

Lohéac Jérôme

Projet de fin d'Études et
Stage de Master 2 Recherche

Simulation numérique de la déformation
d'un globule rouge dans une artère

Encadrants : P. Saramito (Laboratoire Jean Kuntzmann) et
J. Etienne (Laboratoire de Spectrométrie Physique)

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notations	2
3	Mise en équations	3
3.1	Problème physique	3
3.2	Équations de base	3
3.3	Adimensionnement des équations	5
3.4	Formulation variationnelle	6
3.4.1	Couplage faible des équations	6
3.4.2	Couplage fort des équations	7
3.5	Méthode des caractéristiques	8
4	Résolution Numérique	11
4.1	Méthode Euler-Lagrange arbitraire	11
4.2	Discrétisation en temps	12
4.2.1	Avec la méthode des caractéristiques	12
4.2.2	Avec la méthode "A.L.E."	14
4.3	Déplacement général du maillage, discrétisation de (15)	15
4.4	Discrétisation en espace	15
4.5	Calcul numérique des grandeurs géométriques	17

1 Introduction

Le drapeau qui claque au vent, le drap qui se froisse et le globule rouge qui se déforme pour passer dans un étroit vaisseau capillaire ont un point commun :

leur surface est constante, le matériau qui les forme étant quasiment inextensible.

Imposer cette contrainte numériquement fait intervenir la géométrie de la surface, et des conditions de compatibilité entre la discrétisation de la force qui assure l'inextensibilité et celle du champ de vitesse.

La mise en œuvre des simulations permettra d'étudier les ondulations d'un drapeau dans le vent.

2 Notations

1. Les applications dont l'espace image est inclus dans \mathbb{R}^2 sont notées en gras.
2. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ dénote les matrices $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans K (un corps). On note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.
Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, on note $M_{i,j}$, $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$, le coefficient de la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne de M . Si $m = 1$ (respectivement $n = 1$), on ne note pas l'indice de ligne (respectivement de colonne).
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit

$$A : B = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}.$$

4. Soit $f :]0, T[\times E \longrightarrow F$ et $g :]0, T[\times F \longrightarrow G$, avec $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} (représentant dans ce qui suit le temps) et E, F et G des ensembles quelconques, on note $g \circ f$ l'application définie comme suit :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc}]0, T[\times E & \longrightarrow & G \\ (t, x) & \longmapsto & g(t, f(t, x)) \end{array}$$

5. Soit $f :]0, T[\times E \longrightarrow F$, avec $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} (représentant dans ce qui suit le temps) et E et F des ensembles quelconques, on note,

$$\forall t \in]0, T[, \quad f(t) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(t, x) \end{array} .$$

6. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , on note $L_0^2(\Omega)$ l'ensemble

$$\left\{ v \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} 1v \, d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

$1 \in L^2(\Omega)$ car Ω est borné.

7. Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d et Γ une variété bornée de dimension $p - 1$ dont on définit une normale continue \mathbf{n}_{Γ} , et soit v une application définie de Ω dans \mathbb{R} , on note $[v]_{\Gamma}$ (ou $[v]$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la forme linéaire telle que,

$$\langle [v], \varphi \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma} v(\mathbf{x} + \eta \mathbf{n}_{\Gamma}(x)) \varphi(\mathbf{x} + \eta \mathbf{n}_{\Gamma}(x)) \, d\mathbf{x} - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma} v(\mathbf{x} - \eta \mathbf{n}_{\Gamma}(x)) \varphi(\mathbf{x} - \eta \mathbf{n}_{\Gamma}(x)) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi,$$

si existence.

Une condition nécessaire à l'existence des intégrales écrites précédemment est que $v, \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega \setminus \Gamma)$.

Si v est un vecteur, la définition de $[v]$ est faite composantes par composantes.

8. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et Γ une courbe connexe borné de Ω . On dira qu'une triangulation T_h de Ω est conforme à Γ si et seulement si pour route arrête a des triangles de T_h , si $\bar{a} \cap \bar{\Gamma} \neq \emptyset$ alors les extrémités de a sont dans $\bar{\Gamma}$ et il y a au moins un point de la triangulation qui est dans $\bar{\Gamma}$.

3 Mise en équations

3.1 Problème physique

L'objectif est de simuler le déplacement d'un fil inextensible, ayant un point d'attache fixe et une densité linéique de masse ρ_Γ , dans un fluide incompressible de masse surfacique ρ et de viscosité μ .

3.2 Équations de base

On considère un domaine ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 . Typiquement, $\Omega =]-A, B[\times]-C, C[$ (A, B et C positifs). Dans ce domaine, on considère une courbe $\Gamma(t)$ paramétrisée par $\gamma(t) :]0, L[\rightarrow \Omega$, où L représente la longueur de la courbe, pour chaque instant t en fonction de l'abscisse curviligne s de $\Gamma(t)$ avec $s = 0$ au point d'ancrage (origine du repère, représenté par un rond sur la figure Fig. 1).

Physiquement, $\Gamma(t)$ est la position du fil à l'instant t et Ω est le domaine dans le quel se déplace le fluide et le fil. On cherche donc à simuler le déplacement du fil dans le fluide sur les temps compris entre 0 et T .

On fait les hypothèses suivantes sur $\Gamma(t)$,

1. $\Gamma(t)$ est connexe,
2. la longueur de $\Gamma(t)$ est constante égale à $L > 0$,
3. il n'y a pas de point double ($\gamma(t, \cdot)$ est bijectif de $]0, L[$ dans $\Gamma(t)$),
4. le fil ne touche pas le bord du domaine ($\overline{\Gamma(t)} \cap \partial\Omega = \{ \}$).

On note alors $\Omega(t) = \Omega \setminus \Gamma(t)$. Un exemple de domaine est donné sur la figure Fig. 1. On définit alors les grandeurs

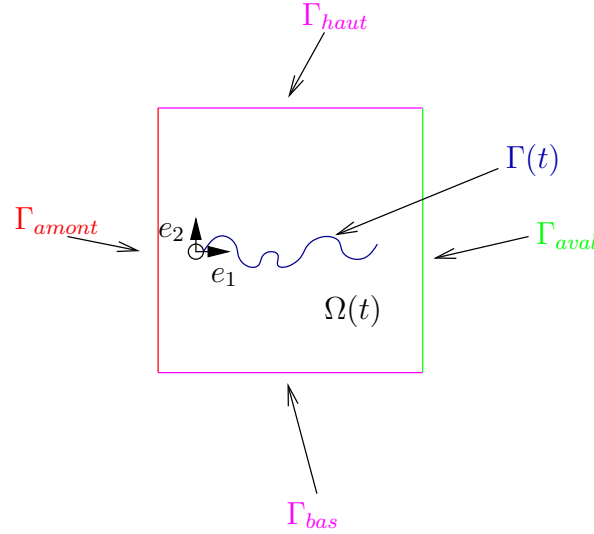


FIG. 1 – exemple de domaine $\Omega(t)$.

géométriques suivantes :

$$\left| \begin{array}{l}
 \mathbf{n}_\Gamma, \text{ la normale à } \Gamma(t) \text{ définie telle qu'elle vérifie au point d'ancrage du fil,} \\
 \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_1 \geq 0 \text{ et si } \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \text{ alors } \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_2 \geq 0 \\
 \text{et que ce soit une fonction continue de } s, \\
 \\
 \mathbf{t}, \text{ la tangente à } \Gamma(t) \text{ avec } \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \mathbf{t} \geq 0, \\
 \\
 c = \text{div}_s(\mathbf{n}_\Gamma), \text{ la courbure de } \gamma, \text{ on a aussi } \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = c \mathbf{n}_\Gamma,
 \end{array} \right.$$

et \mathbf{n} la normale sortante à Ω .

