2 = \frac{\eta_e |\dot{\gamma}|}{1-a^2+\delta_1^2} \left( \delta_1 (-1+a+\delta_2) + \frac{-(1-a)\delta_1 \beta_1 + 2a\delta_1 \beta_2 + ((1-a)^2 + \delta_1^2) \beta_3}{1-a^2+\delta_1^2} \right) \quad (4.7c)$$

La pression totale  $p = -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ . Il est ici pertinent d'introduire la pression particulière  $p_p$  vérifiant  $p = p_b + p_p$ .  $p_p$  est la partie sphérique du tenseur de contrainte provenant de la déformation du réseau de voisins  $\gamma_e$ . Nous justifierons au chapitre 5 que  $p_b = p_f + p_c$  où  $p_f$  est une pression moyenne sur la phase fluide et  $p_c$  est une pression de contact. En introduisant cette pression de contact, nous interprétons la phase particulière de la suspension comme un fluide compressible congestionné. On obtient donc en régime permanent :

$$p_p = -\frac{2\eta_e |\dot{\gamma}|}{3(1-a^2+\delta_1^2)} \left( \delta_1 (a+\delta_2) + \frac{a\delta_1 (\beta_1 + 2\beta_2) + (1+a^2+\delta_1^2) \beta_3}{1-a^2+\delta_1^2} \right) \quad (4.7d)$$

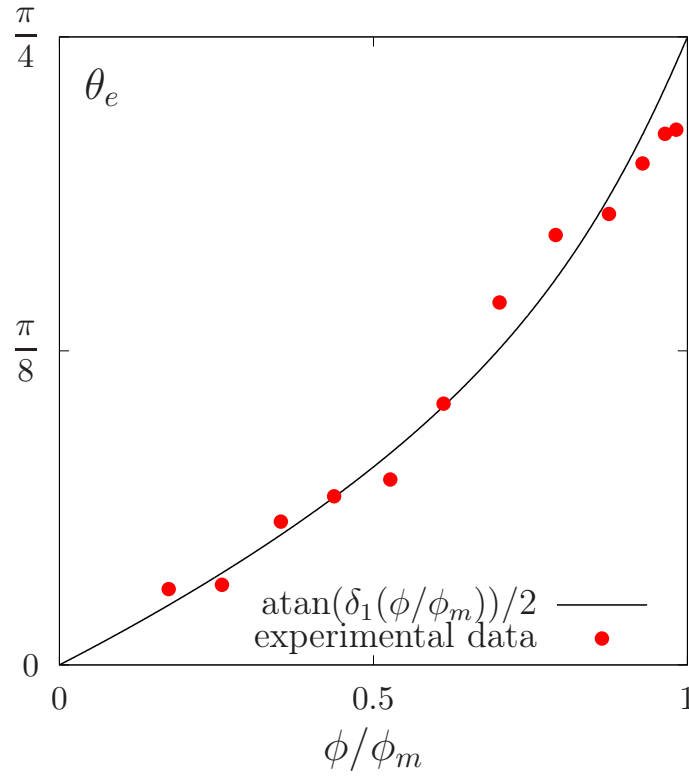


FIGURE 4.1 : L'angle de déplétion  $\theta_e$  en fonction de la fraction volumique  $\phi$  : comparaison entre la prédiction du modèle (4.9a) et les mesures expérimentales de Blanc et al. (2013).

### 4.3.3 Expression des paramètres matériels en fonction de la fraction volumique

Le modèle présenté à la partie 4.2 fait intervenir huit paramètres matériels : deux viscosités  $\eta$  et  $\eta_e$  ainsi que six paramètres sans dimension :  $a$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$ . Ces paramètres ont été ajustés pour comparer les prédictions du modèle à plusieurs jeux de données provenant d'observations expérimentales. Ces expériences ayant été réalisées à des fractions volumiques  $\phi$  variables, nous avons pu constater que la valeur de  $a$  est quasiment indépendante de celle de  $\phi$  alors que les autres paramètres semblent se comporter comme des puissances de la fraction volumique réduite  $\psi = \phi/\phi_m$ , où  $\phi_m$  désigne la fraction volumique maximale d'une suspension.

On rappelle ici que la *direction de déplétion* est définie comme la direction dans laquelle la probabilité de contact entre deux particules est minimale : cette direction coïncide avec celle du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de  $\gamma_e$ . Comme nous l'avons montré dans le chapitre 3, cette propriété permet de définir explicitement la fonction de distribution de paires. À noter que Stickel et al. (2007) avaient suggéré un lien avec une autre définition de la direction de déplétion, c'est-à-dire la direction dans laquelle la distance moyenne entre deux particules voisines est maximale. Comme dans le chapitre 3, l'angle de déplétion s'exprime en régime établi très simplement en fonction des paramètres matériels du modèle. Ce résultat est énoncé dans la proposition 4.2 :

**Proposition 4.2.** Pour un écoulement stationnaire en cisaillement simple, l'angle de déplétion, c'est-à-dire l'angle entre la direction de déplétion et l'axe  $Ox$ , vérifie :  $\theta_e = \text{atan}(\delta_1)/2$  ou de manière équivalente  $\delta_1 = \tan(2\theta_e)$ .

*Preuve.* Nous utilisons l'expression de  $\gamma_e$  donnée par (4.6a)-(4.6c). Les valeurs propres de  $\gamma_e$   $\lambda_{min} \leq \lambda_{max}$  sont toutes deux non nulles et vérifient :

$$\lambda_{min} = \frac{\delta_1^{-1}}{1 + \delta_1^{-2}(1 - a^2)} \left( a\delta_1^{-1} - \sqrt{\delta_1^{-2} + 1} \right) \quad \lambda_{max} = \frac{\delta_1^{-1}}{1 + \delta_1^{-2}(1 - a^2)} \left( a\delta_1^{-1} + \sqrt{\delta_1^{-2} + 1} \right)$$

Ces valeurs propres sont respectivement associées aux vecteurs propres :

$$\mathbf{v}_{min} = \begin{bmatrix} \delta_1^{-1} - \sqrt{\delta_1^{-2} + 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{max} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\delta_1^{-2} + 1} - \delta_1^{-1} \end{bmatrix}$$

Par définition, l'angle de déplétion  $\theta_e \in ]-\pi/2; \pi/2[$  est l'angle  $(\mathbf{e}_x; \mathbf{v}_{max})$ . On en déduit que

$$\tan(\theta_e) = \sqrt{\delta_1^{-2} + 1} - \delta_1^{-1} \quad \theta_e \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

ce qui est équivalent à :

$$\delta_1 = \tan(2\theta_e) \quad \theta_e \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad (4.8)$$

Comme on sait d'après les observations que  $|\theta_e| < \pi/4$ , l'équation (4.8) définit  $\theta_e$  de manière unique.  $\square$

On notera ici que seules les valeurs propres de  $\gamma_e$  dépendent du paramètre de dérivation  $a$ . Les directions propres de  $\gamma_e$  sont indépendantes de  $a$ . Cela signifie que la qualité des résultats présentés au chapitre 3 n'est pas affectée par la variation du paramètre  $a$ . Ainsi, l'échelle de déformation  $\delta_1$  est liée à l'angle de déplétion par une relation simple. Blanc et al. (2013) présente des mesures expérimentales de  $\theta_e$  pour plusieurs valeurs de la fraction volumique  $\phi$ . Nous avons déduit de ces données une expression de  $\delta_1$  en fonction de  $\phi$ , ce résultat est présenté dans la Fig. 4.1. Voici l'expression de  $\delta_1$  en fonction de  $\phi$  que nous proposons :

$$\delta_1(\psi) = \bar{\delta}_1 \left( (1 - \psi)^{-1} - (1 - b\psi) \right) \quad (4.9a)$$

où  $\bar{\delta}_1$  et  $b$  sont des constantes positives indépendantes de la fraction volumique. On peut remarquer que  $\delta_1(0) = 0$  et  $\delta_1(1) = +\infty$ . Ainsi le modèle prévoit bien que  $\theta_e(0) = 0$  et  $\theta_e(1) = \pi/4$ . En ajustant ces deux constantes sur les données expérimentales, on obtient :  $\bar{\delta}_1 \approx 0.27$  et  $b \approx 2$ .

Les observations de Miller et Morris (2006) montrent que  $\eta_{app}$ ,  $N_1$  et  $N_2$  divergent tous en  $(1 - \psi)^{-2}$  lorsque  $\psi$  tend vers 1. En cohérence avec cela, nous supposons pour les viscosités  $\eta$  et  $\eta_e$  les expressions suivantes :

$$\eta(\psi) = \eta_0 \left( 1 - \omega + \psi \left( \frac{5}{2} \phi_m - 2\omega \right) + \omega(1 - \psi)^{-2} \right) \quad (4.9b)$$

$$\eta_e(\psi) = \eta_0 \bar{\eta}_e \psi (1 - \psi)^{-2} \quad (4.9c)$$

où  $\omega$  et  $\bar{\eta}_e$  sont des constantes positives, indépendantes de la fraction volumique. Les autres paramètres  $\delta_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  doivent s'annuler pour  $\psi = 0$ . En effet, lorsque  $\psi = 0$  le mélange est exclusivement constitué du fluide interstitiel, il s'agit donc d'un fluide newtonien. Nous effectuons alors pour ces paramètres une hypothèse assez simple

$$\delta_2(\psi) = \bar{\delta}_2 \left( (1 - \psi)^{-1} - (1 - b\psi) \right) \quad (4.9d)$$

$$\beta_i(\psi) = \bar{\beta}_i \left( (1 - \psi)^{-1} - 1 \right)^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.9e)$$

où  $\bar{\delta}_2$  et  $\bar{\beta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des constantes indépendantes de la fraction volumique. Ainsi, le problème de trouver un jeu de paramètres permettant de comparer les prédictions du modèle avec des observations expérimentales effectuées sur un large panel de valeurs pour la fraction volumique se réduit à identifier sept paramètres indépendants de la fraction volumique :  $a$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\eta}_e$ ,  $\bar{\delta}_2$  et  $\bar{\beta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Remarque 4.3.** Au chapitre 3, nous avons imposé une valeur unique pour la fraction volumique maximale  $\phi_m$ . Ici, nous laissons  $\phi_m$  dépendre des conditions expérimentales. Cela explique que  $\eta_e$  et  $\delta_1$  exprimés ici en fonction de  $\psi$  vérifient des lois différentes de celles proposées au chapitre 3. En revanche, nous avons conservé l'expression de  $\eta$  mentionnée au chapitre 3.

### Étude asymptotique pour $\psi$ proche de 0

Le développement de Taylor à l'ordre deux de  $\eta_{app}$  au voisinage de  $\psi = 0$  permet de déduire de (4.7a) le développement suivant :

$$\eta_{app} = \eta_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \phi_m \psi + \left( \frac{3\omega}{2} + \frac{a(1+b)\bar{\delta}_2 \bar{\eta}_e}{(1-a^2)} \right) \psi^2 \right) + \mathcal{O}(\psi^3) \quad (4.10a)$$

Lorsque  $\psi = 0$ , la suspension est un fluide newtonien de viscosité  $\eta_0$ , c'est-à-dire identique au fluide interstitiel. Le modèle est aussi compatible avec la théorie des suspensions diluées développée dans (Einstein, 1906). En effet, d'après (4.10a), au premier ordre, la viscosité apparente s'écrit  $\eta_{app} \approx \eta_0(1 + 5\phi/2)$ . À noter ici que les expressions des lois en  $\psi$  choisies pour les paramètres matériels  $\eta$ ,  $\eta_e$ ,  $\delta_i$  et  $\beta_i$  impliquent  $\eta_{app}(\psi) - (1 + 5\phi_m/2\psi) = \mathcal{O}(\psi^2)$ . Ces choix sont cohérents avec les développements asymptotiques en régime très dilué proposés par Batchelor et Green (1972b) qui mentionnent que les termes en  $\mathcal{O}(\psi^2)$  dans l'expression de la viscosité apparente s'interprètent comme un effet des interactions de contact.

Nous étudions maintenant le comportement asymptotique des différences de contrainte normale. Au voisinage de la limite diluée,  $\psi = 0$ , en injectant les lois (4.9) dans les équations (4.7b)-(4.7d) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{\eta_{app} |\dot{\gamma}|} &= \frac{2\bar{\eta}_e \bar{\delta}_1 (1+b)}{1-a^2} \psi^2 + \mathcal{O}(\psi^3) \\ \frac{N_2}{\eta_{app} |\dot{\gamma}|} &= -\frac{(1-a)\bar{\eta}_e \bar{\delta}_1 (1+b)}{1-a^2} \psi^2 + \mathcal{O}(\psi^3) \\ \frac{p_p}{\eta_{app} |\dot{\gamma}|} &= -\frac{2a\bar{\eta}_e \bar{\delta}_1 (1+b)}{3(1-a^2)} \psi^2 + \mathcal{O}(\psi^3) \end{aligned} \quad (4.11a)$$

On remarque que  $N_1$  et  $N_2$  s'annulent lorsque  $\phi = 0$ , comme on pouvait s'y attendre. En outre, on trouve  $N_1 \geq 0$  et  $N_2 \leq 0$  lorsque  $\phi$  est suffisamment proche de zéro. Ce comportement qualitatif est en accord avec les mesures expérimentales de contrainte normale réalisées par Couturier et al. (2011); Dbouk et al. (2013b). On note aussi que, à l'ordre un, le terme de droite des équations (4.11) est indépendant de la viscosité  $\eta_0$  du fluide suspendant, cela confirme les observations de Dbouk et al. (2013b).

### Étude asymptotique pour $\psi$ proche de 1

Lorsque l'on est proche de la concentration maximale, c'est-à-dire  $\psi \rightarrow 1$ , la viscosité apparente  $\eta_{app}$  définie par l'équation (4.7a) admet un développement asymptotique en  $(1-\psi)^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \eta_{app} &= (1-\psi)^{-2} \eta_0 \bar{\eta}_1 + \mathcal{O}((1-\psi)^{-1}) \\ \text{avec } \bar{\eta}_1 &= \left( \omega + \left( 1 + \frac{\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{\bar{\delta}_1^2} \right) \bar{\eta}_e \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nous avons bien ici, un comportement asymptotique en  $(1-\phi/\phi_m)^{-2}$  pour  $\eta_{app}$ , au voisinage de la concentration maximale. Cela est cohérent avec les observations voir par exemple (Maron et Pierce, 1956; Krieger et Dougherty, 1959).

Dans le cas très concentré, le développement de Taylor de différences de contrainte normale en  $1-\psi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{\eta_{app} |\dot{\gamma}|} &= \frac{2\bar{\eta}_e}{\bar{\eta}_1 \bar{\delta}_1} \left( 1 + \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\delta}_1^2} \right) (1-\psi) + \mathcal{O}((1-\psi)^2) \\ \frac{N_2}{\eta_{app} |\dot{\gamma}|} &= -\frac{\bar{\eta}_e}{\bar{\eta}_1} \left( \frac{-\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_3}{\bar{\delta}_1^2} \right) + \mathcal{O}(1-\psi) \\ \frac{p_p}{\eta_{app} |\dot{\gamma}|} &= \frac{2\bar{\eta}_e}{3\bar{\eta}_1} \left( \frac{-\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_3}{\bar{\delta}_1^2} \right) + \mathcal{O}(1-\psi) \end{aligned}$$

À noter aussi que  $N_1/(\eta_{app} |\dot{\gamma}|)$  s'annule lorsque  $\psi \rightarrow 1$  alors que  $N_2/(\eta_{app} |\dot{\gamma}|)$  tend vers une constante. Les mesures de différences de contrainte normale de Couturier et al. (2011); Dbouk et al. (2013b) indiquent que



$a$	$b$	$\omega$	$\bar{\eta}_e$	$\bar{\delta}_1$	$\bar{\delta}_2$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$
0.6	2	0.28	0.21	0.27	-0.8	0.05	0.45	-0.19

TABLE 4.1 : Valeurs des paramètres matériels indépendants de la fraction volumique utilisés pour établir les prédictions du modèle.

la deuxième différence des contrainte normale est strictement négative dès que l'on s'éloigne du cas dilué. Si on suppose que  $\bar{\beta}_3 \leq 0$  et  $\bar{\delta}_2 \bar{\beta}_3 > 0$  alors,  $N_2$  tend vers une valeur strictement négative lorsque  $\psi$  tend vers 1, assurant ainsi un accord qualitatif avec les observations. L'équation (4.12) implique en outre que le rapport  $\bar{\eta}_e/\bar{\eta}_1$  ne dépend pas de  $\eta_0$ . Ainsi, d'après(4.7) les rapports  $N_1/\eta_{app}$  et  $N_2/\eta_{app}$  sont indépendants de la viscosité du fluide suspendant, en accord avec [Dbouk et al. \(2013b\)](#) Il reste maintenant à identifier six paramètres matériels indépendants de la fraction volumique :  $a$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\delta}_2$  et  $\bar{\beta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La méthode utilisée pour réaliser cette identification sera présentée dans la sous-section 4.5. Nous présentons d'abord les résultats obtenus.

#### 4.3.4 Comparaisons quantitatives avec des expériences

Le modèle présenté ici a permis d'établir des résultats présentant un accord qualitatif avec les mesures expérimentales. Nous allons voir dans quelle mesure des comparaisons quantitatives avec un jeu de données expérimentales couvrant un large panel de valeurs pour la fraction volumique sont réalisables. Des profils de viscosité apparente en régime transitoire, lors d'une inversion de cisaillement ont été mesurés par [Blanc et al. \(2011a\)](#). En régime établi, [Couturier et al. \(2011\)](#) et [Dbouk et al. \(2013b\)](#) ont réalisé des mesures de différences de contrainte normale. Ces trois jeux de données expérimentales ont été mesurées dans des suspensions dont les propriétés physiques sont variables. [Blanc et al. \(2011a\)](#) ont préparé des suspensions de sphères en PMMA d'un rayon de  $r_p = 16 \mu m$  dans un fluide d'une viscosité  $\eta_0 = 1.02 Pa.s$ . La fraction volumique maximale annoncée par [Blanc et al. \(2011a\)](#),  $\phi_m = 0.535$  est assez faible, cela pourrait être lié au procédé de fabrication des sphères, responsable de la présence de cellulose à la surface de celles-ci. [Couturier et al. \(2011\)](#) ont préparé des suspensions de sphères en polystyrène d'un rayon de  $r_p = 35 \mu m$  dans un fluide de viscosité  $\eta_0 = 2.15 Pa.s$ . La fraction volumique maximale annoncée par [Couturier et al. \(2011\)](#),  $\phi_m = 0.62$  est assez élevée. [Dbouk et al. \(2013b\)](#) ont aussi utilisé des sphères en polystyrène d'un rayon de  $r_p = 70 \mu m$  et différents fluides de viscosité variable  $0.05 \leq \eta_0 \leq 0.5$ . [Dbouk et al. \(2013b\)](#) annoncent une fraction volumique maximale  $\phi_m = 0.58$ . En outre, les fluides suspendant utilisés sont différents d'une expérience à une autre. En dépit des différences entre les différents protocoles expérimentaux que nous venons de mentionner, nous cherchons un unique jeu de paramètres indépendants de la fraction volumique,  $\{a, \bar{\delta}_2, \bar{\beta}_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$  pour lequel les prédictions de notre modèle sont en accord à la fois avec les mesures de viscosité apparente lors d'une inversion de cisaillement et avec celles de différences de contrainte normale en régime établi. La librairie de résolution d'équations différentielles ordinaires `lsode` développée par [Radhakrishnan et Hindmarsh \(1993\)](#) est utilisée pour résoudre (4.4a)-(4.4c) ainsi que (4.5a)-(4.5d) lorsque  $\sigma_{xy}$  est imposé et que  $\dot{\gamma}$  est inconnu. Cette librairie a été utilisée à travers une interface vers le langage `python`. Cette interface a été implémentée dans l'environnement `numpy-scipy` proposé par [Jones et al. \(2001-\)](#). La librairie d'optimisation `lmfit` proposée par [Newville et al. \(2016\)](#), implémente entre autre une interface vers `python` de `netlib`. Nous allons utiliser celle-ci pour ajuster les valeurs des six paramètres matériels indépendants de la fraction volumique. La méthode utilise de manière simultanée les données provenant d'expériences réalisées en régime établi par [Blanc et al. \(2011a\)](#) et celles provenant d'expériences réalisées en régime établi par [Dbouk et al. \(2013b\)](#). Les détails de la méthode de minimisation seront données dans la partie 4.5 et les valeurs obtenues sont regroupées dans la table 4.1.

Nous commentons à présent la comparaison entre les prédictions du modèle intégrant les valeurs des paramètres matériels ajustées et les observations expérimentales. À noter que la valeur de la fraction volumique maximale donnée par [Blanc et al. \(2011a\)](#) est assez faible comparée à celle donnée par toutes les autres mesures,  $\phi_m = 0.535$  contre  $0.56 \leq \phi_m \leq 0.58$ . Cette différence s'explique par la présence de rugosités dues à la fabrication des billes d'après [Blanc et al. \(2011a\)](#).