Les équations qui régissent le système physique sont les suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})), \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega(t), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega(t), \\ \rho_{\Gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = [\sigma_{tot}] \mathbf{n} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c, \quad \text{sur }]0, T[\times]0, L[, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = 0, \quad \text{sur }]0, T[\times]0, L[, \end{array} \right. \quad (1)$$

avec les opérateurs,

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}, \\ \sigma_{tot} = -pI + 2\mu D(\mathbf{u}), \end{array} \right.$$

et les forces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_t = \frac{\partial \zeta}{\partial s} \mathbf{t} + c\zeta \mathbf{n}_{\Gamma}, \quad (\text{la force de tension}), \\ \mathbf{F}_c = \kappa \left(\frac{\partial^2 c}{\partial s^2} + \frac{c^3}{2} \right) \mathbf{n}_{\Gamma}, \quad (\text{la force de résistance à la courbure du fil}), \text{ avec } \kappa > 0 \text{ (la rigidité)}. \end{array} \right.$$

Les inconnues sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \text{ définie dans } \Omega(t) \text{ et à valeurs dans } \mathbb{R}^2, \text{ la vitesse du fluide,} \\ p \text{ définie dans } \Omega(t) \text{ et à valeurs dans } \mathbb{R}, \text{ la pression dans le fluide,} \\ \gamma \text{ définie dans }]0, L[\text{ et à valeurs dans } \mathbb{R}^2, \text{ la position du fil et} \\ \zeta \text{ définie dans }]0, L[\text{ et à valeurs dans } \mathbb{R}, \text{ la tension dans le fil.} \end{array} \right.$$

La première équation de (1) représente le mouvement du fluide (équation de Navier-Stokes). Le deuxième décrit l'incompressibilité du fluide. La troisième résulte du principe fondamental de la dynamique appliqué au fil. La dernière décrit le fait que le fil est inextensible.

On munit les équations (1) des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t, \cdot) = \mathbf{u}_0(t), \quad \text{sur }]0, T[\times \Gamma_{haut} \cup \Gamma_{bas} \cup \Gamma_{amont}, \\ \sigma_{tot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur }]0, T[\times \Gamma_{aval}, \\ \mathbf{u} \circ \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \text{sur }]0, T[\times]0, L[, \\ \gamma(0) = 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial s}(L) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

(L'origine est le point d'attache du fil.)

On munit aussi le problème (1) des conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t=0, \cdot) &= \mathbf{u}^0, \\ \gamma(t=0, s) &= (s, 0)^T + \gamma_p(s), \quad s \in [0, L]. \end{cases} \quad (3)$$

Avec $\gamma_p :]0, L[\rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction proche de 0.

Remarque 3.1 \mathbf{u}^0 sera obtenu en recherchant l'état stationnaire du problème avec le fil fixé et dans la position $\gamma(t=0, \cdot)$ avec $\gamma_p = 0$.

3.3 Adimensionnement des équations

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = U\tilde{\mathbf{u}}, \quad \text{avec } U \text{ la norme de la vitesse entrante,} \\ t = \tau\tilde{t}, \quad \text{avec } \tau \text{ à déterminer,} \\ p = P\tilde{p}, \quad \text{avec } P \text{ à déterminer,} \\ \mathbf{x} = L\tilde{\mathbf{x}}, \\ \nabla = L\tilde{\nabla}, \\ \text{div} = L\tilde{\text{div}}, \\ s = L\tilde{s}, \\ \gamma = L\tilde{\gamma}, \\ \zeta = Z\tilde{\zeta}, \quad \text{avec } Z \text{ à déterminer.} \end{array} \right.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{U}{\tau} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} \right) = -\frac{P}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + 2\tilde{\text{div}} \left(\frac{\mu U}{L^2} D(\tilde{\mathbf{u}}) \right), \quad \text{sur }]0, \frac{T}{\tau}[\times \Omega(\tilde{t}), \\ \tilde{\text{div}}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad \text{sur }]0, \frac{T}{\tau}[\times \Omega(\tilde{t}), \\ \rho \Gamma \frac{L}{\tau^2} \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{t}^2} = \left[-P(\tilde{p} \circ \tilde{\gamma})I + 2\frac{\mu U}{L} D(\tilde{\mathbf{u}} \circ \tilde{\gamma}) \right] \mathbf{n} + \frac{Z}{L} \mathbf{F}_t + \frac{1}{L^2} \mathbf{F}_c, \quad \text{sur }]0, \frac{T}{\tau}[\times]0, 1[, \\ \tilde{\text{div}} \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \tilde{t}} \right) = 0, \quad \text{sur }]0, \frac{T}{\tau}[\times]0, 1[. \end{array} \right. \quad (4)$$

On pose alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{L}{U}, \\ P = \rho U^2, \\ Z = \rho L U^2, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} R_e = \frac{\rho L U}{\mu} \quad , \text{ le nombre de Reynolds et} \\ \lambda = \frac{\rho \Gamma}{\rho L} \quad , \text{ le contraste de densité.} \end{array} \right.$$

On obtient alors le système suivant en omettant les symboles “ \sim ” :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \operatorname{div} \left(\frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}) \right) , \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega(t) , \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 , \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega(t) , \\ \lambda \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \left[-(p \circ \gamma) I + \frac{2}{R_e} D(\mathbf{u} \circ \gamma) \right] \mathbf{n} + \mathbf{F}_t + \frac{1}{\rho L^3 U^2} \mathbf{F}_c , \quad \text{sur }]0, T[\times]0, L[, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = 0 , \quad \text{sur }]0, T[\times]0, L[. \end{array} \right. \quad (5)$$

Ainsi que pour les conditions aux limites et initiales.

On renote alors

$$\sigma_{tot} = -pI + 2 \frac{1}{R_e} D(\mathbf{u}) .$$

3.4 Formulation variationnelle

3.4.1 Couplage faible des équations

On obtient la formulation variationnelle suivante sur l'équation de Navier-Stokes :

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega(t)} \sigma_{tot} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma(t)} [\sigma_{tot}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\Gamma \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \sigma_{tot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}$$

et sur l'équation du fil (sans considérer la force liée à la courbure dans un premier temps) :

$$\int_0^L \rho_\Gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\delta} \, d\sigma = \int_0^L [\sigma_{tot}] \mathbf{n}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\delta} \, d\sigma + \int_0^L \frac{\partial \zeta}{\partial s} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\delta} \, d\sigma - \int_0^L \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \frac{\partial \zeta \boldsymbol{\delta}}{\partial s} \, d\sigma + \left[\zeta \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \boldsymbol{\delta} \right]_0^L$$

On pose les espaces fonctionnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\Omega^{0,0} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega(t), \mathbb{R}^2) , \mathbf{v}|_{\Gamma_{haut} \cup \Gamma_{bas} \cup \Gamma_{amont} \cup \Gamma(t)} = 0 \right\} , \\ V_\Omega^{\mathbf{u}_0, \gamma} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega(t), \mathbb{R}^2) , \mathbf{v}|_{\Gamma_{haut} \cup \Gamma_{bas} \cup \Gamma_{amont}} = \mathbf{u}_0 , \mathbf{v}|_{\Gamma(t)} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\} , \\ V_\Gamma^0 = \left\{ \boldsymbol{\delta} \in H^1(]0, L[, \mathbb{R}^2) , \boldsymbol{\delta}(0) = 0 , \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial s}(L) = 0 \right\} , \end{array} \right.$$

On en déduit alors le problème variationnel équivalent au problème (5) muni des conditions aux limites (2) :
trouver $(\mathbf{u}, p, \gamma, \zeta) \in H^1(]0, T[, V_\Omega^{\mathbf{u}_0, \gamma}) \times L^\infty(]0, T[, L_0^2(\Omega(t), \mathbb{R})) \times H^2(]0, T[, V_\Gamma^0) \times L^\infty(]0, T[, H^1(]0, L])$
tel que, $\forall t \in]0, T[, \forall (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\delta}, \varphi) \in V_\Omega^{0,0} \times L^2(\Omega(t)) \times V_\Gamma^0 \times L^2(]0, L])$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega(t)} \frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} = 0, \\ \int_0^L \lambda \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds = \int_0^L [\sigma_{tot}] \mathbf{n}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds + \int_0^L \frac{\partial \zeta}{\partial s} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds - \int_0^L \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \frac{\partial \zeta \boldsymbol{\delta}}{\partial s} \, ds, \\ \int_0^L \operatorname{div} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \varphi \, ds = 0, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (3).

(6)

3.4.2 Couplage fort des équations

On impose dans ce cas la condition à la limite sur le fil, $\mathbf{u} \circ \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ directement dans la formulation faible et non plus dans la définition des espaces fonctionnels.

On pose alors les espaces fonctionnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\Gamma = \left\{ \mathbf{v} \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega(t), \mathbb{R}^2), \mathbf{v}(0) = 0 \text{ et } \nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}_e) = 0 \right\}, \\ V_\Omega^0 = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega(t), \mathbb{R}^2), \mathbf{v}|_{\Gamma_{haut} \cup \Gamma_{bas} \cup \Gamma_{amont}} = 0 \right\} \cap V_\Gamma, \\ V_\Omega^{\mathbf{u}_0} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega(t), \mathbb{R}^2), \mathbf{v}|_{\Gamma_{haut} \cup \Gamma_{bas} \cup \Gamma_{amont}} = \mathbf{u}_0 \right\} \cap V_\Gamma. \end{array} \right.$$

Où $\mathbf{x}_e \in \Omega$ dénote l'extrémité libre du fil à l'instant t .

On en déduit alors le problème variationnel équivalent au problème (5) muni des conditions aux limites (2) :

$$\text{trouver } (\mathbf{u}, p, \zeta) \in H^1(]0, T[, V_\Omega^{\mathbf{u}_0}) \times L^\infty(]0, T[, L_0^2(\Omega(t), \mathbb{R})) \times L^\infty(]0, T[, H^1(\Gamma(t)))$$

$$\text{tel que, } \forall t \in]0, T[, \forall (\mathbf{v}, q, \varphi) \in V_\Omega^0 \times L^2(\Omega(t)) \times L^2(\Gamma(t)),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega(t)} \frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \\ \quad - \int_{\Gamma(t)} [\sigma_{tot}] \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \\ \int_{\Gamma(t)} \lambda \frac{\partial \mathbf{u} \circ \gamma}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_{\Gamma(t)} [\sigma_{tot}] \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \int_{\Gamma(t)} \nabla_s \zeta \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \int_{\Gamma(t)} c \zeta \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \\ \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} = 0, \\ \int_{\Gamma(t)} \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \varphi \, d\sigma = 0, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (3).

(7)

On obtient alors par sommation dans les équations du problème (7), le problème (8),

trouver $(\mathbf{u}, p, \zeta) \in H^1(]0, T[, V_\Omega^{\mathbf{u}^0}) \times L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega(t), \mathbb{R})) \times L^\infty(]0, T[, H^1(\Gamma(t)))$

tel que, $\forall t \in]0, T[, \forall (v, q, \varphi) \in V_\Omega^0 \times L^2(\Omega(t)) \times L^2(\Gamma(t))$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma(t)} \lambda \frac{\partial \mathbf{u} \circ \gamma}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \\ = \int_{\Omega(t)} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega(t)} \frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Gamma(t)} \nabla_s \zeta \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \int_{\Gamma(t)} c \zeta \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \\ \\ \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} = 0, \\ \\ \int_{\Gamma(t)} \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \varphi \, d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

avec les conditions initiales (3).

3.5 Méthode des caractéristiques

L'objectif de cette méthode est de faire une correspondance entre les visions eulérienne et lagrangienne du problème. L'application X construite ci-après donne la position à l'instant t d'une "particule physique" qui était à la position x à l'instant t_0 .

Cette application X à valeurs dans Ω est solution du problème,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) = \mathbf{u}(t, X(t, x)), \quad t \in]0, T[, \\ \\ X(t_0, x) = x, \quad t_0 \in]0, T[\text{ fixé.} \end{array} \right. \quad (9)$$

On en déduit que

$$\frac{\partial \mathbf{u} \circ X}{\partial t}(t, x) = \mathbf{u}(t, X(t, x)) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, X(t, x)) \quad (10)$$

Remarque 3.2 La méthode des caractéristiques nous permet de nous ramener à un problème de type Stokes pour l'équation de Navier-Stokes.

On déduit de (10) les différentes écritures du problème variationnel, on note

$$\left| \begin{array}{l} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Omega = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega(t)} \frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ \\ b(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega(t)} p \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall (\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Ces trois formes sont clairement bilinéaires continues et on a que a et $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ sont symétriques.