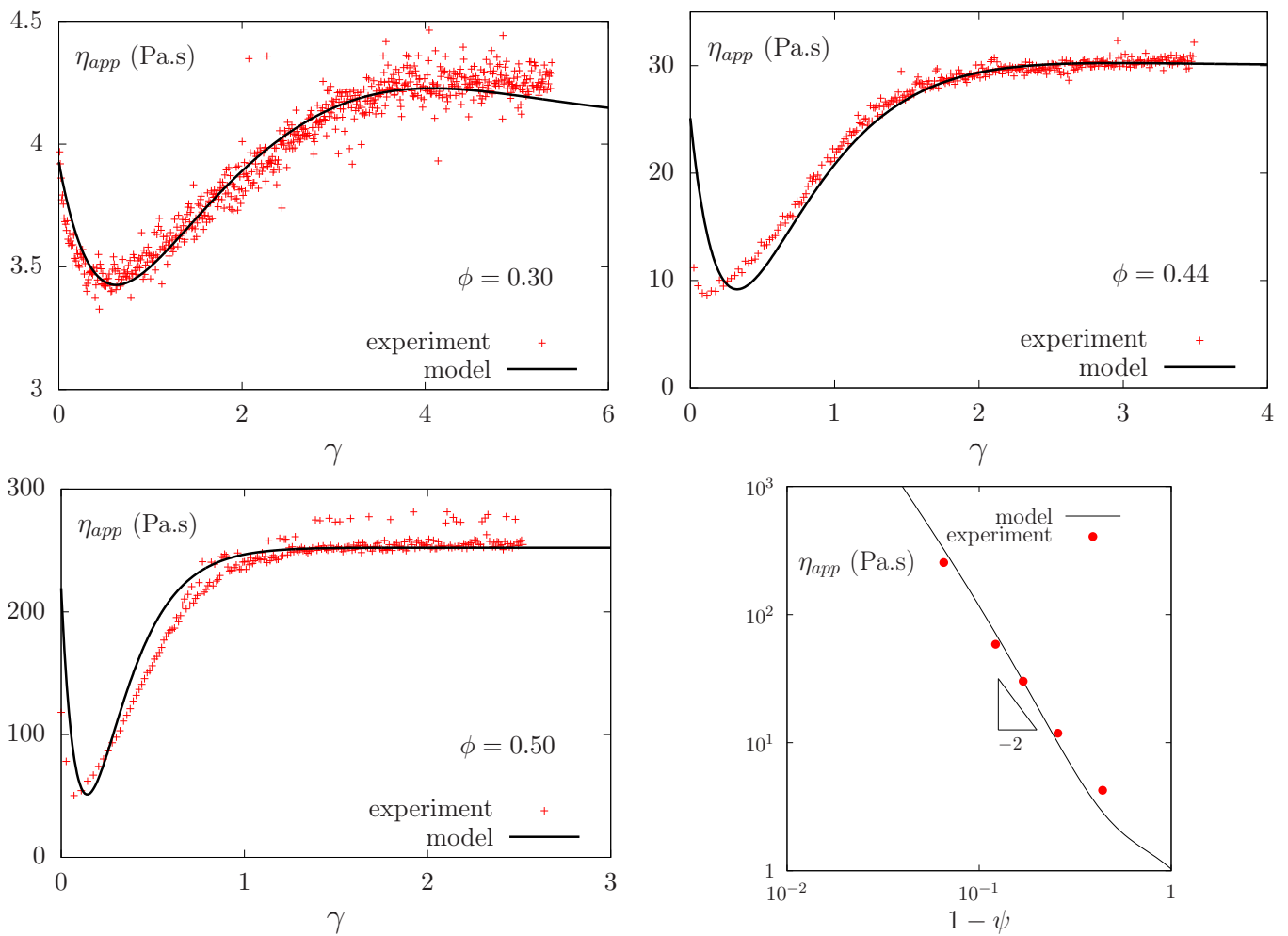


FIGURE 4.2 : viscosité apparente en fonction de la déformation pendant une inversion de cisaillement : comparaison entre les prédictions du modèle et les mesures expérimentales de [Blanc et al. \(2011a\)](#) pour plusieurs valeurs de la fraction volumique  $\psi$ . En bas à droite : la viscosité apparente en fonction de la fraction volumique  $\psi$ .

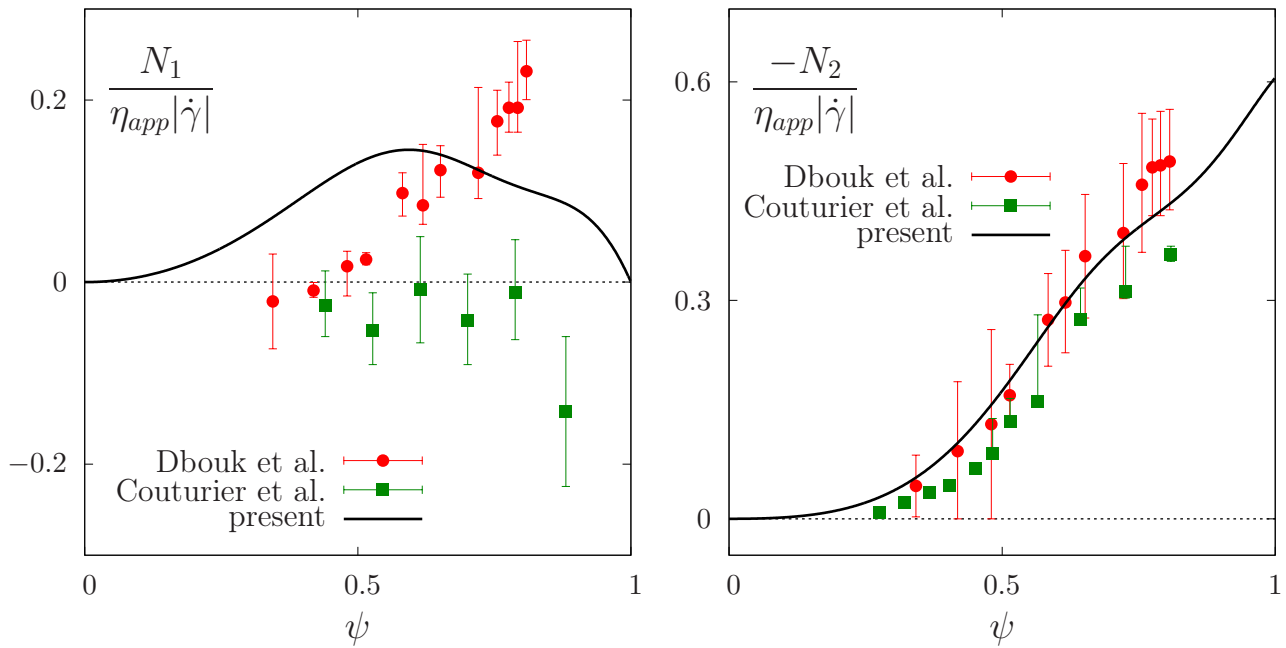


FIGURE 4.3 : Les différences de contrainte normale en cisaillement simple en fonction de la fraction volumique : comparaison entre les prédictions du modèle et les mesures expérimentales de [Dbouk et al. \(2013b\)](#) et [Couturier et al. \(2011\)](#)

La figure 4.2 représente le comportement transitoire de la viscosité apparente  $\eta_{app}(\gamma)$  en fonction de la déformation totale  $\gamma(t)$ , pour plusieurs valeurs de la fraction volumique. Rappelons ici que la déformation totale est définie par :  $\gamma(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)| ds$  et que l'expérience à l'origine des données a été réalisée à contrainte imposée, c'est-à-dire que le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}(t)$  varie et il est une inconnue du problème. On notera que l'accord entre les prédictions du modèle et les mesures expérimentales est bon pour toutes les valeurs de la fraction volumique. On remarque que pour  $\phi = 0.30$  le modèle prévoit un maximum local suivi d'une lente relaxation. En bas à droite de la Fig. 4.2, la valeur en régime permanent de la viscosité apparente prédite par (4.7a) est comparée aux données expérimentales et l'accord est excellent.

La figure 4.3 représente les différences de contrainte normale en fonction de la fraction volumique en régime établi. Les prédictions du modèle sont comparées aux mesures expérimentales de [Dbouk et al. \(2013b\)](#) et [Couturier et al. \(2011\)](#). On rappelle que  $N_2$  est négative et domine  $N_1$ , dont le signe est sujet à controverse, voir par exemple ([Denn et Morris, 2014](#)). On observe que le modèle reproduit correctement les comportements qualitatifs des différences de contrainte normale :  $N_2 < 0$  et  $|N_1| < |N_2|$ . Les deux jeux de données expérimentales font état d'une amplitude assez petite pour  $N_1$  devant celle de  $N_2$  mais les auteurs n'obtiennent pas le même signe pour  $N_1$ . Le modèle présenté ici prédit pour la première différence de contrainte normale réduite  $\alpha_1 = \frac{N_1}{\eta_{app}\dot{\gamma}}$  un profil non monotone en fonction de  $\psi$ , s'annulant pour  $\psi = 0$  et pour  $\psi = 1$ . L'amplitude de  $\alpha_1$  est en accord avec les observations, le signe de  $\alpha_1$  prédit est le même que celui mesuré par [Dbouk et al. \(2013b\)](#). Les prédictions pour la deuxième différence de contrainte normale réduite  $\alpha_2 = \frac{N_2}{\eta_{app}\dot{\gamma}}$  présentent des valeurs négatives, en accord quantitatif avec les deux jeux de données expérimentales, le profil en fonction de  $\psi$  est croissant en amplitude.

La figure 4.4 compare la pression particulière  $p_p$  calculée à l'aide du modèle présenté ici avec les mesures de [Deboeuf et al. \(2009\)](#). On notera que l'accord avec les données expérimentales est assez bon, en particulier pour des particules de rayon  $r = 80 \mu\text{m}$ . À noter que ces prédictions ont été obtenues avec les paramètres matériels donnés dans la table 4.1, qui avaient été ajustés avec les données de [Blanc et al. \(2011a\)](#) et de [Dbouk et al. \(2013b\)](#), c'est-à-dire que le fluide et les particules utilisés pour effectuer les mesures de pression ([Deboeuf et al., 2009](#)) sont différents de ceux utilisés pour régler les paramètres du modèle. Ce résultat est cohérent avec les simulations discrètes de [Gallier et al. \(2014b\)](#) qui prévoient une faible dépendance de la pression

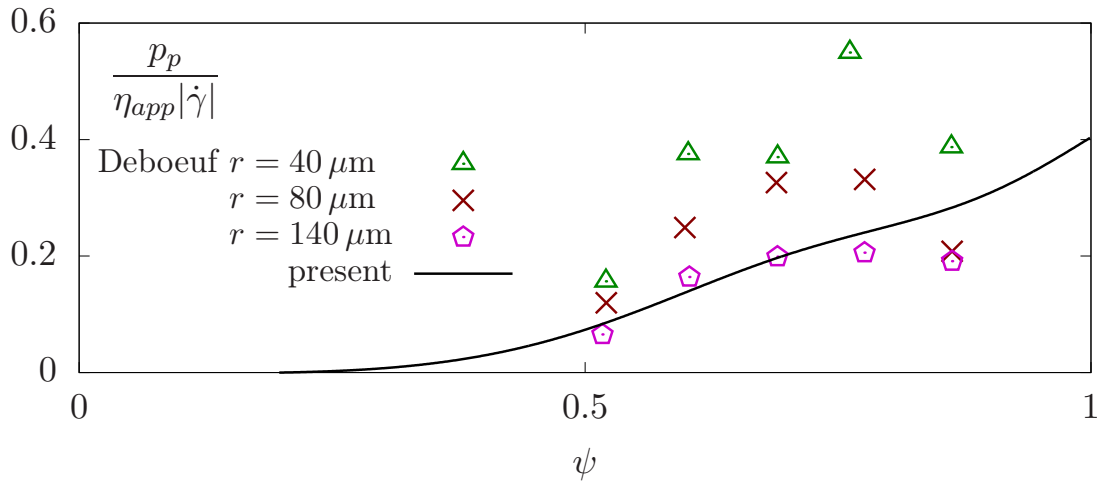


FIGURE 4.4 : La pression particulaire en cisaillement simple en fonction de la fraction volumique : comparaison entre les prédictions du modèle et les mesures expérimentales de [Deboeuf et al. \(2009\)](#) effectuées avec trois distributions de particules dont le rayon est noté  $r$ .

particulaire aux paramètres expérimentaux. Ces prédictions, réalisées indépendamment de la procédure de calibration du modèle constituent donc une validation de celui-ci.

**Remarque 4.4.** Le calcul des profils de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  en fonction de  $\psi$  représentés à la figure 4.3 a nécessité le choix des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\eta}_e$ ,  $\bar{\delta}_i$  et  $\bar{\beta}_i$ , présentés dans la table 4.1. Le calcul des profils de viscosité apparente en fonction  $\gamma$  représentés à la figure 4.2 a nécessité le choix des valeurs de  $\eta(\psi)$ ,  $\eta_e(\psi)$ ,  $\delta_i(\psi)$ ,  $\beta_i(\psi)$  et de  $a$  pour différentes valeurs de  $\psi$ . Le paramètre de dérivation  $a$  a été pris constant pour toutes les comparaisons effectuées. Les valeurs de  $\delta_1(\psi)$  sont définies à partir de celles de  $\bar{\delta}_1$  de  $b$  injectées dans l'équation (4.9a). Les valeurs de  $\eta(\psi)$ ,  $\eta_e(\psi)$ ,  $\delta_2(\psi)$  et de  $\beta_i(\psi)$  n'ont pas été fixées en injectant les paramètres  $b$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\eta}_e$ ,  $\bar{\delta}_2$ ,  $\bar{\beta}_i$  dans les équations (4.9b)-(4.9e). Nous renvoyons à la section 4.5 pour plus d'explications. La figure 4.5 permet de voir la corrélation entre les lois en  $\psi$  définies par les équations (4.9b)-(4.9e) dans lesquelles les paramètres utilisés pour tracer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  à la figure 4.3 ont été injectées et les valeurs utilisées pour tracer les profils de viscosité apparentes à la figure 4.2. L'accord entre les deux jeux de paramètres n'est pas parfait. On peut expliquer cela par une légère dépendance de ces paramètres aux conditions expérimentales.

## 4.4 Conclusion

Comme cela avait déjà été observé par [Boyer et al. \(2011a\)](#) ou [Dbouk et al. \(2013b\)](#), la fraction volumique maximale d'une suspension de sphères rigides est bien inférieure à la compaction maximale d'une distribution aléatoire de sphères identiques. Les simulations numériques discrètes ([Mari et al., 2014](#)) et ([Wyart et Cates, 2014](#)) ont fait apparaître une sensibilité importante de la fraction volumique maximale à différents paramètres physiques, notamment la rugosité des particules et le taux de déformation. Ainsi, pour comparer des données issues d'expériences dont les paramètres physiques et chimiques sont différents, il est pertinent de considérer des grandeurs invariantes, comme la fraction volumique réduite  $\psi = \phi/\phi_m$ . Forts de ce constat, nous avons étendu le modèle que nous avons présenté au chapitre 3 en exprimant celui-ci en fonction de la variable  $\psi$ . Au cours de ce chapitre, nous l'avons présenté puis comparé à des données expérimentales. Nous avons rajouté trois termes au tenseur de contrainte de Cauchy (4.1b) mais l'équation d'évolution du tenseur de conformation (4.1a) a été modifiée plus légèrement, nous avons remplacé la dérivée convectée supérieure utilisée au chapitre 3 par une dérivée de *Gordon-Schowalter* avec un paramètre matériel  $a \in ]0, 1[$ .

Ainsi, nous avons pu effectuer de nombreuses prédictions présentant un bon accord avec des données expérimentales. Tout d'abord nous retrouvons de bons comportements asymptotiques dans les limites très diluées et très concentrées pour la viscosité apparente et les différences de contrainte normale  $N_1$  et  $N_2$  en régime stationnaire. Ensuite, nous obtenons des comparaisons quantitatives en régime stationnaire pour l'anisotro-

pie de la microstructure c'est-à-dire l'angle de déplétion et pour la seconde différence de contrainte normale. Enfin, l'accord de profils transitoires de la viscosité apparente durant une inversion de cisaillement avec des données expérimentales est quantitatif. L'évolution de la première différence de contrainte normale  $N_1$  en fonction de  $\psi$  que nous avons calculée n'est pas monotone. Cela est cohérent avec l'aspect peu régulier des données expérimentales. Ces prédictions permettent de retrouver  $|N_1| < |N_2|$  ce qui est conforme aux observations. Nous ne reproduisons pas parfaitement les points expérimentaux mais les prédictions restent tout de même quantitatives compte tenu des incertitudes pesant sur les valeurs mesurées. Ainsi, nous calculons une pression particulière en accord avec des mesures expérimentales. L'apport de ce chapitre réside donc dans la qualité des prédictions effectuées en ce qui concerne les contraintes normales.

Ce modèle ouvre la voie à des calculs en régime élongationnel ou dans des géométries plus complexes. D'autre part, il est maintenant aussi possible de considérer des phénomènes se déroulant sur des échelles de temps plus importantes, comme les phénomènes de migration. Le chapitre 5 présente un modèle mathématique original par rapport aux différentes variantes du suspension balance model, inspiré par les développements asymptotiques réalisés au chapitre 2. La dérivation de ce modèle est à la fois compatible avec des équations constitutives explicites pour le tenseur de contrainte de Cauchy et avec des modèles rhéologiques plus complexes comme celui que nous venons de présenter.

## 4.5 Annexe : Identification des paramètres matériels

### 4.5.1 Méthode numérique

Nous représentons l'ensemble des paramètres à caler par  $P \in \mathbb{R}^n$  avec  $n = 37$ . L'algorithme utilise une méthode de Levenberg-Marquardt (Moré et al., 1980) afin de minimiser la fonction coût :

$$\begin{aligned}
J = & \sum_{i \in C} \frac{w_i}{\gamma_i} \int_0^{\gamma_i} |\eta_{app,i}(\gamma) - \eta_{i,obs}(\gamma)| d\gamma + \frac{w_{stat}}{\psi_1 - \psi_0} \int_{\psi_0}^{\psi_1} |\eta_{app}(\psi) - \eta_{app,obs}(\psi)| d\psi \\
& + \sum_{i=1}^2 \frac{w_i}{\psi_1 - \psi_0} \int_{\psi_0}^{\psi_1} |\alpha_i(\psi) - \alpha_{i,obs}(\psi)| d\psi \\
& + \frac{1}{\psi_1 - \psi_2} \int_{\psi_2}^{\psi_3} w_{\beta_1} |\beta_1(\psi) - \beta_{1,int}(\psi)| + w_{\beta_2} |\beta_2(\psi) - \beta_{2,int}(\psi)| + w_{\beta_3} |\beta_3(\psi) - \beta_{3,int}(\psi)| \\
& + w_{\eta_e} |\eta_e(\psi) - \eta_{e,int}(\psi)| + w_{\eta} |\eta(\psi) - \eta_{int}(\psi)| d\psi
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Soit  $C = \{0.3; 0.4; 0.44; 0.47; 0.5\}$  l'ensemble des fractions volumiques pour lesquelles les mesures de viscosité apparente lors d'une inversion de cisaillement ont été effectuées.

Pour un élément  $i$  de  $C$ ,  $\eta_{app,i}$  est la solution numérique de (4.4a)-(4.4c) calculée en utilisant les paramètres  $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i}, \delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \eta_i, \eta_{e,i}, a$ .

À noter que  $\delta_{1,i} = \delta_1(i)$  avait été calé auparavant, voir la figure 4.1. Les autres coefficients sont des coordonnées du vecteur de paramètres  $P$ .

Pour  $i \in \{1; 2\}$ , les  $\alpha_i$  sont donnés par (4.7c), sachant que  $\delta_1$  est calculé à partir de (4.9a) en utilisant les coefficients  $\bar{\delta}_1, b$  qui avaient été calés précédemment, voir la figure 4.1.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_2, \eta, \eta_e$  sont calculés à partir de (4.9b)-(4.9c) en utilisant les coefficients  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3, \bar{\delta}_2, \omega, \bar{\eta}_e$  qui sont des coordonnées de  $P$ .

Les fonctions  $\eta_{i,obs}$  sont des interpolations par des fonctions constantes par morceaux des profils expérimentaux de viscosité apparente en fonction de la déformation  $\gamma$  réalisés lors d'une inversion de cisaillement par Blanc et al. (2011a).

La fonction  $\eta_{app,obs}$  est une interpolation par des fonctions constantes par morceaux des valeurs en régime stationnaire de la viscosité apparente mesurée par Blanc et al. (2011a) en fonction de  $\psi$ .

$\phi$	$T$ ( $10^{-3}\text{N.m}$ )	$\delta_{1,i}$	$\eta_i$ (Pa.s)	$\eta_{e,i}$ (Pa.s)	$\beta_{1,i}$	$\beta_{2,i}$	$\beta_{3,i}$	$\bar{\delta}_{2,i}$
0.30	0.07	0.647	3.55	0.534	0.0928	1.26	-0.316	-2.02
0.40	0.1	1.20	6.79	2.53	0.37	3.87	-1.13	-4.03
0.44	0.25	1.69	10.4	5.74	0.936	10.7	-2.42	-5.27
0.47	0.5	2.43	15.1	9.71	2.69	23.5	-5.52	-6.26
0.50	2	4.36	55.7	37.2	10.1	90.4	-42.3	-12.4

TABLE 4.2 : Le jeu de paramètres résultant de la procédure de calage

Les fonctions  $\alpha_{i,obs}$  sont des interpolations par des fonctions constantes par morceaux des valeurs en régime stationnaire des différences de contrainte normale mesurées par [Dbouk et al. \(2013b\)](#) en fonction de  $\psi$ .

En répartissant les paramètres utilisés pour calculer les profils de viscosité apparente durant une inversion de cisaillement dans les graphes  $\{(i, \beta_{1,i}), i \in C\}$ ,  $\{(i, \beta_{2,i}), i \in C\}$ ,  $\{(i, \beta_{3,i}), i \in C\}$ ,  $\{(i, \delta_{2,i}), i \in C\}$ ,  $\{(i, \eta_i), i \in C\}$ ,  $\{(i, \eta_{e,i}), i \in C\}$  on peut définir leurs interpolations par les fonctions constantes par morceaux respectivement :  $\beta_{1,int}, \beta_{2,int}, \beta_{3,int}, \delta_{2,int}, \eta_{int}, \eta_{e,int}$ .

Pour coder cela, il est pertinent de définir  $P$  comme un dictionnaire contenant  $n = 37$  valeurs de type double et dont l'ensemble des clefs est

$$\{\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i}, \delta_{2,i}, \eta_i, \eta_{e,i}, i \in C\} \cup \{\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3, \bar{\delta}_2, \omega, \bar{\eta}_e, a\}$$

La fonctionnelle  $J$  présente de nombreux minima locaux, cela explique que les valeurs présentées dans la table 4.2 résultent d'une série de minimisations de  $J$  réalisées avec différentes conditions initiales et différentes valeurs pour les poids  $\{w_i\}$ .

Les derniers ajustements ont été effectués en ne laissant varier qu'un paramètre à la fois pour chaque minimisation. On donne néanmoins à titre d'exemple des valeurs possibles pour les poids :

$$w_i = \frac{20}{\eta_{app,obs}(i)}, w_{stat} = 1, w_\eta = w_{\eta_e} = w_{\beta_1} = w_{\beta_2} = w_{\beta_3} = w_{\delta_2} = 10^{-2}, \frac{w_1}{3} = w_2 = 10$$

Nous résumons ici la façon dont les différents paramètres évoqués dans ce chapitre ont été utilisés :

La table 4.1 rassemble les valeurs des huit paramètres matériels indépendants de la fraction volumique.  $\bar{\delta}_1$ ,  $b$ ,  $\bar{\eta}_e$ ,  $\bar{\beta}_1$ ,  $\bar{\beta}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$ ,  $\bar{\delta}_2$ ,  $\omega$ ,  $a$ .

La table 4.2 rassemble les valeurs des paramètres de  $P_u = \{\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \delta_{2,i}, \eta_i, \eta_{e,i}, i \in C\}$ .

Les valeurs de  $\bar{\delta}_1$ ,  $b$  ont été calées séparément et leurs valeurs ont permis de tracer la figure 4.1. Les valeurs des six autres paramètres ont été calées en utilisant la procédure indiquée dans cette sous-section.

Les paramètres dont les valeurs sont présentées aux tables 4.1 et 4.2, à l'exception de  $\bar{\delta}_1$  et  $b$  constituent les coordonnées du vecteur  $P$  et leurs valeurs ont été calées par la procédure décrite dans cette sous-section.

Les valeurs de  $\delta_1$  utilisées pour tracer la figure 4.2 proviennent de l'équation (4.9a) dans laquelle les valeurs de  $\bar{\delta}_1$  et  $b$  définies à la table 4.1 ont été injectées. Celle des autres paramètres proviennent de  $P_u$ .

Les figures 4.3 et 4.4 ont été tracées en injectant les équations (4.9b)-(4.9c) dans les relations (4.7a)-(4.7c), utilisant ainsi les paramètres de la table 4.1.

La figure 4.5 permet de voir l'accord entre l'ensemble de paramètres  $P_u$  les lois continues utilisées pour calculer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (4.9).

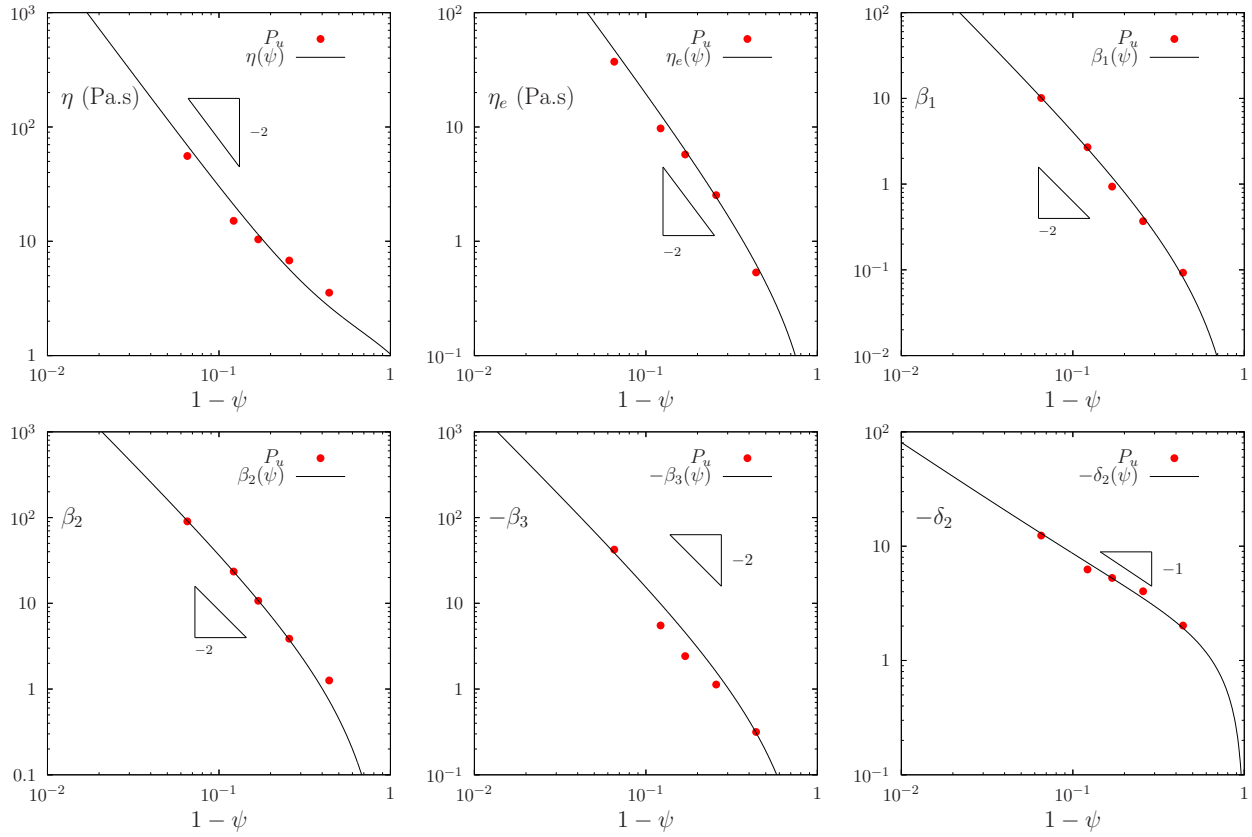


FIGURE 4.5 : Ensemble de paramètres  $P_u = \{\eta_i, \eta_{e,i}, \beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i}, \delta_{2,i}, i \in C\}$  en fonction de  $1 - \phi/\phi_m$  comparés aux lois continues (4.9b)-(4.9c).

### 4.5.2 Étude de sensibilité

La figure 4.6 présente une étude de sensibilité portant sur la valeur de nos huit paramètres. Celle-ci présente l'effet de leur variation sur l'allure de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  en fonction de  $\psi$ . D'autre part, la figure 4.7 représente une étude de sensibilité d'un profil transitoire de viscosité apparente.

La sensibilité aux paramètres  $\omega$  et  $\bar{\beta}_1$  des profils de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sur la figure 4.6 est la assez limitée, en revanche la variation d'autres paramètres peut provoquer des changements qualitatifs notables. En particulier, une variation importante de tous les autres paramètres conduit à des profils non-monotones pour  $\alpha_2$ , ce qui est contraire aux observations en particulier des valeurs trop petites de  $\delta_2$  que nous avons supposé nul au chapitre 3 entraînent une amplitude trop faible pour  $\alpha_2$ . D'autre part, il n'est pas admissible que  $|\alpha_1| \geq |\alpha_2|$  pour certaines valeurs de  $\psi$ , cela est obtenu lorsque  $a$  est proche de 1 et  $\beta_3$  proche de 0. Au chapitre 3, nous avons pris  $a = 1$  et  $\beta_3 = 0$ , il était donc bien nécessaire de laisser ces deux paramètres varier pour obtenir des profils de différences de contrainte normale réalistes. D'autre part, le signe de  $\alpha_2$  n'est pas constant lorsque  $a$  et  $\delta_1$  sont trop grands et lorsque  $\beta_2$  est trop petit, comme au chapitre 3 nous avons supposé  $\beta_2 = 0$ , la nécessité de laisser varier  $\beta_2$  est mise en évidence. La figure 4.6 justifie donc l'introduction des paramètres  $a$ ,  $\bar{\delta}_2$ ,  $\bar{\beta}_2$  et  $\bar{\beta}_3$  dans le nouveau modèle rhéologique présenté dans ce chapitre par rapport à celui présenté au chapitre 3.

La figure 4.7 montre une sensibilité assez faible aux paramètres  $a$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$  et  $\delta_2$ . Sans surprise par rapport aux résultats présentés au chapitre 3, seuls les paramètres  $\eta$  et  $\delta_1$  agissent sur le minimum du profil de viscosité apparente. La valeur de  $\eta$  agit sur la valeur de ce minimum et la valeur de  $\delta_1$  agit sur la valeur de la déformation  $\gamma$  pour laquelle ce minimum est atteint. Cela explique le peu de modifications par rapport au chapitre 3 effectuées dans la définition des lois en  $\psi$  pour  $\eta$  et  $\delta_1$ . L'hypothèse selon laquelle les paramètres du modèle dépendent peu des conditions expérimentales est accréditée par la forte sensibilité de profils de viscosité apparente aux valeurs des paramètres  $\delta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\eta_e$  combinée avec la forte sensibilité des profils de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  aux valeurs des paramètres  $\bar{\delta}_1$ ,  $\bar{\beta}_2$  et  $\bar{\eta}_e$ . Nous accordons une attention particulière au paramètre

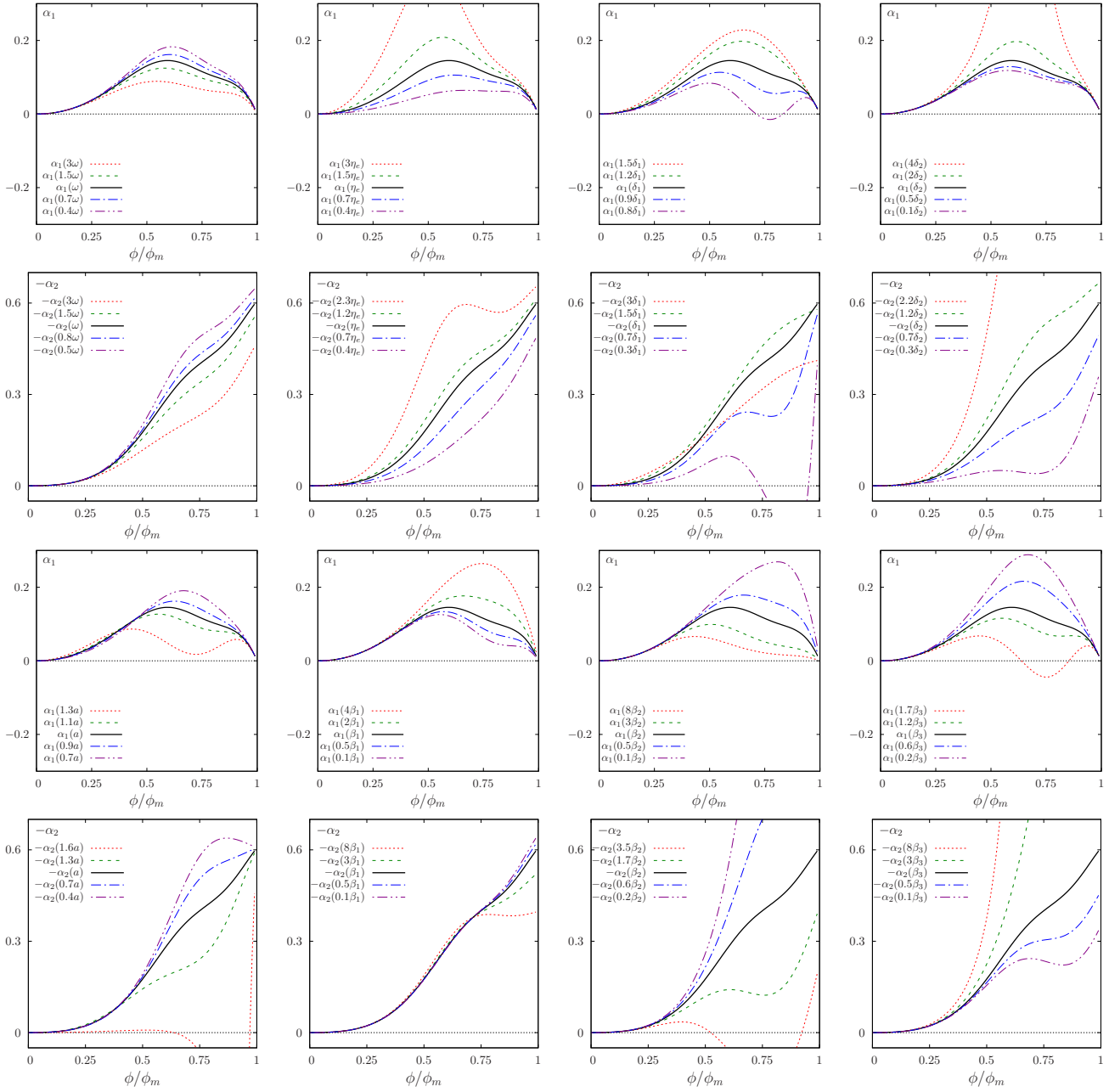


FIGURE 4.6 : Étude de sensibilité portant sur les huit paramètres ajustables que comporte le modèle. La première et la troisième ligne présentent l'effet de la variation de la valeur des paramètres  $\alpha_1$ . Le deuxième et la quatrième ligne présentent l'effet de la variation de la valeur des paramètres sur  $\alpha_2$ .



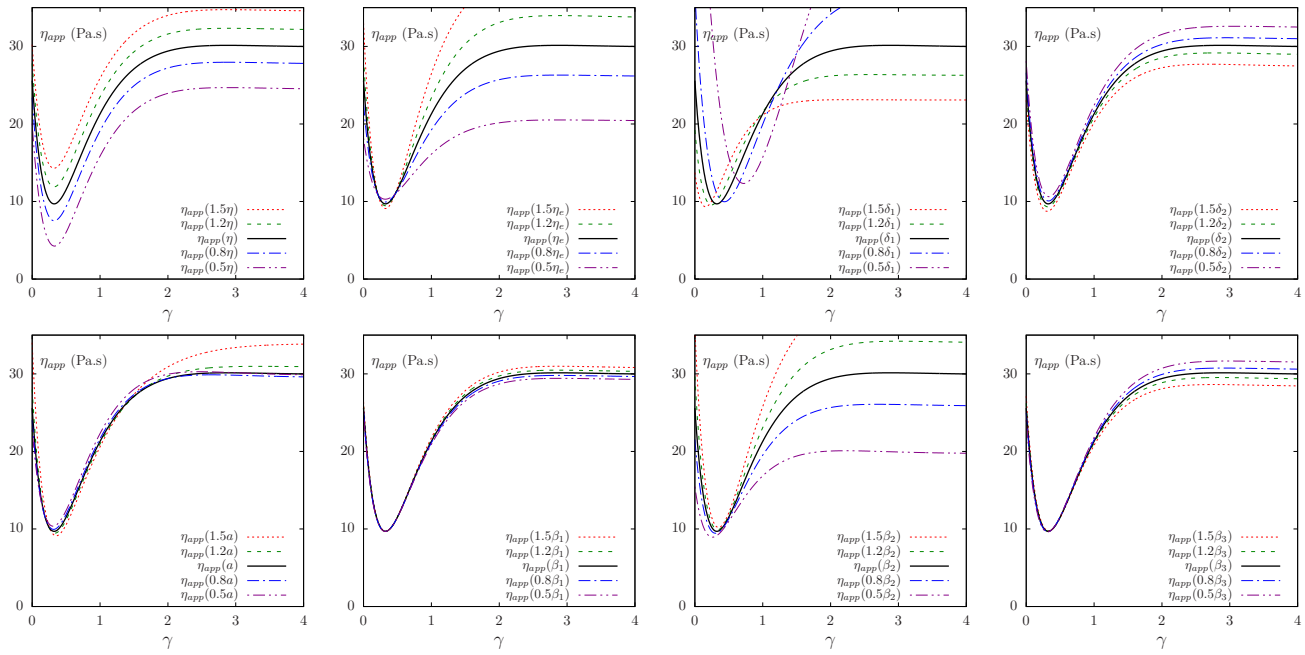


FIGURE 4.7 : Étude de sensibilité portant sur les huit paramètres ajustables que comporte le modèle, l'effet de leur variation sur un profil transitoire de viscosité apparente est représenté ici.

$\bar{\delta}_1$  qui a été choisi avant d'effectuer la procédure ayant conduit aux choix des autres paramètres. Les profils de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont profondément modifiés par la valeur du paramètre  $\bar{\delta}_1$  et les profils de viscosité apparente font état d'une grande sensibilité à la valeur du paramètre  $\delta_1(\psi)$ , calculé en injectant la valeur de  $\bar{\delta}_1$  dans l'équation (4.9a). L'interprétation de  $\delta_1$  comme une déformation caractéristique liée à des réarrangements stériques, dépendant de  $\psi$  mais étant invariant par rapport aux conditions expérimentales, est accréditée par cette étude de sensibilité.



## Chapitre 5

# Modèle à deux vitesses avec congestion

### 5.1 Introduction

Au chapitre 2, nous avons proposé de décrire l'écoulement d'une suspension par différents système d'équations aux dérivées partielles. Ces systèmes prévoient que la vitesse de la phase fluide et de la phase particulaire ne soient pas les mêmes. De manière équivalente on peut dire que la fraction volumique  $\phi$  n'est pas transportée passivement par la vitesse du mélange, ce phénomène est appelé migration. En particulier, [Gadala-Maria et Acrivos \(1980\)](#) ont observé que la variation du taux de cisaillement  $|D(\mathbf{u})|$  entraîne l'apparition de phénomènes de migration dans des géométries de Couette. Une première modélisation mathématique de ces effets est proposée par [Leighton et Acrivos \(1987\)](#) mais ce modèle de flux diffusif peine à décrire les effets de migration dans des géométries cône-plan pour lesquelles le taux de cisaillement est constant, voir par exemple les mesures de [Chow et al. \(1995\)](#). [Nott et Brady \(1994\)](#) ont proposé une cadre général permettant d'exprimer le flux des particules quittant les lignes de courant  $\mathbf{j} = \phi (\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle)$  comme la divergence d'un tenseur de contraintes particulières. Dans ce formalisme, il apparaît que les phénomènes de migration sont non seulement dus à une variation du taux de cisaillement mais aussi à la présence de contraintes normales dans la phase particulaire. Les versions du *suspension balance model* fondées sur ([Morris et Boulay, 1999](#)) sont construites de cette façon, notamment le modèle proposé par [Miller et Morris \(2006\)](#) et comparé par [Dbouk et al. \(2013a\)](#) aux mesures de [Lyon et Leal \(1998\)](#). [Miller et al. \(2009\)](#) propose une extension en géométrie quelconque du modèle de [Miller et Morris \(2006\)](#) dont la formulation n'est valable que pour des écoulements viscosimétriques. Cette extension est réalisée en postulant que les contraintes normales observées dans des suspensions cisailées s'annulent lors d'un écoulement élongationnel. L'argument principal étant que les dites contraintes normales ont pour origine l'asymétrie que présentent les profils de la fonction de distribution de paires dans une suspension cisailée, voir par exemple ([Brady et Morris, 1997](#)). Cette formulation a permis à [Dbouk \(2016\)](#) d'effectuer une simulation d'écoulement d'une suspension autour d'un obstacle. Le peu de données expérimentales disponibles ne permettant pas de juger de la qualité de ces résultats, nous analysons certaines des hypothèses effectuées par [Miller et al. \(2009\)](#) afin d'en proposer des évolutions. Si nous intégrons un modèle rhéologique à tenseur de texture, comme celui présenté au chapitre 4, à la place des équations empiriques de [Morris et Boulay \(1999\)](#), nous rendons alors explicite la dépendance entre l'anisotropie de la microstructure, modélisée par le tenseur de texture, et les contraintes normales. Ensuite, nous reprenons un argument développé par [Lecampion et Garagash \(2014\)](#). Les différentes formulations issues de [Miller et Morris \(2006\)](#) présentent un paramètre de régularisation interprété comme une modélisation d'effets non-locaux de la pression particulaire. En pratique, ce paramètre permet d'éviter que la fraction volumique ne tende vers  $\phi_m$ , la valeur maximale donnée par le modèle. Pour obtenir des profils réalistes de fraction volumique, la valeur de  $\phi_m$  utilisée est alors bien supérieure à celle qui est mesurée. [Miller et Morris \(2006\)](#) et [Dbouk et al. \(2013a\)](#) supposent que  $\phi_m = 0.68$  alors que dans la plupart des cas  $0.56 \leq \phi_m \leq 0.59$ . Alors que [Lecampion et Garagash \(2014\)](#) proposent de rajouter un terme de seuil dépendant de la pression pour éviter cette régularisation, nous proposons d'adopter un point de vue différent et préférons introduire une contrainte unilatérale sur la variable  $\phi$ , dans l'esprit des modèles de mouvements de foules, voir par exemple ([Faure et Maury, 2015](#)). Cette nouvelle formulation conduit à obtenir des profils de concentration et de vitesse moins réguliers. Dans ce contexte, il est numériquement difficile d'imposer certaines conditions

au bord telles que  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$  lorsque  $\mathbf{j}$  est exprimé comme la divergence du tenseur de contrainte particulaire. Il est mathématiquement bien plus simple de revenir à la définition  $\mathbf{j} = \phi (\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle)$  et de considérer la différence des vitesses  $\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle$  comme une inconnue supplémentaire.