1. Pour le couplage faible, on réécrit le problème (6) comme suit,

$$\begin{aligned}
& \text{trouver } (\mathbf{u}, p, \gamma, \zeta) \in H^1\left(]0, T[, V_{\Omega}^{\mathbf{u}_0, \gamma(t, \cdot)}\right) \times L^{\infty}\left(]0, T[, L_0^2(\Omega, \mathbb{R})\right) \times \\
& \quad \times H^2\left(]0, T[, V_{\Gamma}^0\right) \times L^{\infty}\left(]0, T[, H^1(\Gamma(t))\right) \\
& \text{tel que, } \forall t \in]0, T[, \forall (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\delta}, \varphi) \in V_{\Omega}^{0,0} \times L^2(\Omega) \times V_{\Gamma}^0 \times L^2(\Gamma(t)), \\
& \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \circ X, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = -a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \\ \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \gamma, \boldsymbol{\delta} \rangle_{\Gamma(t)} = a_{\Gamma}^1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) - a_{\Gamma}^2(p, \boldsymbol{\delta}) + b_{\Gamma}(\zeta, \boldsymbol{\delta}) - c(\gamma, \zeta, \boldsymbol{\delta}), \\ d(\gamma, \varphi) = 0, \end{array} \right. \tag{11} \\
& \text{avec les conditions initiales (3).}
\end{aligned}$$

Avec $\forall t \in]0, T[$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \gamma, \boldsymbol{\delta} \rangle_{\Gamma(t)} = \int_0^L \gamma \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds, \quad \forall \gamma, \boldsymbol{\delta} \in L^2(]0, L[, \mathbb{R}^2), \\ a_{\Gamma}^1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) = \int_0^L \frac{2}{R_e} [D(\mathbf{u} \circ \gamma)] \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds, \quad \forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}) \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(]0, L[, \mathbb{R}^2), \\ a_{\Gamma}^2(p, \boldsymbol{\delta}) = \int_0^L [p \circ \gamma] \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds, \quad \forall (p, \boldsymbol{\delta}) \in \times L^2(]0, L[, \mathbb{R}^2), \\ b_{\Gamma}(\zeta, \boldsymbol{\delta}) = \int_0^L \frac{\partial \zeta}{\partial s} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\delta} \, ds, \quad \forall (\zeta, \boldsymbol{\delta}) \in L^2(]0, L[) \times H^1(]0, L[, \mathbb{R}^2), \\ c(\gamma, \zeta, \boldsymbol{\delta}) = \int_0^L \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \frac{\partial \zeta \boldsymbol{\delta}}{\partial s} \, ds, \quad \forall (\gamma, \zeta, \boldsymbol{\delta}) \in H^1(]0, L[, \mathbb{R}^2) \times W^{1,\infty}(]0, L[) \times H^1(]0, L[, \mathbb{R}^2), \\ d(\gamma, \varphi) = \int_0^L \operatorname{div} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \varphi \, ds, \quad \forall (\gamma, \varphi) \in H^2(]0, L[, \mathbb{R}^2) \times L^2(]0, L[). \end{array} \right.$$

Les formes précédentes sont linéaires, bilinéaires ou trinéaires.

Remarque 3.3 Les formes a_{Γ}^1 , a_{Γ}^2 et b_{Γ} dépendent implicitement du paramétrage γ de Γ car elles font intervenir la courbure de Γ .

2. Pour le couplage fort, on réécrit le problème (8) comme suit,

$$\begin{aligned}
& \text{trouver } (\mathbf{u}, p, \zeta) \in H^1\left(]0, T[, V_{\Omega}^{\mathbf{u}_0} \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^2)\right) \times L^{\infty}\left(]0, T[, L_0^2(\Omega)\right) \times L^{\infty}\left(]0, T[, L^2(\Gamma(t))\right) \\
& \text{tel que, } \forall t \in]0, T[, \forall (\mathbf{v}, q, \varphi) \in V_{\Omega}^0 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma(t)), \\
& \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \mathbf{u} \circ X, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} + \lambda \langle \mathbf{u} \circ X, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma(t)}) = -a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + c(\zeta, \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \\ d(\mathbf{u}, \varphi) = 0, \end{array} \right. \tag{12} \\
& \text{avec les conditions initiales (3).}
\end{aligned}$$

Où

$$\left| \begin{array}{ll}
 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma(t)} = \int_{\Gamma(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega(t), \mathbb{R}^2), \\
 c(\zeta, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma(t)} \nabla_s \zeta \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \int_{\Gamma(t)} c \zeta \mathbf{v} \, d\sigma, & \forall (\zeta, \mathbf{v}) \in H^1(\Gamma(t)) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^2), \\
 d(\mathbf{u}, \varphi) = \int_{\Gamma(t)} \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \varphi \, d\sigma, & \forall (\mathbf{u}, \varphi) \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^2(\Gamma(t)).
 \end{array} \right.$$

4 Résolution Numérique

4.1 Méthode Euler-Lagrange arbitraire

Dans notre approche du problème, nous avons choisi une approche numérique faisant intervenir les éléments finis. Pour suivre l'interface, nous avons décidé de déplacer les points du maillage avec l'interface (le fil). Cette approche se justifie par rapport à une approche par "level set" car il est numériquement difficile de déterminer les zéros d'une fonction distance signée pour ce type de problème, car la fonction distance signée correspondant au fil ne vas pas changer de signe.

L'objectif de cette méthode est de se donner une vitesse de déplacement des points d'un maillage de Ω aux différents instants, tout en conservant à chaque instant un maillage de Ω qui soit conforme à $\Gamma(t)$. Cette méthode va donc permettre de transporter le maillage construit sur le domaine $\Omega(0)$ et de ne pas avoir à refaire un maillage à chaque instant.

On se donne une famille de champ $\mathbf{R}(t, \cdot)$ défini sur $\Gamma(t)$, avec \mathbf{R} de norme 1.

La vitesse instantanée $\mathbf{c}(t, \cdot)$ du domaine au temps t est alors définie sur la frontière $\Gamma(t)$ par

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_\Gamma} \right) \mathbf{R}.$$

Pour notre problème, on choisi $\mathbf{c} = \mathbf{u}$ sur $\Gamma(t)$ (ce qui revient à prendre \mathbf{R} égal à $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ sur $\Gamma(t)$).

On prolonge cette vitesse dans tous le domaine Ω en résolvant le problème en \mathbf{c} suivant,

$$\Delta \mathbf{c}(t, \cdot) = 0, \text{ sur } \Omega, \quad (13)$$

avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases} \mathbf{c}(t, \cdot) = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{c}(t, \cdot) = \mathbf{u}(t, \cdot), & \text{sur } \Gamma(t). \end{cases} \quad (14)$$

À partir de l'application \mathbf{c} , on peut construire les caractéristiques du domaine, $\mathbf{C}(\cdot, t_1, t_2) : \Omega(t_1) \longrightarrow \Omega(t_2)$ par

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{C}}{dt}(x, t_1, t) = \mathbf{c}(t, \mathbf{C}(x, t_1, t)), & x \in \Omega(t_1), \\ \mathbf{C}(x, t_1, t_1) = x, & x \in \Omega(t_1). \end{cases} \quad (15)$$

L'application \mathbf{C} définit alors bien une transformation régulière entre les domaines aux différents instants [4].

On peut alors définir des variables définies sur le domaine $\Omega(t_1)$ représentant les grandeurs sur le domaine $\Omega(t_2)$.