Après avoir donné une nouvelle fermeture du système présenté à la proposition 2.46, nous allons présenter un problème mathématique tridimensionnel que nous réduirons par la suite au cas de l'écoulement dans un tuyau cylindrique, cela nous permet d'ouvrir des perspectives de simulations numériques.

## 5.2 Hypothèses de fermeture

Notre point de départ est le système que nous avons énoncé à la proposition 2.46. Nous choisissons ici de conserver la vitesse du mélange et la vitesse de la phase particulaire. Cette stratégie a été adoptée dans la construction de différents modèles d'écoulements granulaires dans un fluide newtonien, modèles fondés sur les équations moyennées proposées par Jackson (2000). On peut citer les modèles de type transport de sédiments dont la phase particulaire est incompressible, voir (Ouriemi et al., 2009) et (Chauchat et Médale, 2010) ou les modèles de type lits fluidisés dont la phase particulaire est dilatante, voir (Bouchut et al., 2016b). Ces modèles intègrent tous explicitement une modélisation de la friction entre les grains et visent à prédire des régimes proches de la concentration maximale. Le modèle présenté ici a pour but de décrire des écoulements moins concentrés, comme dans les chapitres 3 et 4. L'objectif n'est pas ici de modéliser finement les phénomènes de friction entre grains mais simplement de modéliser la condition de non-pénétration des grains par une condition de type contrainte unilatérale.

Dans ce but, la moyenne du moment d'ordre un des interactions inter-particulaires et du moment d'ordre un des interactions entre le fluide et les particules est modélisée par un tenseur d'ordre deux symétrique  $\boldsymbol{\tau}_p$  et une pression de contact  $p_c$  vérifiant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_p - p_c \mathbf{I} = \frac{\nu}{2} \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T + \boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T \rangle_p \\ 0 \leq (\phi_m - \phi) \perp p_c \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

On rappelle ici les notations définies au chapitre 2 :  $\frac{\nu}{2} \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T + \boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_c^T \rangle_p$  est une moyenne particulaire de la partie symétrique des moments d'ordre un des forces hydrodynamiques et des forces de contacts exercées sur les particules.  $\phi$  désigne la fraction volumique et  $\phi_m$  sa valeur maximale. En outre, la notation  $0 \leq a \perp b \geq 0$  signifie  $ab = 0$  et  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ . L'introduction de cette pression de contact comme multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte unilatérale constitue l'apport du modèle que nous allons présenter. De nombreux travaux ont présenté des simulations numériques de migration sous écoulement, voir par exemple (Miller et Morris, 2006), (Miller et al., 2009), (Dbouk, 2016) qui ont implémenté le *suspension balance model* ou (Lecampion et Garagash, 2014) qui résout dans le cas d'un écoulement de Poiseuille un modèle intégrant des termes de friction. Mais, à notre connaissance, il n'existe pas de simulation présentant une méthode rigoureuse pour assurer la conservation du volume de particules  $\int_{\Omega} \phi$ . La condition de non-pénétration entre deux particules au niveau discret implique dans un modèle continu que la fraction volumique  $\phi$  ne peut pas dépasser une valeur maximale  $\phi_m$ . Ce constat a conduit à la construction de modèles rhéologiques dont les quantités divergent lorsque  $\phi$  tend vers  $\phi_m$  malgré le fait que les simulations prévoient que la migration des particules sous écoulement entraîne l'apparition de zones dans lesquelles  $\phi = \phi_m$ . Pour les modèles n'intégrant pas d'effets de seuil, ces zones saturées sont traitées en rajoutant un paramètre de régularisation comme nous l'avons expliqué à la section 5.1. Nous avons pu constater que cette méthode ne permet pas de conserver le volume de particules, c'est pourquoi nous proposons d'imposer explicitement la condition  $\phi \leq \phi_m$  par la condition  $0 \leq (\phi_m - \phi) \perp p_c \geq 0$ .

On doit aussi donner une équation constitutive pour le tenseur de contrainte particulaire  $\boldsymbol{\tau}_p$ . On peut donner l'exemple du *suspension balance model* (Miller et Morris, 2006) qui postule une expression explicite de  $\boldsymbol{\tau}_p$  en fonction du taux de déformation du mélange  $D(\langle \mathbf{u} \rangle)$  et de la fraction volumique  $\phi$  :

$$\boldsymbol{\tau}_p = 2\eta_0\eta_p(\psi)D(\langle \mathbf{u} \rangle) - \eta_0\eta_m(\psi)|2D(\langle \mathbf{u} \rangle)|\mathbf{Q} \quad (5.2a)$$

L'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  est défini à la sous-section 2.2.3,  $\eta_0$  désigne la viscosité du fluide suspendant et les autres notations sont définies à la sous-section 2.4.2. Le tenseur  $\boldsymbol{\tau}_p$  peut aussi s'exprimer en fonction

d'une grandeur auxiliaire comme dans le modèle construit aux chapitres 3 et 4 qui fait intervenir un tenseur de texture  $\gamma_e$  :

$$2D(\langle \mathbf{u} \rangle) = \frac{\mathcal{D}_a \gamma_e}{\mathcal{D}t} + \delta_1 |2D(\langle \mathbf{u} \rangle)| \gamma_e \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_p = & 2(\eta - \eta_0)D(\langle \mathbf{u} \rangle) + \eta_e(\delta_1 |2D(\langle \mathbf{u} \rangle)| \gamma_e + \delta_2(\gamma_e D(\langle \mathbf{u} \rangle) + D(\langle \mathbf{u} \rangle) \gamma_e) \\ & + \beta_1(D(\langle \mathbf{u} \rangle) : \gamma_e) \gamma_e + \beta_2(\gamma_e^2 D(\langle \mathbf{u} \rangle) + D(\mathbf{u}) \gamma_e^2) \\ & + \beta_3 |2D(\langle \mathbf{u} \rangle)| \gamma_e^2 \end{aligned} \quad (5.2c)$$

Les différents paramètres scalaires  $\eta$ ,  $\eta_e$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  sont des fonctions de  $\phi/\phi_m$  définies à la sous-section 4.3.3.

Enfin, en suivant les résultats de [Nott et al. \(2011\)](#), nous donnons une décomposition de la force moyenne exercée par la phase fluide sur la phase granulaire.

$$\nu \langle \mathbf{f} \rangle_p = \mathbf{f}_{drag} + \mathbf{div} \left( \langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p \right) - \rho_f \phi \mathbf{g} \quad (5.3a)$$

La force  $\mathbf{f}_{drag}$  est définie comme la traînée de la phase granulaire dans le fluide, il faudra en donner une fermeture. Le tenseur  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p$  est défini comme la somme des moyennes de tous les moments de  $\mathbf{f}_l$ , voir [Nott et al. \(2011\)](#) et la remarque 2.53 pour plus de détails. En effectuant à nouveau un développement en harmoniques sphériques à l'ordre 1 en  $r_p/r_0$ , comme au chapitre 2, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p = \nu \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T}{2} \right\rangle_p \quad (5.3b)$$

où  $r_p$  désigne le rayon d'une particule, l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle_p$  est défini à la sous-section 2.2.3 et  $\frac{\nu}{2} \langle \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_l^T \rangle_p$  désigne une moyenne particulière du moment d'ordre un des forces hydrodynamiques exercées sur les particules.

**Remarque 5.1.** L'équation (2.42) donne une équation constitutive pour  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p$  permettant d'obtenir le *suspension balance model* proposé par [Miller et Morris \(2006\)](#). Dans l'équation (5.3b), nous avons omis le terme en  $\phi \langle p \rangle_f \mathbf{I}$  qui était présent dans l'équation (2.42). Cette nouvelle approche est plus cohérente car (5.3b) est une approximation à l'ordre 1 de la définition de  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \rangle_p$  donnée par [Nott et al. \(2011\)](#). D'autre part, le développement asymptotique de la pression totale en régime dilué dépend du modèle rhéologique considéré. Si nous supposons que  $tr(\boldsymbol{\tau}_p) = \mathcal{O}(\phi^2)$ , comme dans le cas des modèles rhéologiques (5.2a) et (5.2b)-(5.2c), alors la pression totale a pour expression  $(1 - \phi) \langle p \rangle_f + \mathcal{O}(\phi^2)$ . Cependant, nous avons calculé une pression totale en  $\langle p \rangle_f + \mathcal{O}(\phi^2)$  en régime dilué à la sous-section 2.4.1.

Afin d'obtenir un système ayant de bonnes propriétés mathématiques nous allons faire plusieurs hypothèses au cours de la section (5.3), nous les résumons ici :

Nous allons réaliser successivement deux fermetures pour la force de traînée  $\mathbf{f}_{drag}$ .

$$\mathcal{H}_1 \mathbf{f}_{drag} = -\frac{\eta_0}{2r_p^2} s(\phi) (\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle)$$

$$\mathcal{H}_2 \mathbf{f}_{drag} = -\frac{\eta_0}{2r_p^2} s(\phi) (\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle) + 2\eta_0 \mathbf{div} (s(\phi) D(\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle))$$

où  $\eta_0$  désigne la viscosité apparente du fluide suspendant et  $s(\phi)$  un terme correctif de la traînée de Stokes évalué par exemple dans ([Miller et Morris, 2006](#)) p. 152 équation (11). L'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  propose un modèle empirique minimal, il s'agit d'une force linéaire en la différence de vitesse entre les deux phases, comme la traînée de Stokes d'une sphère. L'hypothèse  $\mathcal{H}_2$  propose un modèle intégrant en plus des effets diffusifs sur la différence de vitesse entre les deux phases, ce terme diffère du terme correctif de Faxen qui intègre un opérateur de diffusion sur la vitesse moyenne sur la phase fluide  $\langle \mathbf{u} \rangle_f$ . Nous proposons donc une force de traînée intégrant l'effet de fluctuations de la différence de vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle$  mais nous n'étudierons pas en détail la pertinence de cette hypothèse de modélisation. En effet l'introduction de ce terme est motivée

en priorité par le fait qu'il permet d'imposer des conditions au bord de type Dirchlet pour la différence de vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle$ .

Nous introduisons ensuite des hypothèses sur les matériaux considérés :

$\mathcal{H}_3$  Le fluide suspendant est newtonien de viscosité  $\eta_0 : \forall \mathbf{x} \in \Omega_f, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\eta_0 D(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ .

$\mathcal{H}_4$  Les sphères ne sont pas beaucoup plus denses que le fluide :  $\frac{\rho_s}{\rho_f} = \mathcal{O}(1)$ .

$\mathcal{H}_5$  Les sphères sont de flottabilité neutre :  $\rho_s = \rho_f$ ,  
où  $\rho_f$  désigne la masse volumique du fluide interstitiel et  $\rho_s$  la masse volumique des sphères.

Enfin, nous effectuons des hypothèses sur le régime d'écoulement :

$\mathcal{H}_6$  Le nombre de Reynolds est très faible :  $Re = \frac{\rho_f U R}{\eta_0} \ll 1$ ,

où  $U$  est une vitesse caractéristique et  $R$  une longueur caractéristique de l'écoulement.

$\mathcal{H}_7$  La vitesse varie suffisamment peu dans un volume élémentaire de référence pour que  $\text{div}(\mathbf{V}_m)$  et  $\text{div}(\mathbf{V}_p)$  soient négligeables. En effet, comme nous l'avions mentionné à la définition 2.40, au chapitre 2, ces quantités désignent les variances des vitesses du mélange ou de la phase particulière.

$\mathcal{H}_8$  Le vecteur rotation des particules vérifie  $|r_p \boldsymbol{\omega}|^2 \ll 1$ . On peut justifier cette hypothèse par le fait que la phase fluide est en régime laminaire et que le fluide adhère à la particule.

Si on suppose aussi  $\mathcal{H}_4$ , alors le terme  $\frac{\phi_m \psi \rho_s}{5\rho_f} \langle \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{I} \rangle_p$  est négligeable.

L'hypothèse  $\mathcal{H}_4$  n'est pas très restrictive dans la mesure où dans des conditions de pression et de température usuelles, beaucoup de liquides ont une masse volumique supérieure à  $500\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Il est alors facile de choisir des matériaux de masse volumique inférieure à  $5000\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Si on désire modéliser des suspensions géophysiques, on peut considérer que  $\frac{\rho_s}{\rho_f} \leq 4$ . Pour la majorité des expériences réalisées en laboratoire, on a même  $\frac{\rho_s}{\rho_f} < 2$ .

### 5.3 Formulation du problème

Afin d'alléger la typographie nous modifions certaines des notations définies au chapitre 2.

On introduit d'abord  $\mathbf{w}$ , la différence de vitesse entre le mélange et la phase particulière vérifiant

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{u} \rangle_p - \langle \mathbf{u} \rangle$$

Ensuite, la vitesse du mélange  $\langle \mathbf{u} \rangle$  devient  $\mathbf{u}$ .

Enfin, la fraction volumique maximale  $\phi_m$  pouvant varier d'une suspension à une autre, nous préférons considérer la fraction volumique relative, comme nous l'avions fait au chapitre 4 :

$$\psi = \frac{\phi}{\phi_m}$$

**Remarque 5.2.** La vitesse moyenne  $\langle \mathbf{u} \rangle_m$  peut s'exprimer en fonction de  $\psi$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  :

$$\langle \mathbf{u} \rangle_m = \mathbf{u} + \frac{(\rho_s - \rho_f)\phi_m \psi}{\rho_m} \mathbf{w}$$

Rappelons que

$$\rho_m = (1 - \phi_m \psi)\rho_f + \phi_m \psi \rho_s$$

### 5.3.1 Dérivation d'un problème couplé à partir de la proposition 2.46

On construit ici une version des conservations de la masse et de la quantité de mouvement, dans le mélange et dans la phase granulaire, différente du système 2.41. Contrairement à celui-ci, cette nouvelle version comporte deux vitesses,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ , et deux pressions,  $p_c$  et  $p_b$ . Les deux autres inconnues sont plus classiques, il s'agit de la fraction volumique réduite  $\psi$  et du tenseur de contrainte particulières  $\boldsymbol{\tau}_p$ . Nous définirons plus loin  $p_b$ , un terme de pression affectant le mélange.

#### Étape 1 : Réduction du nombre d'inconnues

La remarque 5.2 permet de réduire le nombre d'inconnues de type vitesse  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ . On effectue les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . Si on suppose une des deux rhéologies définies aux équations (5.2a) et (5.2b)-(5.2c) alors le tenseur  $\boldsymbol{\tau}_p$  est dimensionné comme  $\eta_0 D(\mathbf{u})$ . Il est donc cohérent de définir les grandeurs sans dimensions :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U \tilde{\mathbf{u}} & \mathbf{w} &= U \tilde{\mathbf{w}} & \mathbf{x} &= R \tilde{\mathbf{x}} & \boldsymbol{\omega} &= \frac{U}{r_p} \tilde{\boldsymbol{\omega}} & t &= \frac{R}{U} \tilde{t} & p &= \frac{\eta_0 U}{R} \tilde{p} \\ \boldsymbol{\tau}_p &= \frac{\eta_0 U}{R} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p & p_c &= \frac{\eta_0 U}{R} \tilde{p}_c & \mathbf{V}_m &= U^2 \tilde{\mathbf{V}}_m & \mathbf{V}_p &= U^2 \tilde{\mathbf{V}}_p \end{aligned}$$

Ainsi, on écrit une version sans dimension des équations (2.29a)-(2.29c)-(2.29d)-(2.29f) :

$$\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (5.4a)$$

$$\begin{aligned} Re \frac{\rho_m(\psi)}{\rho_f} \left\{ \partial_{\tilde{t}} \left( \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_m(\psi)} \phi_m \psi \tilde{\mathbf{w}} \right) + \left( \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_m(\psi)} \phi_m \psi \tilde{\mathbf{w}} \right) \cdot \nabla \left( \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_m(\psi)} \phi_m \psi \tilde{\mathbf{w}} \right) \right\} \\ + Re \operatorname{div} \left\{ \frac{\rho_m(\psi)}{\rho_f} \tilde{\mathbf{V}}_m + \frac{\rho_s \phi_m \psi}{5 \rho_f} \langle \tilde{\boldsymbol{\omega}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}} - |\tilde{\boldsymbol{\omega}}|^2 \mathbf{I} \rangle_p \right\} \end{aligned} \quad (5.4b)$$

$$-\operatorname{div} [2D(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p - (\tilde{p}_c + (1 - \phi_m \psi) \langle \tilde{p} \rangle_f) \mathbf{I}] = \frac{\rho_m(\psi) R^2}{\eta_0 U} \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}((\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}}) \psi) = 0 \quad (5.4c)$$

$$Re \frac{\rho_s}{\rho_f} \left\{ \phi_m \psi (\partial_{\tilde{t}}(\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}}) + (\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla(\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}})) + \operatorname{div}(\phi_m \psi \tilde{\mathbf{V}}_p) \right\} \quad (5.4d)$$

$$-\operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p - \tilde{p}_c \mathbf{I}) + \frac{R^2}{2r_p^2} s(\psi) \tilde{\mathbf{w}} = \frac{(\rho_s - \rho_f) R^2}{\eta_0 U} \phi_m \psi \mathbf{g}$$

$$0 \leq (1 - \psi) \perp \tilde{p}_c \geq 0 \quad (5.4e)$$

#### Étape 2 : Simplification des termes d'inertie

Nous nous plaçons maintenant en régime visqueux dans les phases fluides et particulières, en faisant les hypothèses  $\mathcal{H}_6$  et  $\mathcal{H}_4$ . Nous choisissons de ne pas négliger tous les termes en facteur du nombre de Reynolds. Cela étant, nous simplifions une nouvelle fois le système (5.4) en effectuant les hypothèses  $\mathcal{H}_7$  et  $\mathcal{H}_8$  dans (5.4b) et (5.4d). D'autre part, les équations (5.4b) et (5.4d) font toutes deux intervenir les vitesses  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}$ . Ce type de système peut dans certaines conditions conduire à des problèmes mal posés au sens de Hadamard. Pour plus de précisions et d'exemples, nous renvoyons à (Prosperetti et Tryggvason, 2009), section 8.4, page 264. Pour éviter cette difficulté, nous supprimons les termes en  $\mathbf{w}$  de (5.4b) en effectuant l'hypothèse  $\mathcal{H}_5$ .

#### Formulation d'un problème mathématique

Après un retour aux grandeurs dimensionnées, on obtient

( $\mathbf{P}_0$ ) : Trouver

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{w} : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\tau}_p : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}_s^{3 \times 3}, \quad \psi : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle p \rangle_f : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}, \\ p_c : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.5a) \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \operatorname{div} [2\eta_0 D(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_p - (p_c + (1 - \phi_m \psi) \langle p \rangle_f) \mathbf{I}] - \rho \mathbf{g} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.5b) \\ \partial_t \psi + \operatorname{div}((\mathbf{u} + \mathbf{w})\psi) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.5c) \\ \rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{w}}{Dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_p - p_c \mathbf{I}) + \frac{\eta_0}{2r_p^2} s(\psi) \mathbf{w} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.5d) \\ 0 \leq 1 - \psi \perp p_c \geq 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.5e) \\ + \text{équation constitutive (5.2a) ou (5.2b) - (5.2c) pour } \boldsymbol{\tau}_p & \\ + \text{conditions au bord} + \text{conditions initiales} & \end{array} \right.$$

où  $T$  est un réel strictement positif,  $\rho = \rho_f$ ,  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  et  $\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}$

**Remarque 5.3.** Au chapitre 2 nous avons montré que le *suspension balance model* (2.41) pouvait s'exprimer comme une fermeture du système de lois de conservation approchées à l'ordre 1 que nous avons énoncé à la proposition 2.46. Le système (5.5) diffère de (2.41) pour deux raisons. D'abord nous avons conservé une deuxième vitesse  $\mathbf{w}$ . Ensuite, nous avons introduit le terme de pression de contact  $p_c \mathbf{I}$  à l'équation (5.1) qui remplace  $-\phi \langle p \rangle_f \mathbf{I}$  dans l'équation (2.38). Par cette contribution non-régulière de la phase granulaire à la pression du mélange, nous introduisons des effets de seuil qui ne sont pas pris en compte dans les modèles rhéologiques (5.2a) ou (5.2b)-(5.2c).

### 5.3.2 Modification de $(\mathbf{P}_0)$ en un problème plus classique

A notre connaissance, le problème  $(\mathbf{P}_0)$  n'est pas standard. Le but est de transformer celui-ci en un problème pouvant être traité comme un couplage entre deux problèmes connus. Nous commençons par définir une nouvelle pression :  $p_b = p_c + (1 - \phi_m \psi) \langle p \rangle_f$ . Nous retrouverons ainsi la même structure mathématique pour les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement du mélange dans le système (5.6) que celle que nous avons proposée dans le système (2.41).