On pose alors la vitesse "A.L.E." du fluide à l'instant t_2 définie sur le domaine à l'instant t_1 ,

$$\mathbf{u}_{t_1}(x, t_2) = \mathbf{u}(\mathbf{C}(x, t_1, t_2), t_2), \quad \forall x \in \Omega(t_1). \quad (16)$$

On définit de même la pression p_τ en variables "A.L.E."

De (16), on obtient,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_2} = \frac{\partial \mathbf{u}_{t_1}}{\partial t_2} - \mathbf{c}(t_1, \cdot) \nabla \mathbf{u}_{t_1}. \quad (17)$$

Du problème (5), on en déduit la formulation "A.L.E." du problème (pour les équations de Navier-Stokes, les autres grandeurs liées au fil étant déjà définies sur un domaine fixe, $]0, L[$), sur le domaine à un instant τ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} + ((\mathbf{u}_\tau - \mathbf{c}(\tau, \cdot)) \cdot \nabla) \mathbf{u}_\tau &= -\nabla p_\tau + \operatorname{div} \left(\frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}_\tau) \right), & \text{sur }]0, T[\times \Omega(\tau), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}_\tau) &= 0, & \text{sur }]0, T[\times \Omega(\tau), \\ \lambda \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \left[-p_\tau \circ \gamma(\tau, \cdot) I + \frac{2}{R_e} D(\mathbf{u}_\tau \circ \gamma(\tau, \cdot)) \right] + & (18) \\ &+ \mathbf{F}_t + \frac{1}{\rho L^3 U^2} \mathbf{F}_c, & \text{sur }]0, T[\times]0, L[, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) &= 0, & \text{sur }]0, T[\times]0, L[. \end{array} \right.$$

4.2 Discrétisation en temps

Soit τ un pas de discrétisation temporel, avec $\frac{T}{\tau} = n \in \mathbb{N}^*$. On note avec des exposants $m \in [0, n]$ toutes les grandeurs au temps $t^m = m\tau$.

4.2.1 Avec la méthode des caractéristiques

On note X_{m+1} l'application découlant de la méthode des caractéristiques (9) définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_{m+1}}{\partial t}(t, x) = \mathbf{u}(t, X_{m+1}(t, x)), \\ X_{m+1}(t^{m+1}, x) = x. \end{array} \right.$$

On a $X_{m+1}(t, \cdot) : \Omega^{m+1} \longrightarrow \Omega(t)$. En particulier, on a $X_{m+1}(t^m, \cdot) : \Omega^{m+1} \longrightarrow \Omega^m$, on notera cette application X_{m+1}^m .

On a d'après la relation (10), en utilisant un schéma d'Euler implicite en temps,

$$\forall t, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (t + \tau) = \frac{\mathbf{u}(t + \tau) \circ X_{m+1}(t + \tau) - \mathbf{u}(t) \circ X_{m+1}(t)}{\tau} + O(\tau)$$

d'où pour $t = t^m$,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (t^{m+1}) = \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m \circ X_{m+1}^m}{\tau} + O(\tau). \quad (19)$$

Avec un schéma d'Euler implicite en temps, on en déduit de la formulation variationnelle (12) avec la relation (19) la formulation variationnelle du problème discrétisée en temps,

On a au temps t^{m+1} ,

Étant donné $\mathbf{u}^m \in V_\Omega^{\mathbf{u}_0} \cap H^{\frac{1}{2}}(\Omega^m, \mathbb{R}^2)$,

trouver $(\mathbf{u}^{m+1}, p^{m+1}, \zeta^{m+1}) \in (V_\Omega^{\mathbf{u}_0} \cap H^{\frac{1}{2}}(\Omega^{m+1}, \mathbb{R}^2)) \times L_0^2(\Omega^{m+1}) \times L^2(\Gamma^{m+1})$,

tel que $\forall (\mathbf{v}, q, \varphi) \in V_\Omega^0 \times L^2(\Omega^{m+1}) \times L^2(\Gamma^{m+1})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \lambda \langle \mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma^{m+1}} + \\ + \tau (a(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p^{m+1}) - c(\zeta^{m+1}, \mathbf{v})) = \langle \mathbf{u}^m \circ X_{m+1}^m, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \lambda \langle \mathbf{u}^m \circ X_{m+1}^m, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma^m}, \\ b(\mathbf{u}^{m+1}, q) = 0, \\ d(\mathbf{u}^{m+1}, \varphi) = 0, \end{array} \right. \quad (20)$$

Discrétisation temporelle de X_{m+1} ,

Comme précédemment, on note τ le pas de temps et t^m le temps $m\tau$.

1. Discrétisation par la méthode d'Euler explicite,

On a par cette méthode,

$$\forall t, \quad \frac{X_{m+1}(t+\tau) - X_{m+1}(t)}{\tau} = \mathbf{u}(t) \circ X_{m+1}(t) + O(\tau).$$

On a donc pour $t = t^m$,

$$\frac{I_d - X_{m+1}^m}{\tau} = \mathbf{u}^m \circ X_{m+1}^m + O(\tau).$$

Or X_{m+1}^m est inconnu On aura donc un système à inverser bien que le schéma soit explicite.

On peut approximer X_{m+1} par

$$X_{m+1} = I_d - \tau \mathbf{u}^m + O(\tau^2).$$

Ce qui revient à considérer la méthode des rectangles à droite pour l'intégration numérique de (9).

On obtient alors

$$X_{m+1}^m = I_d - \tau \mathbf{u}^m \circ (I_d - \tau \mathbf{u}^m) + \tau \varepsilon_1(\tau) + \tau^2 \varepsilon_2(\tau), \quad (21)$$

avec ε_i ($i = 1$ ou 2) une fonction telle que $\varepsilon_i(\tau) = O_0(1)$.

On a donc une erreur d'ordre 1 liée au suivit de \mathbf{u} le long de la caractéristique et d'ordre 2 liée au mouvement de la caractéristique au cours du temps.

2. Discrétisation par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (ou méthode de Heunn),

On a par cette méthode,

$$\forall t, \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = \mathbf{u}(t) \circ X_{m+1}(t), \\ k_2 = \mathbf{u}(t+\tau) \circ (I_d + \tau k_1), \\ X_{m+1}(t+\tau) = X_{m+1}(t) + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) + O(\tau^3). \end{array} \right.$$

On a donc pour $t = t^{m+1}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \mathbf{u}^m \circ X_{m+1}^m, \\ k_2 = \mathbf{u}^{m+1} \circ (I_d + \tau k_1), \\ I_d = X_{m+1}^m + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) + O(\tau^3). \end{array} \right.$$

On effectue les mêmes approximations pour les variables X_{m+1} que celle de la méthode d'Euler. Pour estimer \mathbf{u}^{m+1} , on effectue les développements limités,

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{m+1} &= \mathbf{u}^m + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^m) + O(\tau^2), \\ \mathbf{u}^{m-1} &= \mathbf{u}^m - \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^m) + O(\tau^2). \end{cases}$$

On obtient alors par addition des deux équations,

$$\mathbf{u}^{m+1} = 2\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + O(\tau^2).$$

Remarque 4.1 Pour $m = 0$, on peut estimer \mathbf{u}^1 par \mathbf{u}^0 ce qui revient à la relation précédente car la condition initiale est calculée à partir d'un état stationnaire.

On obtient finalement,

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{u}^m \circ (I_d - \tau \mathbf{u}^m), \\ k_2 = (2\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}) \circ (I_d + \tau k_1), \\ I_d = X_{m+1}^m + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) + O(\tau^3). \end{cases} \quad (22)$$

Calcul des formes sur Γ^{m+1} ,

Dans la formulation variationnelle (20) (étant donné que la discrétisation est implicite en temps), il apparaît des intégrales sur Γ^{m+1} et les tangentes, normales et courbures de cette courbe tandis qu'elle n'est pas encore connue. Il n'est alors pas envisageable de faire le schéma implicite (20) directement. Nous allons donc estimer a priori la position de cette courbe.

On va faire correspondre à chaque points x^m de Γ^m un points $x^{m+1} = X_m^{m+1}(x^m)$ de Γ^{m+1} .

1. Discrétisation par la méthode d'Euler explicite,

On a en première approximation, les points de Γ^m sont connectés à la vitesse \mathbf{u}^m . Ceci revient à dire que

$$x^{m+1} = x^m + \tau \mathbf{u}^m(x^m). \quad (23)$$

2. Discrétisation par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (ou méthode de Heunn),

On utilise ici la même méthode que celle utilisée dans la discrétisation temporelle de X_{m+1} donnée ci-dessus. On obtient alors,

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{u}^m, \\ k_2 = (2\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}) \circ (I_d + \tau k_1), \\ X_m^{m+1} = I_d + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) + O(\tau^3). \end{cases} \quad (24)$$

Remarque 4.2 Ces deux discrétisations donnent une idée de la discrétisation de (15) pour la convection générale du maillage.

En effet, si on effectue un schéma d'Euler explicite pour la convection du maillage, il faudra choisir la vitesse imposée sur l'interface comme étant la différence entre les positions au temps t et au temps $t + \tau$ divisée par τ . On aura ainsi un déplacement de l'interface qui sera d'ordre 2.

Le déplacement global du maillage n'a quand à lui pas de réelle importance, car il est seulement nécessaire qu'il suive l'interface et qu'il reste dans le domaine Ω .

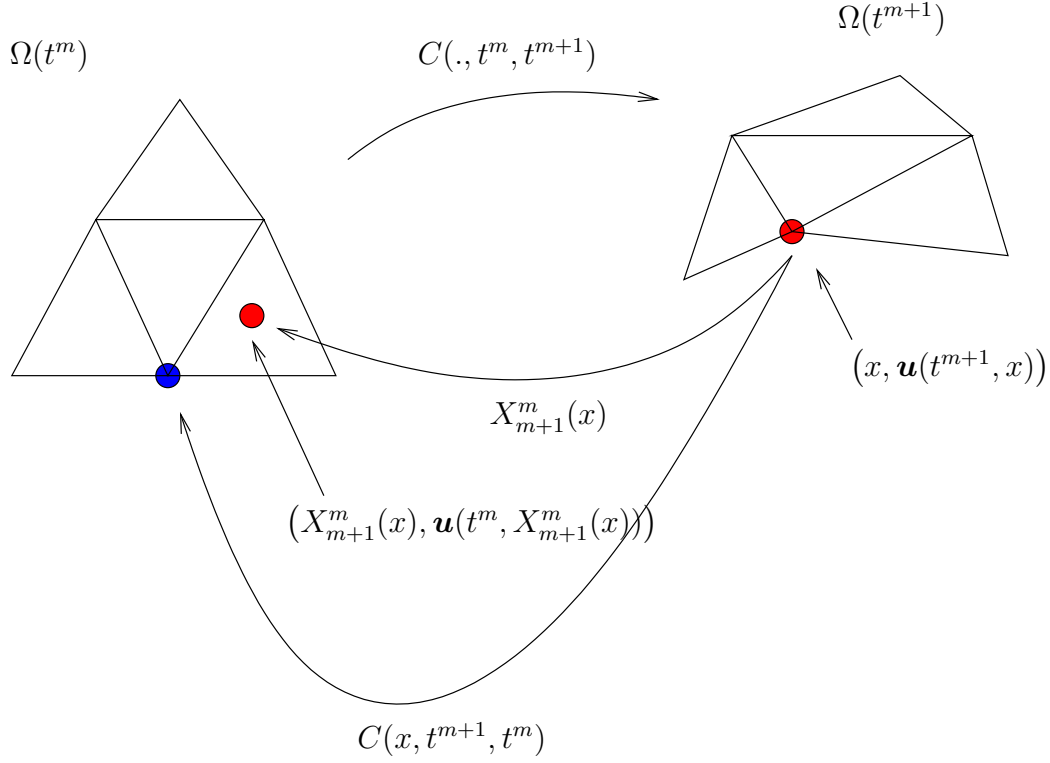


FIG. 2 – Passage d'un domaine vers un autre avec déformation "A.L.E." du maillage.

4.2.2 Avec la méthode "A.L.E."

Remarque 4.3 Pour un point x de Γ^{m+1} , les points $X^m(x)$ et $C(x, t^{m+1}, t^m)$ coïncident et sont sur Γ^m (par définition de C et de la dynamique de Γ).

De la figure Fig. 2, on peut récrire avec le schéma d'Euler implicite la dérivée totale en temps de \mathbf{u} comme suit,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (t^{m+1}) = \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m \circ C(., t^{m+1}, t^m)}{\tau} + \frac{\mathbf{u}^m \circ C(., t^{m+1}, t^m) - \mathbf{u}^m \circ X^m}{\tau} + O(\tau). \quad (25)$$

4.3 Déplacement général du maillage, discrétisation de l'équation de convection du maillage

On utilise les mêmes notations pour C que celles introduites pour X .

Étant donné les choix effectués précédemment (approximation de Γ^{m+1} au temps t^m), on peut facilement utiliser la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2. On a alors,

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{c}^m, \\ k_2 = \mathbf{c}^{m+1} \circ (I_d + \tau k_1), \\ \mathbf{C}_m^{m+1} = I_d + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) + O(\tau^3). \end{cases}$$

D'où,

$$\mathbf{C}_m^{m+1} = I_d + \frac{\tau}{2}(\mathbf{c}^m + \mathbf{c}^{m+1} \circ (I_d + \tau \mathbf{c}^m)) + O(\tau^3). \quad (26)$$

Remarque 4.4 *Étant donnée la convection de Γ^m , utilisé pour le calcul de \mathbf{u}^{m+1} , on obtient une approximation de \mathbf{c}^{m+1} .*

Cette méthode revient à faire une itération lors de la recherche d'un point fixe.

4.4 Discrétisation en espace

Comme cité précédemment, on va résoudre le problème par la méthode de Galerkin basée sur les éléments finis. On se donne en tout temps t^m une triangulation \mathcal{T}_h^m de l'espace Ω_h^m (espace discrétisé de Ω). Afin de respecter la condition de compatibilité pour la résolution numérique de l'équation Stoke, on discrétise \mathbf{u} dans les espace des éléments finis P_2 -Lagrange et p dans l'espace des éléments finis P_1 -Lagrange. ζ_h^m est recherchée dans l'espace des éléments finis P_1 -Lagrange basés sur Γ_h^m .