Ensuite, remplaçons l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  par l'hypothèse  $\mathcal{H}_2$ , en d'autres termes nous changeons de fermeture pour  $\mathbf{f}_{drag}$  et cela implique de rajouter le terme  $-2\eta_0 r_p \operatorname{div}(s(\psi) D(\mathbf{w}))$  dans l'équation (5.5d). On note que ce terme de diffusion est en  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{R}\right)^2\right)$ . Le système (5.5) a été obtenu à partir du système présenté à la

propriété 2.46 qui est une approximation en  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{r_p}{r_0}\right)^2\right)$  des conservations de la masse et de la quantité de mouvement présentées aux propositions 2.22 et 2.23. Sachant que  $r_0$  désigne un paramètre d'échelle vérifiant  $r_p \ll r_0 \ll R$ , ce terme de diffusion induit une erreur dominée par l'erreur due à nos hypothèses de modélisation. Sur un plan mathématique, l'introduction de l'opérateur du second ordre  $-2\eta_0 r_p \operatorname{div}(s(\psi) D(\mathbf{w}))$  permet d'imposer une condition au bord de Dirichlet pour  $\mathbf{w}$ . Ainsi, on peut imposer une condition au bord sur  $\mathbf{j} = \phi_m \psi \mathbf{w}$  bien plus facilement que dans le cas du système (2.41) pour lequel il fallait imposer une condition de Robin non-linéaire sur  $\psi$ . Avant de présenter un nouveau problème nous introduisons donc les données au bord :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Gamma & : ]0, T[ \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{w}_\Gamma : ]0, T[ \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \psi_\Gamma & : ]0, T[ \times \partial\Omega_- \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \partial\Omega_- = \{\mathbf{x} \in \Omega, (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} < 0\} \\ \mathbf{u}_0 & : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{w}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Enfin, pour éviter les difficultés liées au fait que  $|\boldsymbol{\tau}_p|$  diverge lorsque  $\psi \rightarrow 1$ , on remplace  $\psi \rightarrow 1$  par  $\psi \rightarrow \psi^*$  avec  $\psi^* < 1$  dans la contrainte unilatérale (5.5e). Ainsi, on formule le problème

$(\mathbf{P}_1)$  : Trouver



$\mathbf{u} : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{w} : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\boldsymbol{\tau}_p : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ ,  $\psi : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_b : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_c : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.6a) \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\eta_0 D(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_p - p_b \mathbf{I}) - \rho \mathbf{g} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.6b) \\ \partial_t \psi + \operatorname{div}((\mathbf{u} + \mathbf{w})\psi) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.6c) \\ \phi_m \rho \psi \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{w}}{Dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_p - p_c \mathbf{I}) \\ + \eta_0 \frac{1}{r_p} \left( \frac{1}{2r_p} s(\psi)\mathbf{w} - 2r_p \operatorname{div}(s(\psi)D(\mathbf{w})) \right) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.6d) \\ 0 \leq (\psi^* - \psi) \perp p_c \geq 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5.6e) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_\Gamma & \text{dans } ]0, T[ \times \partial\Omega \quad (5.6f) \\ (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} < 0 \Rightarrow \psi = \psi_\Gamma & \text{dans } ]0, T[ \times \partial\Omega \quad (5.6g) \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{w}(t=0) = \mathbf{w}_0 \quad \psi(t=0) = \psi_0 & \text{dans } \Omega \quad (5.6h) \\ + \text{équation constitutive (5.2a) ou (5.2b) - (5.2c) pour } \boldsymbol{\tau}_p \end{array} \right.$$

On définit les grandeurs sans dimension :

$$p_b = \frac{\eta_0 U}{R} \tilde{p}_b \quad \epsilon = \frac{r_p}{R} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{\rho R^2}{\eta_0 U} \mathbf{g}$$

Ainsi on peut reformuler  $(\mathbf{P}_1)$  dans une version sans dimension :

$(\tilde{\mathbf{P}}_1)$  : Trouver

$\tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\Omega} \times ]0, \tilde{T}[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{\mathbf{w}} : \tilde{\Omega} \times ]0, \tilde{T}[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p : \tilde{\Omega} \times ]0, \tilde{T}[ \rightarrow \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ ,  $\psi : \tilde{\Omega} \times ]0, \tilde{T}[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{p}_b : \tilde{\Omega} \times ]0, \tilde{T}[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{p}_c : \tilde{\Omega} \times ]0, \tilde{T}[ \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0 & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \tilde{\Omega} \quad (5.7a) \\ Re \frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{Dt} - \operatorname{div}(2D(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p - \tilde{p}_b \mathbf{I}) - \tilde{\mathbf{f}} = 0 & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \tilde{\Omega} \quad (5.7b) \\ \partial_{\tilde{t}} \psi + \operatorname{div}((\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}})\psi) = 0 & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \tilde{\Omega} \quad (5.7c) \\ \phi_m \psi Re \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{Dt} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{Dt} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{w}} + (\tilde{\mathbf{w}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{u}} \right) - \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p - \tilde{p}_c \mathbf{I}) \\ + \epsilon^{-1} \left( \frac{\epsilon^{-1}}{2} s(\psi)\tilde{\mathbf{w}} - 2\epsilon \operatorname{div}(s(\psi)D(\tilde{\mathbf{w}})) \right) = 0 & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \tilde{\Omega} \quad (5.7d) \\ 0 \leq \psi^* - \psi \perp \tilde{p}_c \geq 0 & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \tilde{\Omega} \quad (5.7e) \\ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma \quad \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}_\Gamma & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \partial\tilde{\Omega} \quad (5.7f) \\ (\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{n} < 0 \Rightarrow \psi = \psi_\Gamma & \text{dans } ]0, \tilde{T}[ \times \partial\tilde{\Omega} \quad (5.7g) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t=0) = \tilde{\mathbf{u}}_0 \quad \tilde{\mathbf{w}}(t=0) = \tilde{\mathbf{w}}_0 \quad \psi(t=0) = \psi_0 & \text{dans } \tilde{\Omega} \quad (5.7h) \\ + \text{équation constitutive (5.2a) ou (5.2b) - (5.2c) pour } \boldsymbol{\tau}_p \end{array} \right.$$

Les données au bord et les données initiales de  $(\tilde{\mathbf{P}}_1)$  sont les versions sans dimension des données au bord et des données initiales de  $(\mathbf{P}_1)$ .

Les équations (5.7a)-(5.7b) définissent un système de type Navier-Stokes incompressible couplé aux équations (5.7c), (5.7d) et (5.7e) par le terme de contrainte particulière  $\operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p)$ . Si  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p$  est défini explicitement en fonction de  $\psi$  et  $\tilde{\mathbf{u}}$  comme en (5.2a) alors le sous-problème  $(\mathbf{Q}_{1a})$  de  $(\tilde{\mathbf{P}}_1)$  consistant à trouver  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{p}_b$  connaissant  $\psi$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}$  et  $\tilde{p}_c$  se ramène à un calcul d'écoulement quasi-newtonien, voir le chapitre deux de (Saramito, 2016). Si  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p$  est défini en fonction d'un autre tenseur d'ordre deux vérifiant lui-même une équation d'évolution, comme en (5.2b)-(5.2c), alors le sous-problème  $(\mathbf{Q}_{1b})$  de  $(\tilde{\mathbf{P}}_1)$  consistant à trouver  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{p}_b$  et  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p$

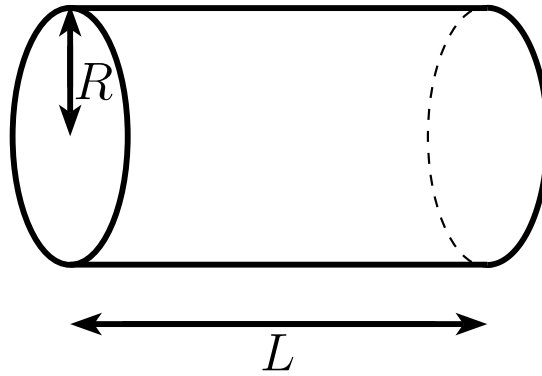


FIGURE 5.1 :

connaissant  $\psi$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}$  et  $\tilde{p}_c$  se ramène à un calcul d'écoulement visco-élastique, voir (Boyaval et al., 2009) ou le chapitre quatre de (Saramito, 2016).

Nous nous focalisons maintenant sur  $(Q_2)$  le sous problème de  $(\tilde{P}_1)$  consistant à trouver  $\tilde{\mathbf{w}}$ ,  $\tilde{p}_c$  et  $\psi$ , connaissant  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{p}_b$  et  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_p$ . L'étude d'un modèle de fluide compressible barotrope (Lions et Masmoudi, 1999) a permis de donner des fondements théoriques à toute une collection de problèmes pouvant se ramener à un système de type Navier-Stokes compressible avec une masse volumique bornée. Des limites singulières du modèle (Lions et Masmoudi, 1999) ont été étudiées dans différents régimes. Par exemple, Labbé et Maitre (2013) présente une limite pour des fluides de Korteweg et Bresch et al. (2014) présente une limite pour des milieux diphasiques visqueux. Parallèlement à cela, des modélisations de milieux continus diphasiques par un système hyperbolique couplé à une contrainte unilatérale ont vu le jour, voir (Bouchut et al., 2000), (Berthelin, 2002) et (Berthelin et Bouchut, 2003). Ces systèmes ont été appliqués à la modélisation du trafic routier, voir (Berthelin et al., 2008) ou (Berthelin et Broizat, 2012) qui sont des exemples en dimension un de modèles de fluides compressibles congestionnés non visqueux. Les résultats présentés dans (Bresch et al., 2014) permettent de considérer ces modèles de fluides compressibles congestionnés non visqueux comme des limites du système (Lions et Masmoudi, 1999). Cela ouvre la voie à la construction de modèles de fluides compressibles congestionnés appliqués aux écoulements granulaires, voir par exemple (Perrin et Zatorska, 2015) qui présente un système dont notre sous-problème  $(Q_2)$  est structurellement proche. En effet,  $(Q_2)$  est proche d'un système de type Euler avec contrainte de congestion.  $(P_2)$  comporte deux termes supplémentaires, le terme de traînée de Stokes  $\frac{R^2}{2r_p^2}s(\psi)\tilde{\mathbf{w}}$  et le terme de régularisation  $\text{div}(2s(\psi)D(\tilde{\mathbf{w}}))$ . Des simulations numériques portant sur le système d'Euler avec une contrainte de congestion ont été menées à l'aide d'une méthode *Asymptotic Preserving* par Degond et al. (2011) en utilisant des schémas adaptés à des écoulements compressibles à faible nombre de Mach, voir (Degond et al., 2007) et (Degond et Tang, 2011). Le système résolu est vu dans ce cas comme un système comportant un opérateur elliptique dégénéré. Dans notre cas le terme de régularisation a été ajouté pour assurer une bonne compatibilité du problème avec la donnée au bord et nous n'étudierons pas la limite du problème  $(Q_2)$  lorsque  $\epsilon = \frac{r_p}{R}$  tend vers 0.

Dans ce document, nous ne présenterons pas de méthode numérique, néanmoins, nous proposons d'utiliser plutôt un schéma en temps implicite afin de ne pas rencontrer des problèmes de stabilité en adaptant une méthode explicite inspirée de (Degond et al., 2011). En outre, l'ajout du terme  $\text{div}(2s(\psi)D(\tilde{\mathbf{w}}))$ , permet de retrouver le système issu d'un modèle diphasique de type Brinkman présenté récemment par Bresch et al. (2018). Ainsi, on est ramené à la résolution numérique d'un problème elliptique doté d'une contrainte unilatérale, voir par exemple (Banz et Schröder, 2015).

## 5.4 Migration dans un tuyau circulaire

Nous considérerons dans cette section un écoulement dans un tuyau horizontal de section circulaire de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , voir la figure 5.1. Nous utiliserons les coordonnées cylindriques, c'est pourquoi nous notons  $\mathbf{e}_z$  l'axe du tuyau. L'ouvert  $\Omega$  est donc constitué par l'intérieur de ce tuyau. Nous supposons que la longueur du tuyau est grande devant son rayon, c'est à dire  $R \ll L$ . Cela revient à dire que nous rajoutons un paramètre d'échelle  $R/L$  portant sur les dimensions caractéristiques de  $\Omega$ . Dans cette section, nous n'effectuons pas de nouveau développement asymptotique sur le paramètre d'échelle  $R/r_p$  mais nous déduisons un problème unidimensionnel à partir de  $(\mathbf{P}_1)$  par une analyse dimensionnelle à l'aide du paramètre d'échelle  $R/L$ . Nous considérons le cas où un débit du mélange à l'entrée du tuyau  $q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \langle \mathbf{u}(r, \theta, 0) \rangle \cdot \mathbf{e}_z r dr d\theta$  et

le débit particulaire à l'entrée du tuyau  $q_p = \int_0^{2\pi} \int_0^R \phi \langle \mathbf{u}(r, \theta, 0) \rangle_p \cdot \mathbf{e}_z r dr d\theta$  sont imposés. Afin d'effectuer une analyse dimensionnelle, nous introduisons les grandeurs sans dimension :

$$r = R\tilde{r} \quad z = L\tilde{z} \quad \mathbf{u} = U\tilde{\mathbf{u}} \quad t = \frac{U}{R}\tilde{t} \quad \mathbf{w} = W\tilde{\mathbf{w}} \quad (5.8a)$$

$$p_b = P\tilde{p}_b \quad q = 2\pi UR^2\tilde{q} \quad \tau_p = \Sigma_p\tilde{\tau}_p \quad p_c = \Sigma_p\tilde{p}_c \quad (5.8b)$$

où  $U$ ,  $\Sigma_p$  et  $P$  sont des constantes que nous définirons à l'équation (5.11). Nous omettrons les  $\tilde{\cdot}$  dans l'expression de opérateurs différentiels.

On suppose que le problème est invariant en la variable  $\theta$ , on prend donc  $\Omega = ]0; R[ \times ]0; L[$ . On impose les conditions au bord et initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (t, z), \quad \mathbf{u}(t, R, z) = \mathbf{w}(t, R, z) = 0 \quad \nabla \mathbf{u}(t, 0, z) \cdot \mathbf{e}_r = \nabla \mathbf{w}(t, 0, z) \cdot \mathbf{e}_r \\ \psi(t, 0, z) \mathbf{w}(t, 0, z) \cdot \mathbf{e}_r = \psi(t, R, z) \mathbf{w}(t, R, z) \cdot \mathbf{e}_r = 0 \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\forall (t, r), \quad \mathbf{w}(t, r, 0) = 0 \quad \nabla \mathbf{u}(t, r, L) \cdot \mathbf{e}_z = \nabla \mathbf{w}(t, r, L) \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (5.9b)$$

$$\forall t, \quad 2\pi \int_0^R \mathbf{u}(t, r, 0) \cdot \mathbf{e}_z r dr = q(t) \quad (5.9c)$$

$$\forall (r, z), \quad \mathbf{u}(0, r, z) = \mathbf{w}(0, r, z) = 0 \quad \psi(0, r, z) = \psi_i \quad (5.9d)$$

Nous allons nous ramener à un problème unidimensionnel à l'ordre 0, en négligeant les termes en  $\mathcal{O}(R/L)$  du problème  $(\mathbf{P}_1)$ .

### 5.4.1 Lois de conservation dans le mélange

#### Cas newtonien

On donne d'abord une relation entre  $q$  et  $U$  en considérant le cas  $\psi = 0$ , le mélange est alors un fluide newtonien. La conservation de la masse du mélange (5.7a) implique :

$$\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{U}{R} \left( \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{u}_r) + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{u}_z \right)$$

On déduit :  $\partial_r(\tilde{r}\tilde{u}_r) = \mathcal{O}(R/L)$  et donc à l'ordre zéro, la condition au bord implique  $\tilde{u}_r = 0$ .

L'équation de la quantité de mouvement (5.7b) donne :

$$\begin{aligned} Re \frac{\tilde{u}_\theta^2}{\tilde{r}} &= -\frac{PR}{\eta_0 U} \partial_r \tilde{p}_b + \frac{R}{L} \partial_z (\partial_r \tilde{u}_z) \\ Re \left( \partial_t \tilde{u}_z + \frac{R}{L} \tilde{u}_z \partial_z \tilde{u}_z \right) &= \frac{R}{L} - \frac{PR^2}{L\eta_0 U} \partial_z \tilde{p}_b + \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r}\partial_r \tilde{u}_z) + \frac{R}{L} \partial_z (\tilde{r}\partial_r \tilde{u}_z) \end{aligned}$$

En prenant  $P = \eta_0 UL/R^2$ , il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_r \tilde{p}_b + \mathcal{O}\left(\frac{R}{L}\right) \\ Re \partial_t \tilde{u}_z &= -\partial_z \tilde{p}_b + \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} \tilde{u}_z) + \mathcal{O}\left(\frac{R}{L}\right) \end{aligned}$$

En régime stationnaire, en supposant  $\partial_z u = 0$ , avec la condition de débit imposé à l'entrée du tuyau, on obtient :

$$\begin{cases} 4\tilde{u}_z(\tilde{r}) &= (\tilde{r}^2 - 1)\partial_z \tilde{p}_b \\ \tilde{q} &= \int_0^1 \tilde{u}_z(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_z \tilde{p}_b &= -16\tilde{q} \\ 4(1 - \tilde{r}^2)\tilde{q} &= \tilde{u}_z(\tilde{r}) \end{cases} \quad (5.10)$$

Si on prend  $\tilde{q} = 1/4$ , alors  $\max(\tilde{u}_z) = 1$  et  $U = 4R^{-2} \frac{Q}{2\pi}$ .

### Cas général

On se place dans le cas  $\psi$  quelconque et on suppose que :

$$Q = \frac{q}{4} \quad U = 4R^{-2} \frac{Q}{2\pi} \quad P = \Sigma_p = \frac{\eta_0 U}{R} \quad (5.11)$$

L'équation de la quantité de mouvement (5.7b) du mélange s'écrit :

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}^2}\right) &= -\partial_r \tilde{p}_b + \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\tau}_{p,rr}) - \frac{\tilde{\tau}_{p,\theta\theta}}{\tilde{r}} + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{\tau}_{p,rz} \\ Re\left(\partial_t \tilde{u}_\theta + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{u}_\theta\right) &= \frac{\partial_r}{\tilde{r}^2} (\tilde{r}^2 (\tilde{\tau}_{p,r\theta} + \partial_r \tilde{u}_\theta) - r \tilde{u}_\theta) + \frac{R}{L} \partial_z \left( \tilde{\tau}_{p,\theta z} + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{u}_\theta \right) \\ Re\left(\partial_t \tilde{u}_z + \frac{R}{L} \tilde{u}_z \partial_z \tilde{u}_z\right) &= -\frac{R}{L} \partial_z p_b + \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} (\partial_r \tilde{u}_r + \tilde{\tau}_{p,rz})) + \frac{R}{L} \partial_z (\tilde{\tau}_{p,rz}) \end{aligned}$$

La condition initiale implique  $u_\theta = 0$  donc  $\tau_{p,r\theta} = 0$ , l'équation (5.7b) projetée sur les coordonnées  $(r, z)$  s'écrit donc :

$$0 = -\partial_r \tilde{p}_r + \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\tau}_{p,rr}) - \frac{\tilde{\tau}_{p,\theta\theta}}{\tilde{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{L}{R}\right) \quad (5.12a)$$

$$Re(\partial_t \tilde{u}_z) = \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} (\partial_{\tilde{r}} \tilde{u}_r + \tilde{\tau}_{p,rz})) - \partial_z \tilde{p}_z + \mathcal{O}\left(\frac{L}{R}\right) \quad (5.12b)$$

Les contraintes particulières, responsables des phénomènes de migration, ne doivent pas être considérées comme négligeables devant  $\partial_r \tilde{p}_b$  dans (5.12a). C'est pourquoi nous avons choisi  $P = \Sigma_p$ . D'autre part, on ne peut pas négliger  $\partial_z \tilde{p}_b$  qui est le moteur de l'écoulement c'est pourquoi on a supposé que :

$$\tilde{p}_b(\tilde{r}, \tilde{z}) = \tilde{p}_r(\tilde{r}) + \frac{L}{R} \tilde{p}_z(\tilde{z}) \quad (5.13)$$

Nous justifions ce choix à la remarque 5.4. D'autre part, cela est cohérent avec l'idée que la pression induite par la présence de particules est faible devant celle imposée par le débit du mélange. Enfin, la norme du taux de déformation s'écrit  $|2D(\tilde{\mathbf{u}})| = \left| \partial_r \tilde{u}_z + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{u}_z \right|$ . En négligeant le terme en  $R/L$ , on peut définir le taux de cisaillement comme  $\tilde{\gamma} = \partial_r \tilde{u}_z$ . Ainsi,  $|2D(\tilde{\mathbf{u}})| = |\tilde{\gamma}|$  la vitesse du mélange vérifie  $\tilde{\mathbf{u}}(t, r) = (0, 0, \tilde{u}_z)$ . On peut donc calculer le tenseur de contrainte particulière en cisaillement simple.

#### 5.4.2 Contrainte particulière

Dans cette sous-section, nous allons considérer à nouveau les grandeurs dimensionnées afin de calculer  $\tau_p$  pour les deux équations constitutives données aux équations (5.2a) et (5.2b)-(5.2c) sachant que  $\tilde{\mathbf{u}}(t, r) = (0, 0, \tilde{u}_z)$ . Nous allons montrer que dans le cas d'un cisaillement simple, l'équation constitutive (5.2a) a la même structure que le système (5.2b)-(5.2c) pris en régime stationnaire.

Équation constitutive issue de (5.2a)

$$\tau_{p,rz} = \eta_0 \eta_p(\psi) \dot{\gamma} \quad (5.14a)$$

$$\tau_{p,rr} = -\lambda_1 |\dot{\gamma}| \eta_0 \eta_n(\psi) \quad (5.14b)$$

$$\tau_{p,zz} = -|\dot{\gamma}| \eta_0 \eta_n(\psi) \quad (5.14c)$$

$$\tau_{p,\theta\theta} = -\lambda_2 |\dot{\gamma}| \eta_0 \eta_n(\psi) \quad (5.14d)$$

Équation constitutive issue de (5.2b)

Puisque le taux de cisaillement est uniforme, l'évolution de  $\gamma_e(t)$  s'exprime comme le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_{e,rr} - \dot{\gamma}(a-1) \gamma_{e,rz} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,rr} &= 0 \\ \partial_t \gamma_{e,rz} - \dot{\gamma} \frac{a+1}{2} \gamma_{e,rr} + \frac{a-1}{2} \gamma_{e,zz} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,rz} &= \dot{\gamma} \\ \partial_t \gamma_{e,zz} - \dot{\gamma}(a+1) \gamma_{e,rz} + \delta_1 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,zz} &= 0 \end{aligned}$$

En régime stationnaire le tenseur  $\gamma_e$  vérifie :

$$\begin{aligned} \gamma_{e,rr} &= (a-1) \delta_1^{-1} \bar{\gamma}_{e,rz} \\ \bar{\gamma}_{e,rz} &= \frac{\delta_1}{\delta_1^2 + 1 - a^2} \\ \gamma_{e,zz} &= (a+1) \delta_1^{-1} \bar{\gamma}_{e,rz} \end{aligned}$$

où  $\bar{\gamma}_{e,rz} = \gamma_{e,rz} \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ .

On en déduit l'équation constitutive de  $\tau_p$  :

$$\tau_{p,rr} = \eta_e \left( (\delta_1 |\dot{\gamma}| + \beta_1 \gamma_{e,rz} \dot{\gamma}) \gamma_{e,rr} + \beta_2 \dot{\gamma} \gamma_{e,rz} (\gamma_{e,zz} + \gamma_{e,rr}) + \beta_3 |\dot{\gamma}| (\gamma_{e,rz}^2 + \gamma_{e,zz}^2) + \delta_2 \dot{\gamma} \gamma_{e,rz} \right) \quad (5.14e)$$

$$\begin{aligned} \tau_{p,rz} &= (\eta - \eta_0) \dot{\gamma} + \eta_e \left( (\delta_1 |\dot{\gamma}| + \beta_1 \gamma_{e,rz} \dot{\gamma}) \gamma_{e,rz} + \beta_2 \dot{\gamma} \left[ \gamma_{e,rz}^2 + \frac{\gamma_{e,zz}^2 + \gamma_{e,rr}^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 |\dot{\gamma}| \gamma_{e,rz} (\gamma_{e,rr} + \gamma_{e,zz}) + \delta_2 \frac{\dot{\gamma}}{2} (\gamma_{e,rr} + \gamma_{e,zz}) \right) \quad (5.14f) \end{aligned}$$

$$\tau_{p,zz} = \eta_e \left( (\delta_1 |\dot{\gamma}| + \beta_1 \gamma_{e,rz} \dot{\gamma}) \gamma_{e,zz} + \beta_2 \dot{\gamma} \gamma_{e,rz} (\gamma_{e,zz} + \gamma_{e,rr}) + \beta_3 |\dot{\gamma}| (\gamma_{e,zz}^2 + \gamma_{e,rz}^2) + \delta_2 \dot{\gamma} \gamma_{e,rz} \right) \quad (5.14g)$$

Par commodité, quel que soit le choix du modèle, on utilisera les notations  $\eta_p, \eta_{n,r}, \eta_{n,\theta}, \eta_{n,z}$  de telle sorte que

$$\eta_0 \eta_p \dot{\gamma} = \tau_{p,rz} \quad \eta_0 \eta_{n,r} |\dot{\gamma}| = \tau_{p,rr} \quad \eta_0 \eta_{n,\theta} |\dot{\gamma}| = \tau_{p,\theta\theta} \quad \eta_0 \eta_{n,z} |\dot{\gamma}| = \tau_{p,zz} \quad (5.14h)$$

**Remarque 5.4.** La pression de mélange  $p_b$  vérifie

$$p_b(t, r, z) - p_b(t, 0, z) = \eta_0 \left( \eta_{n,r}(\psi(t, z, r)) \dot{\gamma}(t, r, z) + \frac{\eta_{n,r}(\psi(t, z, r)) - \eta_{n,\theta}(\psi(t, z, r)) \dot{\gamma}(t, z, r)}{r} \right)$$

À l'équation (5.13), nous avons choisi de décomposer la pression du mélange  $p_b$  de manière à obtenir  $\partial_z p_b \neq 0$  et  $\partial_r p_b \neq 0$  dans l'équation de la quantité de mouvement du mélange approchée en  $\mathcal{O}\left(\frac{R}{L}\right)$  (5.12). Il était nécessaire de faire ce choix car  $p_z$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de débit imposé et  $\partial_r p_r$  est égal à l'interaction hydrodynamique responsable de la migration dans la conservation de la quantité de mouvement de la phase granulaire (5.19c).

### 5.4.3 Lois de conservation dans la phase particulaire

Nous reprenons ici les grandeurs sans dimension définies par (5.8). Nous allons nous focaliser dans cette sous-section sur les inconnues  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{p}_c$  et  $\psi$ . La condition initiale  $\tilde{w}(0, r) = 0$  et le fait que la composante en  $\theta$  de  $\tilde{u}$  et  $\tilde{w}$  ne comporte aucun terme source, permettent de supposer que  $\tilde{w}_\theta = 0$ . Les conservations de la quantité de mouvement (5.7d) et de la masse (5.7c) dans la phase particulaire s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} & \phi_m \psi Re \left( \frac{W}{U} \partial_t \tilde{w}_r + \frac{W^2}{U^2} \left( \tilde{w}_r \partial_r \tilde{w}_r + \frac{R}{L} \tilde{w}_z \partial_z \tilde{w}_r \right) + \frac{RW}{LU} \tilde{u}_z \partial_z \tilde{w}_r \right) \\ &= \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\tau}_{p,rr}) - \frac{\tilde{\tau}_{p,\theta\theta}}{\tilde{r}} + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{\tau}_{p,rz} - \partial_r \tilde{p}_c \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} & + \epsilon^{-1} \frac{W}{U} \left( -s(\psi) \tilde{w}_r \frac{\epsilon^{-1}}{2} + 2\epsilon \left( \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} s(\psi) \partial_r \tilde{w}_r) + \frac{R}{L} \partial_z \left( s(\psi) \left( \partial_r \tilde{w}_z + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{w}_r \right) \right) \right) \right) \\ & \phi_m \psi Re \left( \partial_t \tilde{u}_z + \frac{W}{U} \partial_t \tilde{w}_z + \frac{W^2}{U^2} \left( \tilde{w}_r \partial_r \tilde{w}_z + \frac{R}{L} \tilde{w}_z \partial_z \tilde{w}_z \right) + \frac{RW}{LU} \tilde{u}_z \partial_z \tilde{w}_z \right) \\ &= \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\tau}_{p,rz}) + \frac{R}{L} (\partial_z \tilde{\tau}_{p,zz} - \partial_z \tilde{p}_c) \end{aligned} \quad (5.15b)$$

$$\begin{aligned} & + \epsilon^{-1} \frac{W}{U} \left( -s(\psi) \tilde{w}_z \frac{\epsilon^{-1}}{2} + 2\epsilon \left( \frac{\partial_r}{\tilde{r}} \left( \tilde{r} s(\psi) \left( \partial_r \tilde{w}_z + \frac{R}{L} \partial_z \tilde{w}_r \right) \right) + \frac{R^2}{L^2} \partial_z (s(\psi) \partial_z \tilde{w}_z) \right) \right) \\ \partial_t \psi &= -\frac{W}{U} \frac{\partial_r}{\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{w}_r \psi) - \frac{R}{L} \tilde{u}_z \partial_z \psi - \frac{RW}{LU} \partial_z (\tilde{w}_z \psi) \end{aligned} \quad (5.15c)$$

On rappelle que  $\epsilon = R/r_p$ , comme pour le problème ( $\tilde{P}_1$ ).

De même que l'on a supposé que  $\partial_z \tilde{u}_z = 0$  de façon à pouvoir calculer la contrainte particulaire en cisaillement simple, on impose que le débit de particules soit indépendant de  $\tilde{z}$  :

$$\forall (\tilde{t}, \tilde{r}, \tilde{z}) \in ]0; \tilde{T}[\times]0; 1[^2 \quad \partial_{\tilde{z}}((\tilde{u}_z + \tilde{w}_z)\psi) = 0 \implies \forall (\tilde{t}, \tilde{z}) \in ]0; \tilde{T}[\times]0; 1[, \quad \int_0^1 (\tilde{u}_z + \tilde{w}_z)\psi \tilde{r} d\tilde{r} = \psi_i \tilde{q} \quad (5.16)$$

On s'assure ainsi que la masse totale de particules présente dans le tuyau est conservée :

$$\forall \tilde{t} \in ]0; \tilde{T}[, \quad \partial_t \int_{]0; 1[^2} \psi(\tilde{r}, \tilde{z}) \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{z} = \left[ \int_0^1 (\tilde{u}_z + \tilde{w}_z)\psi \tilde{r} d\tilde{r} \right]_0^1 = 0 \quad (5.17)$$

Pour imposer la contrainte (5.17), il est pertinent de conserver le terme en  $\partial_z \tilde{p}_c$  dans (5.15c). Cela nous amène à décomposer la pression de contact de la façon suivante :

$$\tilde{p}_c(\tilde{r}, \tilde{z}) = \tilde{p}_{c,r}(\tilde{r}) + \frac{L}{R} p_{c,z}(\tilde{z})$$

Le multiplicateur de Lagrange associé à (5.17) dans (5.15c) est alors  $p_{c,z}$ .

Si on fait l'hypothèse que  $W/U = \epsilon$ , alors le système (5.15), tronqué à l'ordre 0 en  $R/L$  et à l'ordre 1 en  $\epsilon$  devient :

$$\phi_m \psi Re \epsilon \partial_t \tilde{w}_r = \frac{\partial_r}{r} (r \tilde{\tau}_{p,rr}) - \frac{\tilde{\tau}_{p,\theta\theta}}{r} - \frac{\epsilon^{-1}}{2} s(\psi) \tilde{w}_r + 2\epsilon \frac{\partial_r}{r} (r s(\psi) \partial_r \tilde{w}_r) - \partial_r \tilde{p}_{c,r} \quad (5.18a)$$

$$\phi_m \psi Re (\partial_t \tilde{u}_z + \epsilon \partial_t \tilde{w}_z) = \frac{\partial_r}{r} (r \tilde{\tau}_{p,rz}) - \frac{\epsilon^{-1}}{2} s(\psi) \tilde{w}_z + 2\epsilon \frac{\partial_r}{r} (r s(\psi) \partial_r \tilde{w}_z) - \partial_z \tilde{p}_{c,z} \quad (5.18b)$$

$$\partial_t \psi = -\epsilon \frac{\partial_r}{r} (r \tilde{w}_r \psi) \quad (5.18c)$$

### 5.4.4 Présentation du problème réduit 1D

On introduit  $\psi_i \in ]0; \psi^*[$  une fraction volumique moyenne que nous allons imposer. On fait de plus l'hypothèse que le mélange adhère à la paroi du tuyau, c'est à dire  $u_z(r = R) = w_z(r = R) = w_r(r = R) = 0$ . Si maintenant on réécrit (5.12)-(5.18) sous leur forme dimensionnée alors on peut formuler le problème réduit

( $\mathcal{S}_1$ ) : trouver  $u_z, w_r, w_z, \psi, p_r, p_z, p_{c,r}, p_{c,z}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_r p_r = \frac{\eta_0}{r} (\partial_r (r\eta_{n,r}(\psi)|\partial_r u_z|) - \eta_{n,\theta}(\psi)|\partial_r u_z|) & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, R[ \quad (5.19a) \\ \rho \partial_t u_z = \eta_0 \frac{\partial_r}{r} (r(1 + \eta_p(\psi))\partial_r u_z) - \partial_z p_z & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, R[ \quad (5.19b) \\ \phi_m \psi \rho \partial_t w_r = \eta_0 \left( \frac{\partial_r}{r} (r\eta_{n,r}(\psi)|\partial_r u_z|) - \frac{\eta_{n,\theta}(\psi)|\partial_r u_z|}{r} \right) \\ + \frac{\eta_0}{r_p} \left( -\frac{s(\psi)}{2r_p} w_r + 2r_p \left( \frac{\partial_r}{r} (rs(\psi)\partial_r w_r) \right) \right) - \partial_r p_{c,r} & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, R[ \quad (5.19c) \\ \phi_m \psi \rho (\partial_t u_z + \partial_t w_z) = \eta_0 \frac{\partial_r}{r} (r\eta_p \partial_r u_z) \\ + \frac{\eta_0}{r_p} \left( -\frac{s(\psi)}{2r_p} w_z + 2r_p \left( \frac{\partial_r}{r} (rs(\psi)\partial_r w_z) \right) \right) - \partial_z p_{c,z} & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, R[ \quad (5.19d) \\ \partial_t \psi = -\frac{\partial_r}{r} (r w_r \psi) & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, R[ \quad (5.19e) \\ 0 \leq \psi^* - \psi \perp p_{c,r} \geq 1 & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, R[ \quad (5.19f) \\ \int_0^R u_z(t, r) r dr = Q & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.19g) \\ \int_0^R (u_z(t, r) + w_z(t, r)) \psi(t, r) r dr = \psi_i Q & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.19h) \\ u_z(r = R) = w_z(r = R) = w_r(r = R) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.19i) \\ w_r(r = 0) = \partial_r u_z(r = 0) = \partial_r w_z(r = 0) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.19j) \\ u_z(t = 0) = w_z(t = 0) = w_r(t = 0) = 0 & \text{dans } ]0, R[ \quad (5.19k) \\ \psi(t = 0) = \psi_i & \text{dans } ]0, R[ \quad (5.19l) \end{array} \right.$$

On écrit maintenant une version sans dimension de (5.19) en supposant que

$$W = U = 4R^{-2} \frac{Q}{2\pi} \quad \Sigma_p = P = \frac{\eta_0 U}{R} \quad Re = \frac{4Q\rho}{\eta_0 2\pi R}$$

À partir de maintenant nous omettrons les  $\tilde{\cdot}$  au dessus des variables et des grandeurs sans dimension. Le problème ( $\mathcal{S}_1$ ) devient

(**S<sub>2</sub>**) : trouver  $u_z, w_r, w_z, \psi, p_r, p_z, p_{c,r}, p_{c,z}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} r \partial_r p_r = \partial_r (r \eta_{n,r}(\psi) |\partial_r u_z|) - \eta_{n,\theta}(\psi) |\partial_r u_z| & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, 1[ \quad (5.20a) \\ \text{Re } \partial_t u_z = \frac{\partial_r}{r} (r(1 + \eta_p(\psi)) \partial_r u_z) - \partial_z p_z & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, 1[ \quad (5.20b) \\ \phi_m \psi \text{ Re } \partial_t w_r = \frac{\partial_r}{r} (r \eta_{n,r}(\psi) |\partial_r u_z|) - \frac{\eta_{m,\theta}(\psi) |\partial_r u_z|}{r} \\ \quad - \frac{s(\psi)}{2\epsilon^2} w_r + 2 \left( \frac{\partial_r}{r} (rs(\psi) \partial_r w_r) \right) - \partial_r p_{c,r} & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, 1[ \quad (5.20c) \\ \phi_m \psi \text{ Re } (\partial_t u_z + \partial_t w_z) = \frac{\partial_r}{r} (r \eta_p \partial_r u_z) \\ \quad - \frac{s(\psi)}{2\epsilon^2} w_z + 2 \left( \frac{\partial_r}{r} (rs(\psi) \partial_r w_z) \right) - \partial_z p_{c,z} & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, 1[ \quad (5.20d) \\ \partial_t \psi = -\frac{\partial_r}{r} (r w_r \psi) & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, 1[ \quad (5.20e) \\ 0 \leq (\psi^* - \psi \perp p_{c,r}) \geq 1 & \text{dans } ]0, T[ \times ]0, 1[ \quad (5.20f) \\ \int_0^1 u_z(t, r) r dr = \frac{1}{4} & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.20g) \\ \int_0^1 (u_z(t, r) + w_z(t, r)) \psi(t, r) r dr = \frac{\psi_i}{4} & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.20h) \\ u_z(r=1) = w_z(r=1) = w_r(r=1) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.20i) \\ w_r(r=0) = \partial_r u_z(r=0) = \partial_r w_z(r=0) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \quad (5.20j) \\ u_z(t=0) = w_z(t=0) = w_r(t=0) = 0 & \text{dans } ]0, 1[ \quad (5.20k) \\ \psi(t=0) = \psi_i & \text{dans } ]0, 1[ \quad (5.20l) \end{array} \right.$$

Le problème (**S<sub>2</sub>**) se décompose en plusieurs sous-problèmes couplés. Nous allons définir deux sous-problèmes paraboliques sous contrainte linéaire (**T<sub>1</sub>**) et (**T<sub>2</sub>**), ainsi qu'un sous-problème d'écoulement compressible visqueux congestionné (**T<sub>3</sub>**). Seule l'inconnue  $\partial_r p_r$  est définie explicitement en fonction des autres inconnues à l'équation (5.20a). (**T<sub>1</sub>**) consiste à chercher  $u_z$  et  $p_z$  vérifiant (5.20b) et (5.20g) et (**T<sub>2</sub>**) consiste à chercher  $w_z$  et  $p_{c,z}$  vérifiant (5.20d) et (5.20h). Les trois inconnues restantes  $w_r, \psi$  et  $p_{c,r}$  sont celles du sous-problème (**T<sub>3</sub>**), celles-ci sont solutions du système constitué par la contrainte unilatérale (5.20f), l'équation de transport (5.20e) et par l'équation parabolique (5.20c). À noter que les pressions  $p_z, p_{c,z}$  et  $p_{c,r}$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes (5.20g), (5.20h) et (5.20f).

Cette décomposition donne l'idée d'un algorithme de type point fixe dont l'implémentation pourrait permettre de comparer les résultats de calcul avec d'autres simulations, notamment celles de [Dbouk et al. \(2013a\)](#) qui revisite les travaux de [Miller et Morris \(2006\)](#), effectuant des calculs dans différentes géométries. Nous imposons une vitesse nulle au bord et un flux de particules constant alors que [Dbouk et al. \(2013a\)](#) impose un flux nul au bord. Il serait intéressant de voir en quoi ces hypothèses modifient les résultats. En outre, nous imposons une contrainte unilatérale pour  $\psi$ , son effet serait certainement plus visible sur des cas-tests en régime concentré, comme celui présenté dans ([Oh et al., 2015a](#)). Par rapport à une rhéologie granulaire de type  $\mu(I)$ , nous n'intégrons pas explicitement de terme de friction. La comparaison avec un modèle de suspension intégrant ceux-ci, comme ([Lecampion et Garagash, 2014](#)), permettrait de savoir dans quelle mesure notre modélisation de l'anisotropie de la microstructure tient compte de la rugosité des particules, rugosité responsable de ces phénomènes de friction. Enfin, [Perrin \(2016\)](#) a proposé un système à une vitesse bidimensionnel afin de décrire des écoulements granulaires dans un fluide visqueux, à la différence de (**S<sub>2</sub>**), [Perrin \(2016\)](#) propose d'intégrer une équation de transport sur le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte unilatérale (5.20f), il serait intéressant de comparer cette approche avec la notre.

L'évolution naturelle du problème (**S<sub>2</sub>**) serait de rajouter la dépendance en temps négligée à la sous-section 5.4.2, cela permettrait d'effectuer des comparaisons avec des expériences mettant en évidence des phénomènes transitoires rapides comme les mesures en LAOS de [Snook et al. \(2016\)](#).

Plus généralement, ce formalisme permet d'introduire un lien mathématique solide entre les phénomènes de



migration et les effets de seuil. Dans ce contexte, les développements asymptotiques de [Bresch et Renardy \(2017\)](#) peuvent s'appliquer à l'étude de la transition entre les zones où la contrainte (5.20f) est saturée et celles où elle ne l'est pas. La frontière entre les zones fluides et les zones rigides dans un fluide de Bingham a été étudiée en détail récemment par [Vigneaux et al. \(2018\)](#), le formalisme que nous avons introduit dans ce chapitre pourrait donner une nouvelle piste d'interprétation de la frontière entre les zones congestionnées et les zones fluides dans les suspensions concentrées.



## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

L'ensemble de ce document a été réalisé dans le but de faire progresser la modélisation mathématique des suspensions non-colloïdales et mono-disperses de sphères dures dans un fluide newtonien pensé comme un milieu continu diphasique.

Nous avons commencé, au chapitre 2, par revisiter la construction d'un système d'équations aux dérivées partielles portant sur des grandeurs macroscopiques en effectuant des moyennes sur des grandeurs microscopiques, c'est à dire à l'échelle du grain. Nous avons repris l'étude asymptotique développée par Jackson (1997) en remplaçant des opérateurs de moyenne discontinus par des opérateurs lisses. En utilisant des développements en harmoniques sphériques, nous avons mis en évidence quelques imprécisions dans les développements asymptotiques de Jackson (1997). Ainsi, nous avons formulé plusieurs systèmes de lois de conservation. Le plus réduit d'entre eux fait intervenir trois vitesses moyennes macroscopiques, une version moyennée du tenseur de contrainte de Cauchy de la phase fluide, la moyenne des moments d'ordre un des forces appliquées aux particules ainsi que la moyenne de la force d'interaction entre la phase granulaire et la phase fluide. Ces systèmes présentent cependant trop d'inconnues pour avoir un intérêt pratique. En effectuant des hypothèses supplémentaires, nous avons pu retrouver deux formulations ne faisant intervenir qu'une seule vitesse moyenne. En régime très dilué, nous avons retrouvé le résultat proposé par Einstein (1906). Puis, nous avons construit le *suspension balance model* proposé par Miller et Morris (2006), cela nous a permis de mener une réflexion sur les équations de fermeture considérées. Nous avons alors noté trois grandes faiblesses de celui-ci que nous proposons d'améliorer. D'abord, la rhéologie proposée par Miller et Morris (2006) ne permet pas de reproduire des effets en temps court liés à une déformation de la microstructure, c'est pourquoi nous avons proposé de nouveaux modèles rhéologiques aux chapitres 3 et 4. Ensuite, nous avons remarqué que l'expression du terme de pression introduit est discutable. Enfin, nous avons constaté que la réduction à un système ne comportant qu'une seule vitesse complique considérablement le traitement des conditions au bord, par exemple la non-pénétration de la phase particulaire dans une paroi. Face à ces deux derniers points, nous avons proposé au chapitre 5 un nouveau système de lois de conservation faisant intervenir deux vitesses et une pression de contact.