Remarque 4.5 *On ne s'étendra pas beaucoup sur la méthode des éléments finis car cette méthode est déjà implémentée dans la librairie `Rheolef` [3] qui sera utilisée pour les simulations numériques.*

On note \mathbf{u}_h^m (respectivement p_h^m et ζ_h^{m+1}) la discrétisation spatiale de \mathbf{u}^m (respectivement p^m et ζ^{m+1}). Du problème (20) on obtient le problème discrétisé en temps,

$$\begin{aligned} &\text{Étant donné } \mathbf{u}_h^m \in V_{2,h}^{\mathbf{u}_0,m}, \\ &\text{trouver } (\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}, \zeta_h^{m+1}) \in V_{2,h}^{\mathbf{u}_0,m+1} \times (V_{1,h}^{m+1} \cap L_0^2(\Omega_h^{m+1})) \times V_{1,h,\Gamma}^{m+1}, \\ &\text{tel que } \forall (\mathbf{v}_h, q_h, \varphi_h) \in V_{2,h}^{0,m+1} \times V_{1,h}^{m+1} \times V_{1,h,\Gamma}^{m+1}, \\ &\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega + \lambda \langle \mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma^{m+1}} + \\ \quad + \tau (a(\mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h^{m+1}) - c(\zeta_h^{m+1}, \mathbf{v}_h)) = \langle \mathbf{u}_h^m \circ X_{m+1}^m, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega + \lambda \langle \mathbf{u}_h^m \circ X_{m+1}^m, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma^m}, \\ \quad \quad \quad b(\mathbf{u}_h^{m+1}, q_h) = 0, \\ \quad \quad \quad d(\mathbf{u}_h^{m+1}, \varphi_h) = 0, \end{array} \right. \end{aligned} \tag{27}$$

En définissant les espaces suivants,

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{2,h}^m \text{ l'espace des fonctions continues polynomiales de degré 2 par morceaux, les morceaux étant les triangles de } \mathcal{T}_h^m, \\ V_{2,h}^{\mathbf{u}_0,m} = V_{\Omega_h^m}^{\mathbf{u}_0} \cap H^{\frac{1}{2}}(\Omega_h^m, \mathbb{R}^2) \cap V_{2,h}^m, \\ V_{1,h}^m \subset L_0^2(\Omega_h^m) \text{ l'ensemble des fonctions et polynomiales de degré 1 par morceaux (morceaux basés sur les nœuds de } \\ \quad \mathcal{T}_h^m \text{ continues sur } \Omega_h/\Gamma_h^m), \\ V_{1,h,\Gamma}^m \subset L^2(\Gamma_h^m) \text{ l'ensemble des fonctions continues polynomiales de degré 1 par morceaux (les morceaux étant les } \\ \quad \text{arrêtes de } \mathcal{T}_h^m \text{ sur } \Gamma_h^m). \end{array} \right.$$

On remarque que si il y a N_n nœuds, dont $N_{n,\Gamma}$ sont sur Γ_h , et N_a arêtes, dont $N_{a,\Gamma}$ sont sur Γ_h , alors $V_{1,h}$ (respectivement $V_{2,h}$ et $V_{1,h,\Gamma}$) est de dimension $N_n + N_{n,\Gamma}$ (respectivement $N_n + N_a$ et $N_{n,\Gamma}$).

On note alors φ_i^m (respectivement ψ_i^m et z_i^m) les fonctions de bases de $V_{2,h}^m$ (respectivement $V_{1,h}^m$ et $V_{1,h,\Gamma}^m$).

On écrit alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sum_{i=1}^{N_n+N_a} v_i \varphi_i^m, \quad \forall v \in V_{2,h}^m, \\ q = \sum_{i=1}^{N_n+N_{n,\Gamma}} q_i \psi_i^m, \quad \forall q \in V_{1,h}^m, \\ \varphi = \sum_{i=1}^{N_{n,\Gamma}} \varphi_i z_i^m, \quad \forall \varphi \in V_{1,h,\Gamma}^m. \end{array} \right.$$

On suppose que les $N_{n,\Gamma} + N_{a,\Gamma}$ premières fonctions de base φ_i^m sont non identiquement nulles sur Γ_h^m . Numériquement, on ne tient pas compte des conditions aux limites de Dirichlet sur les inconnues, ces conditions sont ensuite imposées directement dans l'écriture matricielle.

Comme on a obtenu des formes bilinéaires, on peut représenter le système (27) de manière matricielle (en considérant les formes exprimées sur dans les bases $\{\varphi^m\}_i$, $\{\psi^m\}_i$ et $\{z^m\}_i$).

On note alors,

$$\left\{ \begin{array}{ll} M^m \in \mathcal{M}_{2(N_n+N_a)}(\mathbb{R}), & \text{la matrice de masse liée au fluide,} \\ M_\Gamma^m \in \mathcal{M}_{2(N_n+N_a)}(\mathbb{R}), & \text{la matrice de masse liée au fil,} \\ A^m \in \mathcal{M}_{2(N_n+N_a)}(\mathbb{R}), & \text{la matrice liée à la forme } a \text{ du problème variationnel,} \\ B^m \in \mathcal{M}_{2(N_n+N_a), N_n+N_{n,\Gamma}}(\mathbb{R}), & \text{la matrice liée à la forme } b \text{ du problème variationnel,} \\ C^m \in \mathcal{M}_{2(N_n+N_a), N_{n,\Gamma}}(\mathbb{R}), & \text{la matrice liée à la forme } c \text{ du problème variationnel,} \\ F^m \in \mathbb{R}^{2(N_n+N_a)}, & \text{le vecteur correspondant au second membre de Navier-Stokes.} \end{array} \right.$$

On a donc avec les conditions aux limites (sans changer les noms des matrices) le système matriciel associé au système (27),

$$\begin{pmatrix} M^{m+1} + \lambda M_\Gamma^{m+1} & B^{m+1} & C^{m+1} \\ B^{m+1T} & 0 & 0 \\ C^{m+1T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{m+1} \\ P^{m+1} \\ Z^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

4.4.1 Méthode du Lagrangien augmenté

Cette méthode est décrite dans [5].

Le problème (28) est équivalent au problème d'optimisation suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } U \text{ tel que,} \\ \left\{ \begin{array}{l} J(U) \leq J(V), \quad \forall V \in \text{Ker } D, \\ U \in \text{Ker } D, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (29)$$

avec,

$$D = (B^{m+1} \quad C^{m+1})^T$$

et

$$J(U) = U^T (M^{m+1} + \lambda M_\Gamma^{m+1}) U + F^m U.$$

Le problème (??) est un problème d'optimisation sous contrainte linéaire, on utilise donc classiquement la méthode du lagrangien. On définit alors la fonction,

$$\mathcal{L}(V, Q) = J(V) + Q^T D V,$$

et on introduit la fonction du lagrangien augmenté (qui est une régularisation du lagrangien),

$$\mathcal{L}_r(V, Q) = \mathcal{L}(V, Q) + \frac{r}{2}|DV|^2, \text{ pour } r > 0.$$

La solution du problème (??) est un point selle de \mathcal{L} (il n'y a pas nécessairement unicité du point selle de \mathcal{L}) et lorsque l'on fait tendre r vers $+\infty$ dans \mathcal{L} , on obtient un unique point selle qui est la solution de (??).