Nous avons proposé, au chapitre 3 un modèle rhéologique de suspensions faisant intervenir un tenseur de conformation  $\mathbf{b}_e$ , c'est à dire que le tenseur de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  dépend à la fois du taux de déformation et de  $\mathbf{b}_e$ , nous avons supposé que cette dépendance est polynomiale, ce qui constitue une hypothèse assez classique. Nous avons écrit une loi d'évolution linéaire pour  $\mathbf{b}_e$  indépendante du taux de cisaillement, cette dernière hypothèse est fondamentale en rhéologie des suspensions et elle constitue une différence majeure entre la rhéologie que nous avons proposée et un modèle visco-élastique linéaire de type Oldroyd. En effet, celle-ci permet de retrouver des comportements qualitatifs spécifiques. Par exemple, lorsqu'on arrête brutalement de cisaillement une suspension, la microstructure est gelée alors que celle-ci relaxe vers un état isotrope dans le cas d'un fluide visco-élastique. Ainsi, nous avons reproduit les profils de viscosité apparente, lors d'une inversion de cisaillement, mesurés par Blanc et al. (2011a). En outre, nous avons explicité un lien entre  $\mathbf{b}_e$  et la fonction de distribution de paires moyenne, nous avons comparé le profil de la probabilité qu'une particule ait un voisin en fonction de la direction  $\theta$  issue de notre modèle avec celui mesuré par Blanc et al. (2013) et l'accord est bon. Notre proposition représente une avancée importante par rapport aux précédents modèles à tenseur

de conformation pour deux raisons. D'une part, aucun modèle n'avait pu donner lieu à des comparaisons avec des résultats expérimentaux de qualité comparable. D'autre part, nous avons intégré seulement quatre paramètres ajustables, ce qui est, par exemple, plus de quatre fois inférieur à ce qu'avait proposé [Goddard \(2006\)](#). Si notre premier modèle prédit bien des contraintes normales proportionnelles au taux de cisaillement, celui-ci ne présente pas des prédictions satisfaisantes pour la seconde différence de contrainte normale et la pression particulaire. En effet, le signe prévu est opposé au signe observé.

Pour corriger ce défaut, nous avons proposé au chapitre 4 une extension du modèle présenté au chapitre 3. Nous avons rajouté un paramètre ajustable dans l'équation d'évolution de  $\mathbf{b}_e$ , celle-ci ne présente pas de terme supplémentaire mais nous avons autorisé la variation du paramètre de la dérivée de Gordon Schowalter alors que celui-ci avait été fixé précédemment. En outre, nous avons rajouté trois termes dans l'expression de  $\boldsymbol{\sigma}$ , portant à quatre le nombre de paramètres ajustables supplémentaires. Ce nouveau modèle a fourni les mêmes comparaisons que celles effectuées au chapitre 3 avec une qualité équivalente. Nous avons aussi reproduit correctement les différences de contrainte normale mesurées par [Dbouk et al. \(2013b\)](#) et [Couturier et al. \(2011\)](#). Dans ce chapitre, nous avons comparé des données expérimentales très hétérogènes et la question de la sensibilité des grandeurs mesurées ainsi que des paramètres ajustés aux conditions expérimentales s'est posée. Cela nous a conduit à considérer des grandeurs réduites pour la fraction volumique et les différences de contrainte normale. Nous avons aussi présenté une comparaison supplémentaire accréditant l'idée que la dépendance des paramètres du modèle proposé aux conditions expérimentales est faible. Avec un jeu de paramètres ajustés sur les données de [Blanc et al. \(2011a\)](#), [Blanc et al. \(2013\)](#) et de [Dbouk et al. \(2013b\)](#), nous avons calculé un profil de pression particulaire en fonction de la fraction volumique et nous l'avons comparé à celui mesuré par [Deboeuf et al. \(2009\)](#), obtenant un bon accord. Comme pour le modèle présenté au chapitre 3, nous avons supposé une dépendance polynomiale de  $\boldsymbol{\sigma}$  en  $\mathbf{b}_e$  et en  $D(\mathbf{u})$ . Comme l'a remarqué [Hand \(1962\)](#), des considérations d'algèbre linéaire classique impliquent que nous n'aurions pas pu rajouter d'autres termes non sphériques que ceux que nous avons intégrés. En outre, nous avons tenu à conserver une évolution linéaire pour  $\gamma_e$  car cette loi d'évolution ne met en jeu que deux paramètres ajustables qui sont facilement interprétables. Le premier paramètre est celui de la dérivée de tenseur, il quantifie la résistance de la microstructure au cisaillement. Le second paramètre était déjà présent dans le premier modèle, il s'interprète comme une déformation caractéristique. Enfin, la rhéologie que nous avons prédite est suffisamment conforme à la réalité pour envisager d'intégrer celle-ci à un système de lois de conservation afin de modéliser des phénomènes de migration. En effet, les différences de contrainte normale sont le moteur des phénomènes de migration en cisaillement, cela renforce l'apport de notre second modèle par rapport à celui que nous avons proposé au chapitre 3.

Au chapitre 5, nous avons présenté un système de lois de conservation dans le but de prévoir des phénomènes de migration sous écoulement. Le cadre théorique que nous avons mis en place est compatible avec différents modèles rhéologiques, notamment celui proposé par [Miller et Morris \(2006\)](#) et celui que nous avons construit au chapitre 4. Ce nouveau modèle est une fermeture d'un système de lois de conservation macroscopiques mentionné au chapitre 2. Comme pour les modèles d'avalanches sous-marines, nous avons intégré deux vitesses à notre système, la vitesse du mélange et la différence entre la vitesse du mélange et celle de la phase particulaire. Nous avons aussi intégré une modélisation explicite des interactions de contact en imposant une contrainte unilatérale sur la fraction volumique. Ainsi, nous avons imposé au niveau continu la condition de non-pénétration vérifiée par toutes les particules rigides qui constituent la phase granulaire. En revanche, nous n'avons pas modélisé explicitement les phénomènes de friction. D'autre part, cette contrainte unilatérale est imposée grâce à un multiplicateur de Lagrange que nous avons interprété comme une pression de contact. L'introduction de cette pression a permis de rendre plus rigoureuse les définitions de la force d'interaction entre les phases et la pression du mélange par rapport à ce que nous avons proposé au chapitre 2. Le principal apport du chapitre 5 est de proposer un cadre mathématique rigoureux. En effet, le système que nous avons proposé peut s'interpréter comme un problème de type Navier Stokes incompressible couplé avec un problème d'écoulement visqueux compressible congestionné. Ainsi il sera possible de réaliser des simulations numériques suffisamment précises pour pouvoir juger de la pertinence des différentes hypothèses physiques effectuées. C'est pourquoi, nous avons proposé une réduction du modèle au cas d'un écoulement à pression imposée dans un tuyau cylindrique. Ce premier cas test se présente sous la forme de trois problèmes mathématiques classiques couplés en dimension un.

Cette thèse ouvre un éventail varié de perspectives.

À court terme, le système proposé à la fin du chapitre 5 permettra de réaliser des comparaisons avec des données issues d'expériences en géométrie de Poiseuille. Par exemple [Oh et al. \(2015b\)](#) fournissent des profils de vitesse et de fraction volumique en régime concentré. Nous pourrions aussi comparer à des simulations discrètes ou avec d'autres modèles continus.

Il serait aussi possible de réaliser des simulations numériques sortant du cadre des écoulements à pression imposée dans un tuyau. Tout d'abord, notre nouveau modèle rhéologique permet, par sa formulation indépendante du référentiel considéré, de sortir du cadre des écoulements en cisaillement simple. Cela peut permettre d'envisager de tester notre modèle de migration dans des géométries complexes comme par exemple l'écoulement autour d'un obstacle. Ensuite, nous pourrions effectuer des simulations en écoulement élongationnel afin de tester notre modèle rhéologique, Ces deux premiers axes constituent une validation du modèle pour des régimes d'écoulement que nous n'avons pas considérés. Enfin, il est possible des comparer ces résultats avec des profils issus de simulations discrètes.

À plus long terme, le modèle rhéologique exposé au chapitre 4 pourrait évoluer en intégrant explicitement un terme de friction inter-particulaire, cela impliquerait de sortir de l'hypothèse de dépendance polynomiale pour  $\sigma$  et d'intégrer par une dépendance non-régulière modélisant des effets de seuil. Cette dépendance pourrait prendre la forme d'un terme de seuil dépendant de la pression, comme pour la rhéologie  $\mu(I)$ . Il en résulterait un système structurellement proche de celui d'un modèle de fluide élasto-visco-plastique, dans l'esprit de celui présenté par [Saramito \(2007\)](#). Une analyse rigoureuse de cette nouvelle formulation pourrait aussi permettre de positionner celle-ci vis à vis du second principe de la thermodynamique. Enfin, il serait possible d'effectuer de nouvelles analyses asymptotiques afin de proposer une formulation en couche mince, en utilisant le cadre théorique proposé par [Bouchut et Boyaval \(2016\)](#) pour la dérivation d'écoulements minces de fluides complexes .

Cette dernière perspective rejoint nos premières motivations, la prédiction du trajet de laves torrentielles, des écoulements géophysiques composés d'eau et de débris de tailles variées. Certaines communes peuvent être dévastées plusieurs fois par an par ces phénomènes, leur compréhension est un défi important pour l'implantation de l'homme en moyenne montagne.

D'une façon plus générale, les suspensions de sphères dures dans un fluide newtonien sont un exemple modèle de milieu continu hétérogène. En effet, les interactions internes à la phase granulaire sont plus simples que si on considère des suspensions de particules déformables ou dotées d'interactions chimiques ou électrostatiques comme le sang qui est une suspension concentrée de globules rouges. Il existe d'autre applications pertinentes présentant un fluide suspendant complexe, on peut penser au magma volcanique présentant à la fois une phase liquide, une phase granulaire due à des phénomènes de cristallisation et une phase gazeuse. En outre, le contact entre deux particules en présence d'un fluide visqueux s'est avéré qualitativement bien plus proche du comportement de deux individus au sein d'une foule que de celui de deux atomes se rencontrant alors qu'ils étaient lancés à des vitesses élevées. Ce travail s'inscrit donc aussi dans le contexte de la gestion de flux humains de plus en plus intenses dans des zones urbaines de plus en plus grandes. Une gestion optimale de ces flux est un enjeu majeur de l'urbanisation alors que la prévision des risques naturels est l'une des conditions au développement d'un mode de vie moderne en milieu rural. La pensée moderne tend à favoriser une concentration des densités de population dans de grands centres devant une occupation plus homogène des territoires, à tort ou à raison. Dans un contexte où l'urgence écologique est apparue à tous mais où les opinions divergent sur les méthodes à appliquer, il est tout à fait pertinent de se demander comment donner suite à cette thèse sans dégrader davantage nos conditions de vie.



# Bibliographie

- T. B. Anderson et R. Jackson. Fluid mechanical description of fluidized beds. equations of motion. *Ind. and Eng. Chem. Fundamentals*, 6(4) :527–539, 1967.
- G. B. Arfken. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier, sixth edition, 2005.
- R. C. Ball et J. R. Melrose. A simulation technique for many spheres in quasi-static motion under frame-invariant pair drag and brownian forces. *Physica A : Stat. Mech. and Appl.*, 247(1-4) :444–472, 1997.
- L. Banz et A. Schröder. Biorthogonal basis functions in hp-adaptive fem for elliptic obstacle problems. *Comp. and Math. with App.*, 70(8) :1721–1742, 2015.
- G. K. Batchelor. Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. *J. of Fluid Mech.*, 74(1) : 1–29, 1976.
- G. K. Batchelor et J.-T. Green. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. of Fluid Mech.*, 56(2) :375–400, 1972a.
- G. K. Batchelor et J. T. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ . *J. Fluid Mech.*, 56(03) :401–427, 1972b.
- F. Berthelin. Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint. *Math. Mod. and Meth. in App. Sci.*, 12(02) :249–272, 2002.
- F. Berthelin et F. Bouchut. Weak solutions for a hyperbolic system with unilateral constraint and mass loss. In *Annales de l'IHP (C) Non Linear Anal.*, volume 20, pages 975–997. Elsevier, 2003.
- F. Berthelin et D. Broizat. A model for the evolution of traffic jams in multi-lane. *Kinetic and Related Models*, 5(4) :697–728, 2012.
- F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, et M. Rascle. A model for the formation and evolution of traffic jams. *Arch. for Rational Mech. and Anal.*, 187(2) :185–220, 2008.
- R. Bird, R. C. Armstrong, et O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids. Volume 1. Fluid mechanics*. Wiley, New-York, second edition, 1987.
- F. Blanc. *Rhéologie et microstructure des suspensions concentrées non browniennes*. PhD thesis, Univ. Nice Sophia Antipolis, 2011.
- F. Blanc, F. Peters, et E. Lemaire. Local transient rheological behavior of concentrated suspensions. *J. Rheol.*, 55(4) :835–854, 2011a.
- F. Blanc, F. Peters, et E. Lemaire. Experimental signature of the pair trajectories of rough spheres in the shear-induced microstructure in noncolloidal suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 107(20) :208302, 2011b.
- F. Blanc, E. Lemaire, A. Meunier, et F. Peters. Microstructure in sheared non-Brownian concentrated suspensions. *J. Rheol.*, 57(1) :273–292, 2013.
- A. Bonami et J.-L. Clerc. Sommes de cesaro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques. *Transactions of the American Mathematical Society*, 183 :223–263, 1973.

- G. Bossis et J. F. Brady. Dynamic simulation of sheared suspensions. i. general method. *The J. of Chem. Phys.*, 80(10) :5141–5154, 1984.
- C. Bost, G.-H. Cottet, et E. Maitre. Convergence analysis of a penalization method for the three-dimensional motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid. *SIAM J. on Num. Anal.*, 48(4) :1313–1337, 2010.
- F. Bouchut et S. Boyaval. Unified derivation of thin-layer reduced models for shallow free-surface gravity flows of viscous fluids. *E. J. of Mech.-B/Fluids*, 55 :116–131, 2016.
- F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, et J.-F. Ripoll. A hierarchy of models for two-phase flows. *J. of NonLinear Sci*, 10(6) :639–660, 2000.
- F. Bouchut, E. D. Fernandez-Nieto, A. Mangeney, et G. Narbona-Reina. A two-phase shallow debris flow model with energy balance. *ESAIM : Math. Mod. and Num. Anal.*, 49(1) :101–140, 2015.
- F. Bouchut, E. D. Fernández-Nieto, A. Mangeney, et G. Narbona-Reina. A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects. *J. of Fluid Mech.*, 801 :166–221, 2016a.
- F. Bouchut, E. D. Fernández-Nieto, A. Mangeney, et G. Narbona-Reina. A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects. *J. of Fluid Mech.*, 801 :166–221, 2016b.
- S. Boyaval, T. Lelièvre, et C. Mangoubi. Free-energy-dissipative schemes for the oldroyd-b model. *ESAIM : Math. Mod. and Num. Anal.*, 43(3) :523–561, 2009.
- F. Boyer, É. Guazzelli, et O. Pouliquen. Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 107 (18) :188301, 2011a.
- F. Boyer, O. Pouliquen, et É. Guazzelli. Dense suspensions in rotating-rod flows : normal stresses and particle migration. *J. Fluid Mech.*, 686 :5–25, 2011b.
- J. F. Brady et G. Bossis. The rheology of concentrated suspensions of spheres in simple shear flow by numerical simulation. *J. of F. Mech.*, 155 :105–129, 1985.
- J. F. Brady et G. Bossis. Stokesian dynamics. *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 20(1) :111–157, 1988.
- J. F. Brady et J. F. Morris. Microstructure of strongly sheared suspensions and its impact on rheology and diffusion. *J. Fluid Mech.*, 348 :103–139, 1997.
- D. Bresch et M. Renardy. Development of congestion in compressible flow with singular pressure. *Asymptotic Anal.*, 103(1-2) :95–101, 2017.
- D. Bresch, C. Perrin, et E. Zatorska. Singular limit of a navier–stokes system leading to a free/congested zones two-phase model. *Comptes Rendus Mathématique*, 352(9) :685–690, 2014.
- D. Bresch, S. Necasova, et C. Perrin. Compression effects in heterogeneous media. *arXiv preprint arXiv :1807.06360*, 2018.
- H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2011.
- B. Cambou, M. Jean, et F. Radjai. *Matériaux granulaires - Modélisation et simulation numérique*. Hermès-Lavoisier, 2012.
- R. N. Chacko, R. Mari, S. M. Fielding, et M. E. Cates. Shear reversal in dense suspensions : the challenge to fabric evolution models from simulation data. *J. of Fluid Mech.*, 847 :700–734, 2018.
- J. Chauchat et M. Médale. A three-dimensional numerical model for incompressible two-phase flow of a granular bed submitted to a laminar shearing flow. *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.*, 199(9-12) : 439–449, 2010.
- A. W. Chow, J. H. Iwayima, S. W. Sinton, et D. T. Leighton. Particle migration of non-brownian, concentrated suspensions in a truncated cone-and-plate. In *S. of Rheol. Meeting, Sacramento, CA*, volume 103, 1995.



- E. Cossart. *Des sources sédimentaires à l'exutoire : un problème de connectivité ?* PhD thesis, Univ. Blaise Pascal-Clermont 2, 2014.
- É. Couturier, F. Boyer, O. Pouliquen, et É. Guazzelli. Suspensions in a tilted trough : second normal stress difference. *J. Fluid Mech.*, 686 :26–39, 2011.
- P. A. Cundall et O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) : 47–65, 1979.
- S. Dagois-Bohy, S. Hormozi, E. Guazzelli, et O. Pouliquen. Rheology of dense suspensions of non-colloidal spheres in yield-stress fluids. *J. of Fluid Mech.*, 776, 2015.
- F. Dai et K. Wang. Convergence rate of spherical harmonic expansions of smooth functions. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 348(1) :28–33, 2008.
- S. Dai et R. I. Tanner. Elongational flows of some non-colloidal suspensions. *Rheol. Acta*, 56(1) :63–71, 2017.
- S.-C. Dai, E. Bertevas, F. Qi, et R. I. Tanner. Viscometric functions for noncolloidal sphere suspensions with Newtonian matrices. *J. Rheol.*, 57(2) :493–510, 2013.
- T. Dbouk. A suspension balance direct-forcing immersed boundary model for wet granular flows over obstacles. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 230 :68–79, 2016.
- T. Dbouk, E. Lemaire, L. Lobry, et F. Moukalled. Shear-induced particle migration : Predictions from experimental evaluation of the particle stress tensor. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 198 :78–95, 2013a.
- T. Dbouk, L. Lobry, et E. Lemaire. Normal stresses in concentrated non-Brownian suspensions. *J. Fluid Mech.*, 715 :239–272, 2013b.
- A. Deboeuf, G. Gauthier, J. Martin, Y. Yurkovetsky, et J. F. Morris. Particle pressure in a sheared suspension : a bridge from osmosis to granular dilatancy. *Phys. Rev. Lett.*, 102(10) :108301, 2009.
- E. DeGiuli, G. Düring, E. Lerner, et M. Wyart. Unified theory of inertial granular flows and non-brownian suspensions. *Phys. Rev. E*, 91(6) :062206, 2015.
- P. Degond et M. Tang. All speed scheme for the low mach number limit of the isentropic euler equations. *Comm. in Comp. Phy.*, 10(1) :1–31, 2011.
- P. Degond, S. Jin, et J. Yuming. Mach-number uniform asymptotic-preserving gauge schemes for compressible flows. *Bulletin-Institute of Mathematics Academia Sinica*, 2(4) :851, 2007.
- P. Degond, J. Hua, et L. Navoret. Numerical simulations of the euler system with congestion constraint. *J. of Comp. Phy.*, 230(22) :8057–8088, 2011.
- M. M. Denn et J. F. Morris. Rheology of non-brownian suspensions. *Ann. Rev. Chem. Biomol. Eng.*, 5 : 203–228, 2014.
- G. Drazer, J. Koplik, B. Khusid, et A. Acrivos. Deterministic and stochastic behaviour of non-Brownian spheres in sheared suspensions. *J. Fluid Mech.*, 460 :307–335, 2002.
- F. Dubois, V. Acary, et M. Jean. The Contact Dynamics method : A nonsmooth story . *Comptes Rendus Mécanique*, 346 :247–262, 2018.
- G. Duvaut et J. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- J. W. Eaton, D. Bateman, et S. Hauberg. *Octave : A high-level interactive language for numerical computations*. Free software foundation, 2011. <http://www.gnu.org/software/octave>.
- A. Einstein. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. *Ann. Phys. ser. 4*, 19 :289–306, 1906.
- A. Einstein. *Investigation on the theory of the Brownian movement*. Dover, Mineola, NY, USA, 1956.

- Z. Fang, A. A. Mammoli, J. F. Brady, M. S. Ingber, L. A. Mondy, et A. L. Graham. Flow-aligned tensor models for suspension flows. *Int. J. of multiphase flow*, 28(1) :137–166, 2002.
- S. Faure et B. Maury. Crowd motion from the granular standpoint. *Math. Models and Meth. in App. Sci*, 25(03) :463–493, 2015.
- E. D. Fernández-Nieto, T. M. de Luna, G. Narbona-Reina, et J. de Dieu Zabsonré. Formal deduction of the saint-venant–exner model including arbitrarily sloping sediment beds and associated energy. *ESAIM : Math. Model. and Num. Anal.*, 51(1) :115–145, 2017.
- A. F. Fortes, D. D. Joseph, et T. S. Lundgren. Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles. *J. of Fluid Mech.*, 177 :467–483, 1987.
- F. Gadala-Maria et A. Acrivos. Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *J. Rheol.*, 24(6) :799–814, 1980.
- S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, et F. Peters. A fictitious domain approach for the simulation of dense suspensions. *J. of Comp. Phys.*, 256 :367–387, 2014a.
- S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, et L. Lobry. Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles. *J of Fluid Mech.*, 757 :514–549, 2014b.
- S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, et L. Lobry. Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles. *J. Fluid Mech.*, 757 :514–549, 2014c.
- S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, et F. Peters. Effect of confinement in wall-bounded non-colloidal suspensions. *J. of Fluid Mech.*, 799 :100–127, 2016.
- S. Gallier, F. Peters, et L. Lobry. Simulations of sheared dense noncolloidal suspensions : Evaluation of the role of long-range hydrodynamics. *Phy. Rev. Fluids*, 3(4) :042301, 2018.
- R. Glowinski, T.-W. Pan, T. I. Hesla, et D. D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. of Multiphase Flow*, 25(5) :755–794, 1999.
- J. D. Goddard. Memory materials without characteristic time and their relation to the rheology of certain particle suspensions. *Adv. Coll. Interf. Sci.*, 17(1) :241–262, 1982.
- J. D. Goddard. A dissipative anisotropic fluid model for non-colloidal particle dispersions. *J. Fluid Mech.*, 568 :1–17, 2006.
- A. J. Goldman, R. G. Cox, et H. Brenner. The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid. *Chem. Eng. Sci.*, 21(12) :1151–1170, 1966.
- R. J. Gordon et W. R. Schowalter. Anisotropic fluid theory : a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions. *J. Rheol.*, 16 :79–97, 1972.
- E. Guazzelli et J. F. Morris. *A physical introduction to suspension dynamics*. Cambridge University Press, UK, 2012.
- É. Guazzelli et O. Pouliquen. Rheology of dense granular suspensions. *J. of Fluid Mech.*, 852, 2018.
- H. Haddadi, S. Shojaei-Zadeh, K. Connington, et J. F. Morris. Suspension flow past a cylinder : particle interactions with recirculating wakes. *J. Fluid Mech.*, 760 :R2, 2014.
- S. Haeri et J. Shrimpton. On the application of immersed boundary, fictitious domain and body-conformal mesh methods to many particle multiphase flows. *Int. J. of Multiphase Flow*, 40 :38–55, 2012.
- G. L. Hand. A theory of anisotropic fluids. *J. Fluid Mech.*, 13(1) :33–46, 1962.
- E. J. Hinch et L. G. Leal. The effect of brownian motion on the rheological properties of a suspension of non-spherical particles. *J. of Fluid Mech.*, 52(4) :683–712, 1972.

- H. H. Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *Int. J. of Multiphase Flow*, 22(2) :335–352, 1996.
- H. H. Hu, D. D. Joseph, et M. J. Crochet. Direct simulation of fluid particle motions. *Theo. and Comp. Fluid Dyn.*, 3(5) :285–306, 1992.
- M. A. Hulsen. A sufficient condition for a positive definite configuration tensor in differential models. *J. Non-Newton. Fluid Mechanics*, 38(1) :93–100, 1990.
- J. H. Irving et J. G. Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes. iv. the equations of hydrodynamics. *The J. of Chem. Phys.*, 18(6) :817–829, 1950.
- R. Jackson. Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a Newtonian fluid. *Chem. Eng. Sci.*, 52(15) :2457–2469, 1997.
- R. Jackson. *The dynamics of fluidized particles*. Cambridge University Press, UK, 2000.
- A. A. Johnson et T. E. Tezduyar. Advanced mesh generation and update methods for 3d flow simulations. *Comp. Mech.*, 23(2) :130–143, 1999.
- S. G. Johnson. Saddle-point integration of  $C_\infty$  "bump" functions. *preprint*, page arXiv :1508.04376, 2015.
- E. Jones, T. Oliphant, P. Peterson, et al. SciPy : Open source scientific tools for Python, 2001–. URL <http://www.scipy.org/>. [Online ; accessed <today>].
- P. Jop, Y. Forterre, et O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094) :727, 2006.
- H. Kalf et al. On the expansion of a function in terms of spherical harmonics in arbitrary dimensions. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, 2(4) :361–380, 1995.
- V. G. Kolli, E. J. Pollauf, et F. Gadala-Maria. Transient normal stress response in a concentrated suspension of spherical particles. *J. Rheol.*, 46(1) :321–334, 2002.
- D. Kolymbas. An outline of hypoplasticity. *Arch. Appl. Mech.*, 61(3) :143–151, 1991.
- I. M. Krieger. Rheology of monodisperse lattices. *Adv. in Coll. and Interface sci.*, 3(2) :111–136, 1972.
- I. M. Krieger et T. J. Dougherty. A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Trans. Soc. Rheol.*, 3(1) :137–152, 1959.
- S. Labbé et E. Maitre. A free boundary model for korteweg fluids as a limit of barotropic compressible navier-stokes equations. *Meth. and App. of Anal.*, 20(2) :165–178, 2013.
- L. G. Leal. *Advanced transport phenomena : fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge University Press, 2007.
- B. Lecampion et D. I. Garagash. Confined flow of suspensions modelled by a frictional rheology. *J. Fluid Mech.*, 759 :197–235, 2014.
- A. Lefebvre. Fluid-particle simulations with freefem++. In *Esaim : Proceedings*, volume 18, pages 120–132. EDP Sciences, 2007a.
- A. Lefebvre. *Modélisation numérique d'écoulements fluide/particules*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2007b.
- A. Lefebvre et B. Maury. Apparent viscosity of a mixture of a newtonian fluid and interacting particles. *Comptes rendus mécanique*, 333(12) :923–933, 2005.
- A. Lefebvre-Lepot et B. Maury. Micro-macro modelling of an array of spheres interacting through lubrication forces. *Adv. in Math. Sci. and App.*, 21(2) :535–557, 2011.

- D. Leighton et A. Acrivos. The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. of Fluid Mech.*, 181 :415–439, 1987.
- D. Lhuillier. Migration of rigid particles in non-Brownian viscous suspensions. *Phys. Fluids*, 21(2) :023302, 2009.
- C.-C. Lin et K. Wang. Convergence rate of fourier–laplace series of  $l_2$ -functions. *J. of Approx. Theory*, 128 (2) :103–114, 2004.
- R. A. Lionberger et W. B. Russel. A smoluchowski theory with simple approximations for hydrodynamic interactions in concentrated dispersions. *J. of Rheol.*, 41(2) :399–425, 1997.
- P.-L. Lions et N. Masmoudi. On a free boundary barotropic model. In *Annales de l'IHP (C) Non Linear Anal.*, volume 16, pages 373–410. Elsevier, 1999.
- G. G. Lipscomb, M. M. Denn, D. U. Hur, et D. V. Boger. The flow of fiber suspensions in complex geometries. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 26(3) :297–325, 1988.
- S. Lomholt et M. R. Maxey. Force-coupling method for particulate two-phase flow : Stokes flow. *J. of Comp. Phys.*, 184(2) :381–405, 2003.
- S. Luding. Cohesive, frictional powders : contact models for tension. *Granular matter*, 10(4) :235, 2008.
- M. K. Lyon et L. G. Leal. An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. part 1. monodisperse systems. *J. of Fluid Mech.*, 363 :25–56, 1998.
- R. Mari, R. Seto, J. F. Morris, et M. M. Denn. Shear thickening, frictionless and frictional rheologies in non-brownian suspensions. *J. of Rheol.*, 58(6) :1693–1724, 2014.
- R. Mari, R. Seto, J. F. Morris, et M. M. Denn. Nonmonotonic flow curves of shear thickening suspensions. *Phys. Rev. E.*, 91(5) :052302, 2015.
- S. H. Maron et P. E. Pierce. Application of Ree-Eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles. *J. Colloid Sci.*, 11(1) :80–95, 1956.
- B. Maury. A time-stepping scheme for inelastic collisions. *Numerische Mathematik*, 102(4) :649–679, 2006.
- B. Maury. A gluey particle model. In *ESAIM : Proceedings*, volume 18, pages 133–142. EDP Sciences, 2007.
- B. Maury et R. Glowinski. Fluid-particle flow : a symmetric formulation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 324(9) :1079–1084, 1997.
- B. Maury, A. Roudneff-Chupin, et F. Santambrogio. A macroscopic crowd motion model of gradient flow type. *Math. Models and Meth. in App. Sci.*, 20(10) :1787–1821, 2010.
- M. Maxey. Simulation methods for particulate flows and concentrated suspensions. *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 49 :171–193, 2017.
- M. R. Maxey et B. K. Patel. Localized force representations for particles sedimenting in stokes flow. *Int. J. of multiphase flow*, 27(9) :1603–1626, 2001.
- M. R. Maxey, B. K. Patel, E. J. Chang, et L. P. Wang. Simulations of dispersed turbulent multiphase flow. *Fluid Dyn. Res.*, 20(1-6) :143, 1997.
- B. Metzger et J. E. Butler. Irreversibility and chaos : role of long-range hydrodynamic interactions in sheared suspensions. *Phys. Rev. E*, 82(5) :051406, 2010.
- R. M. Miller et J. F. Morris. Normal stress-driven migration and axial development in pressure-driven flow of concentrated suspensions. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 135(2) :149–165, 2006.
- R. M. Miller, J. P. Singh, et J. F. Morris. Suspension flow modeling for general geometries. *Chem. Eng. Sci.*, 64(22) :4597–4610, 2009.

- P. Mills et P. Snabre. Rheology and structure of concentrated suspensions of hard spheres. shear induced particle migration. *J. de Physique II*, 5(10) :1597–1608, 1995.
- J. J. Moré, B. S. Garbow, et K. E. Hillstrom. User guide for minpack-1.[in fortran]. Technical report, Argonne National Lab., IL (USA), 1980.
- J. Moreau. Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints. In *Unilateral problems in structural analysis*, pages 173–221. Springer, 1985.
- J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Nonsmooth mechanics and Applications*, pages 1–82. Springer, 1988.
- J.-J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *Euro. J. of Mechanics-A/Solids*, 13(4-suppl) :93–114, 1993.
- J. F. Morris. A review of microstructure in concentrated suspensions and its implications for rheology and bulk flow. *Rheol. Acta*, 48(8) :909–923, 2009.
- J. F. Morris et F. Boulay. Curvilinear flows of noncolloidal suspensions : the role of normal stresses. *J. Rheol.*, 43(5) :1213–1237, 1999.
- C. Müller. Spherical harmonics, volume 17 of lecture notes in mathematics, 1966.
- A. Nadim et H. A. Stone. The motion of small particles and droplets in quadratic flows. *Studies in app. math.*, 85(1) :53–73, 1991.
- T. Narumi, H. See, Y. Honma, T. Hasegawa, T. Takahashi, et N. Phan-Thien. Transient response of concentrated suspensions after shear reversal. *J. Rheol.*, 46(1) :295–305, 2002.
- M. Newville, T. Stensitzki, D. B. Allen, M. Rawlik, A. Ingargiola, et A. Nelson. Lmfit : non-linear least-square minimization and curve-fitting for python. *Astrophysics Source Code Library*, 2016.
- P. R. Nott et J. F. Brady. Pressure-driven flow of suspensions : simulation and theory. *J. Fluid Mech.*, 275 :157–199, 1994.
- P. R. Nott, E. Guazzelli, et O. Pouliquen. The suspension balance model revisited. *Phys. Fluids*, 23(4) :043304, 2011.
- R. W. O’Brien. A method for the calculation of the effective transport properties of suspensions of interacting particles. *J. of Fluid Mech.*, 91(1) :17–39, 1979.
- S. Oh, Y.-Q. Song, D. I. Garagash, B. Lecampion, et J. Desroches. Pressure-driven suspension flow near jamming. *Phy. Rev. Let.*, 114(8) :088301, 2015a.
- S. Oh, Y.-Q. Song, D. I. Garagash, B. Lecampion, et J. Desroches. Pressure-driven suspension flow near jamming. *Phy. Rev. Let.*, 114(8) :088301, 2015b.
- J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of states. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 200 :523–541, 1950.
- M. Ouriemi, P. Aussillous, et E. Guazzelli. Sediment dynamics. part 1. bed-load transport by laminar shearing flows. *J. of Fluid Mech.*, 636 :295–319, 2009.
- G. Ovarlez, F. Bertrand, et S. Rodts. Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *J. Rheol.*, 50(3) :259–292, 2006.
- G. Ovarlez, F. Mahaut, S. Deboeuf, N. Lenoir, S. Hormozi, et X. Chateau. Flows of suspensions of particles in yield stress fluids. *J. of Rheol.*, 59(6) :1449–1486, 2015.
- O. Ozenda, P. Saramito, et G. Chambon. A new rate-independent tensorial model for suspensions of non-colloidal rigid particles in newtonian fluids. *J. of Rheol.*, 62(4) :889–903, 2018.

- W. Pan, B. Caswell, et G. E. Karniadakis. Rheology, microstructure and migration in brownian colloidal suspensions. *Langmuir*, 26(1) :133–142, 2009.
- L. Paoli et M. Schatzman. Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales : cas avec perte d'énergie. *ESAIM : Math. Model. and Num. Anal.*, 27(6) :673–717, 1993.
- N. A. Patankar, P. Singh, D. D. Joseph, R. Glowinski, et T.-W. Pan. A new formulation of the distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. of Multiphase Flow*, 26(9) : 1509–1524, 2000.
- C. Perrin. Pressure-dependent viscosity model for granular media obtained from compressible navier–stokes equations. *App. Math. Research eXpress*, 2016(2) :289–333, 2016.
- C. Perrin et E. Zatorska. Free/congested two-phase model from weak solutions to multi-dimensional compressible navier-stokes equations. *Comm. in PDE*, 40(8) :1558–1589, 2015.
- F. Peters, G. Ghigliotti, S. Gallier, F. Blanc, E. Lemaire, et L. Lobry. Rheology of non-brownian suspensions of rough frictional particles under shear reversal : A numerical study. *Journal of rheology*, 60(4) :715–732, 2016.
- N. Phan-Thien. Constitutive equation for concentrated suspensions in Newtonian liquids. *J. Rheol.*, 39(4) : 679–695, 1995.
- N. Phan-Thien, X.-J. Fan, et B. C. Khoo. A new constitutive model for monodispersed suspensions of spheres at high concentrations. *Rheol. Acta*, 38(4) :297–304, 1999.
- N. Phan-Thien, X.-J. Fan, et R. Zheng. A numerical simulation of suspension flow using a constitutive model based on anisotropic interparticle interactions. *Rheol. Acta*, 39(2) :122–130, 2000.
- R. J. Phillips, R. C. Armstrong, R. A. Brown, A. L. Graham, et J. R. Abbott. A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Phy. of Fluids A : Fluid Dyn.*, 4(1) :30–40, 1992.
- A. Prosperetti et G. Tryggvason. *Computational methods for multiphase flow*. Cambridge university press, 2007.
- A. Prosperetti et G. Tryggvason. *Computational methods for multiphase flow*. Cambridge university press, 2009.
- K. Radhakrishnan et A. C. Hindmarsh. Description and use of LSODE, the Livermore solver for ordinary differential equations. Technical Report UCRL-ID-113855, LLNL, 1993.
- A. Ramachandran et D. T. Leighton. The influence of secondary flows induced by normal stress differences on the shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. of Fluid Mech.*, 603 :207–243, 2008.
- I. Rampall, J. R. Smart, et D. T. Leighton. The influence of surface roughness on the particle-pair distribution function of dilute suspensions of non-colloidal spheres in simple shear flow. *J. of Fluid Mech.*, 339 :1–24, 1997.
- B. D. Reddy et G. P. Mitchell. Finite element analysis of fibre suspension flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190(18) :2349–2367, 2001.
- J. F. Richardson et W. N. Zaki. Sedimentation and fluidisation : Part i. *Chem. Eng. Res. and Design*, 75 : S82–S100, 1997.
- P. Saramito. A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 145 (1) :1–14, 2007.

- P. Saramito. *Complex fluids : modelling and algorithms*. Springer International Publishing AG, Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland, 2016.
- R. Seto et G. G. Giusteri. Normal stress differences in dense suspensions. *J. of Fluid Mech.*, 857 :200–215, 2018.
- R. Seto, G. G. Giusteri, et A. Martiniello. Microstructure and thickening of dense suspensions under extensional and shear flows. *J. of Fluid Mech.*, 825, 2017.
- A. Sierou et J. F. Brady. Accelerated stokesian dynamics simulations. *J. of Fluid Mech.*, 448 :115–146, 2001.
- A. Sierou et J. F. Brady. Rheology and microstructure in concentrated noncolloidal suspensions. *J. of Rheol.*, 46(5) :1031–1056, 2002.
- A. Singh et P. R. Nott. Experimental measurements of the normal stresses in sheared stokesian suspensions. *J. of Fluid Mech.*, 490 :293–320, 2003.
- B. Snook, J. E. Butler, et E. Guazzelli. Dynamics of shear-induced migration of spherical particles in oscillatory pipe flow. *J. of Fluid Mech.*, 786 :128–153, 2016.
- D. E. Stewart. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM review*, 42(1) :3–39, 2000.
- J. J. Stickel et R. L. Powell. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 37 :129–149, 2005.
- J. J. Stickel, R. J. Phillips, et R. L. Powell. A constitutive model for microstructure and total stress in particulate suspensions. *J. Rheol.*, 50(4) :379–413, 2006.
- J. J. Stickel, R. J. Phillips, et R. L. Powell. Application of a constitutive model for particulate suspensions : time-dependent viscometric flows. *J. Rheol.*, 51(6) :1271–1302, 2007.
- J. W. Swan et J. F. Brady. Simulation of hydrodynamically interacting particles near a no-slip boundary. *Phys. of Fluids*, 19(11) :113306, 2007.
- J. W. Swan et J. F. Brady. The hydrodynamics of confined dispersions. *J. of Fluid Mech.*, 687 :254–299, 2011.
- T. E. Tezduyar, M. Behr, S. Mittal, et J. Liou. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure : Ii. computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Comp. meth. in appl. mech. and eng.*, 94(3) :353–371, 1992.
- H. Troadec, F. Radjai, S. Roux, et J. C. Charmet. Model for granular texture with steric exclusion. *Phys. Rev. E*, 66(4) :041305, 2002.
- N. Verdon, A. Lefebvre-Lepot, P. Laure, et L. Lobry. Modified lees–edwards boundary conditions and viscous contact for numerical simulations of particles in a shear flow. *Euro. J. of Comp. Mech.*, 21(3-6) :397–406, 2012.
- P. Vigneaux, G. Chambon, A. Marly, L.-H. Luu, et P. Philippe. Flow of a yield-stress fluid over a cavity : Experimental and numerical investigation of a viscoplastic boundary layer. *J. of Non-Newt. Fluid Mech.*, 261 :38–49, 2018.
- A. Wachs et I. A. Frigaard. Particle settling in yield stress fluids : limiting time, distance and applications. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 238 :189–204, 2016.
- A. Wachs, A. Hammouti, G. Vinay, et M. Rahmani. Accuracy of finite volume/staggered grid distributed lagrange multiplier/fictitious domain simulations of particulate flows. *Comp. and Fluids*, 115 :154–172, 2015.

- M. Wang et J. F. Brady. Spectral ewald acceleration of stokesian dynamics for polydisperse suspensions. *J. of Comp Phy.*, 306 :443–477, 2016.
- E. W. Weisstein. Spherical harmonic, from mathworld – a wolfram web resource, 2016. URL <http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>. <http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>.
- T. Williams et C. Keley. `gnuplot` : an interactive program, 2010. <http://www.gnuplot.info>.
- H. J. Wilson et R. H. Davis. The viscosity of a dilute suspension of rough spheres. *J. of Fluid Mech.*, 421 : 339–367, 2000.
- M. Wyart et M. Cates. Discontinuous shear thickening without inertia in dense non-brownian suspensions. *Physical review letters*, 112(9) :098302, 2014.
- K. Yapici, R. L. Powell, et R. J. Phillips. Particle migration and suspension structure in steady and oscillatory plane Poiseuille flow. *Phys. Fluids*, 21(5) :053302, 2009.
- K. Yeo et M. R. Maxey. Dynamics of concentrated suspensions of non-colloidal particles in couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 649 :205–231, 2010a.
- K. Yeo et M. R. Maxey. Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method. *J. of Comput. Phys.*, 229(6) :2401–2421, 2010b.
- K. Yeo et M. R. Maxey. Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a poiseuille flow. *J. of Fluid Mech.*, 682 :491–518, 2011.
- I. E. Zarraga, D. A. Hill, et D. T. Leighton Jr. The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in Newtonian fluids. *J. Rheol.*, 44(2) :185–220, 2000.
- D. Zhang et A. Prosperetti. Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 267 :185–219, 1994.