On se définit alors l'algorithme d'Uzawa suivant,

Algorithme 4.1

1. on se donne arbitrairement un point initial P_0 ,

2. pour P_n connu,

(a) on calcule U_n en résolvant

$$\mathcal{L}_r(U_n, P_n) \leq \mathcal{L}_r(V, P_n), \forall V,$$

(b) on calcule le point suivant P_{n+1} par la formule,

$$P_{n+1} = P_n + \rho_n DU_n, \rho_n > 0,$$

Remarque 4.6 Cet algorithme est un algorithme de descente par gradient sur la fonction duale de J .

On a pour cet algorithme le théorème de convergence suivant,

Théorème 4.1 Pour $0 < \rho_n \leq 2r$ et pour tout P_0 , la suite U^n définie par l'algorithme (??) converge vers la solution U du problème (??).

On a en fait pour ce théorème un résultat plus fort sur le choix du domaine de ρ ,

$$0 < \rho_n < 2 \left(r + \frac{1}{\beta^2} \right), \quad (30)$$

avec,

$$\beta^2 = \max_{v \neq 0} \left(\frac{|Dv|^2}{v^T (M^{m+1} + \lambda M_\Gamma^{m+1}) v} \right).$$

Choix optimal pour r et ρ_n ,

4.5 Calcul numérique des grandeurs géométriques

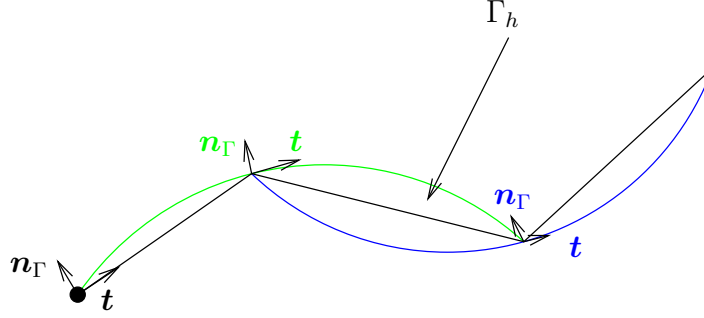
On se pose ici la question du calcul des normales, tangentes et courbures sur Γ_h . En effet, étant donné notre espace de discrétisation, nous ne sommes plus conforme aux hypothèses faites sur ces grandeurs (notamment la continuité de \mathbf{n}_Γ car une dérivation directe nous amènerait dans l'espace des distributions. Il convient donc de "régulariser" la courbe Γ_h .

Pratiquement, on fait une interpolation de la courbe par une spline d'ordre 2, on considère donc la spline continue d'ordre 2, elle est définie en un point intérieur p du maillage de Γ_h par le polynôme de degré 2 passant par les deux points voisins de p . Aux extrémités de Γ_h la normale est définie comme étant orthogonale au premier (ou dernier) segment du maillage de manière à ce que l'angle formé entre le point extrême et son voisin soit inférieur en valeur absolue à π et la tangente est supposée colinéaire au premier (ou dernier segment) et orientée dans le sens des abscisses curvilignes croissantes.

On peut donc définir la courbure avec la relation,

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = c\mathbf{n}_\Gamma.$$

On a représenté sur la figure Fig. ?? les choix faits ci-dessus.

FIG. 3 – Grandeurs géométriques liées à Γ_h .

Remarque 4.7 La normale n'est bien définie qu'aux nœuds du maillage de Γ_h or nous avons besoin de connaître la courbure de Γ sur chacun des segments, car cette grandeur intervient dans le calcul de la forme c (ou de la matrice C définie dans le problème (28)).

Pour le calcul de la courbure, on peut la calculer facilement en chaque points du maillage de Γ , puis interpoler linéairement les courbures calculées en chacun des points.

4.6 Algorithme général

De ce qui précède, nous pouvons en déduire l'algorithme suivant,

Algorithme 4.2

1. initialisation, choix de \mathbf{u}_h^0 , Γ_h^0 et d'un maillage initial, conditions initiales (3),
2. boucle, pour \mathbf{u}_h^m , Γ_h^m et un maillage au temps donnés au temps t^m ,
 - (a) calcul par le schéma de Runge-Kutta de la position au temps t^{m+1} de l'interface, équation (24),
 - (b) déplacement du maillage par la méthode A.L.E., sous-section (??),
 - (c) discrétisation par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 de X_{m+1} , équation (22),
 - (d) calcul des matrices du système discrétisé en espace, le vecteur correspondant au membre de droite est calculé avec les matrices de masse calculées au temps t^m (car on suppose que l'on a une meilleur connaissance de Γ^n que de Γ^{n+1} , il faut donc projeter les fonctions tests pour le temps t^{m+1} du maillage calculé par la méthode A.L.E. sur le maillage précédent.
 - (e) calcul des grandeurs au temps t^{m+1} avec la méthode du lagrangien augmenté, algorithme (??),
 - (f) remaillage du domaine,
 - (g) projection des grandeurs nouvellement calculées sur le nouveau domaine.

5 Mise en œuvre Numérique

5.1 Environnement de travail et outils numériques

Pour la simulation, le langage de programmation utilisé a été C++. La librairie `Rheolef` [3] a été développée par P. Saramito, J. Etienne et N. Roquet. Cette librairie numérique est particulièrement bien adaptée pour le remaillage d'un domaine. Le maillage utilisé a été `bamg` [?], maillage développé par un projet de l'I.N.R.I.A.. L'outil principal de visualisation est `plotmtv` [?], basé sur le logiciel `Image Magic`.

5.2 Librairie Rheolef

Références

- [1] M. ARGENTINA, L. MAHADEVAN *Fluid-flow-induced flutter of a flag*
20 Février 2004
- [2] I. CANTAT *Dynamique des vésicules en adhésion*
Thèse, 27 Septembre 1999
- [3] J. ETIENNE, N. ROQUET, P. SARAMITO
<http://ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/rheolef/>
- [4] B. MAURY *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes 2D et 3D avec surface libre par une méthode Euler-Lagrange arbitraire*
Thèse, 12 Décembre 1995
- [5] M. FORTIN, R. GLOWINSKI *Augmented lagrangien methods : Application to the numerical solution of boundary-value problems*
Studies in mathematics and its applications, Volume 15, 1983
- [6] J. ZANG, S. CHILDRESS, A. LIBCHABERT, M. SHELLEY *Flexible filament in a flowing soap film as model for one-dimensional flag in a two dimensional wind*
Nature, Volume 408, 14 Décembre 2000
- [7] bamg
- [8] plotmtv