

Méthodes mathématiques pour les écoulements sur des surfaces

par Lara Abouorm
stage de master 2
université Joseph Fourier
laboratoire Jean Kuntzman
présenté pour l'obtention du grade :
Master recherche mathématiques appliquées

21 juin 2010

Responsables de stage :

Responsable du master :Éric Bonnetier

Responsable du stage : Pierre Saramito

Jocelyn Etienne

Remerciements

Le bon déroulement de ce stage de master est en grande partie imputable à Pierre Saramito et Jocelyn Etienne. Je les remercie du fond du coeur, aussi pour avoir dirigé mes travaux avec talent et me guider pour bénéficier de leur expérience et leur soutien.

Je remercie aussi Éric Bonnetier pour la confiance qu'il m'a témoigné en m'acceptant dans ce master. Je le remercie du fond du coeur pour ses conseils ainsi que son encouragement continu.

Malgré la courte durée de stage, faire partie du laboratoire LJK est un avantage. J'ai gagné une nouvelle famille qui a participé mon quotidien au rez de chaussée. Je leur souhaite une bonne chance dans leurs stages.

Je n'oublie jamais ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots, qui m'ont encouragé à voyager, qui ont payé beaucoup pour que je puisse étudier en France : Je pense à vous mes chers parents et mes soeurs.

Je termine enfin par celui que je ne trouve aucun mot pour lui exprimer mes remerciements, celui que j'adore tout au long de ma vie, mon fiancé au Liban, qui a supporté les distances, pour que je réalise mon rêve : continuer mes études supérieures. Ton encouragement et ton soutien n'a jamais fait défaut.

Résumé :

Le sujet de ce mémoire est de mettre en oeuvre une nouvelle méthode de discrétisation des équations elliptiques sur les surfaces. L'idée générale est d'utiliser de nouveaux espaces d'éléments qui sont induits par intersection de l'isosurface d'une fonction et d'un maillage du volume.

Cette méthode est adaptée pour les problèmes où sont combinés des EDP écrites sur une surface et sur un volume avoisinants.

On développe une méthode d'éléments finis sur la surface et on réalise des expériences numériques qui confirment la convergence optimale de cette méthode en norme H^1 et L^2 .

Mots clés : surface, interface, élément finis, méthode de "level set", écoulement biphasique.

Abstract :

The objective of this memory is to implement a new approach for the discretisation of elliptic partial differential equation on surface. The general idea is to use new finite elements spaces induced by intersection of the isosurface of a function and the mesh of volume. This method is suitable for problems in which there is coupling between PDEs on a surface and on a neighbouring volume. We develop the finite element method on the surface and we realise numerical experiments that confirm the convergence of this method both in the H^1 and the L^2 norm.

Key words. Surface, interface, finite element, level set method, two-phase flow.

Liste des symboles

- $\Lambda \subset R^d, d = 2, 3$ borné polygonal
 Λ_h : maillage de Γ
 ϕ : fonction de niveau, définie sur Λ
 X_h : espace des fonctions continues et affines sur Λ_h
 ϕ_h : interpolée de Lagrange de ϕ dans X_h
 $\Gamma = \{x \in \Lambda / \phi(x) = 0\}$: surface
 $\Gamma_h = \{x \in \Lambda / \phi_h(x) = 0\}$: surface approchée.
 $\beta_h = \{K \in \Lambda_h / K \cap \Gamma_h \neq \emptyset\}$
 B_h : espace des fonctions continues et affines par morceaux sur β_h
 V_h : l'espace des restrictions à Γ_h des fonctions de B_h
 W_h : l'espace des fonctions continues et affines par morceaux sur Γ_h

Table des matières

1	Introduction	7
2	Développement de la méthode des éléments finis pour Laplace-Beltrami	11
2.1	Présentation générale du problème	11
2.2	Discrétisation Γ_h de la surface Γ	11
2.3	Implémentation de la méthode des éléments finis	13
2.4	Construction géométrique de la bande du maillage	15
2.4.1	En dimension 2	15
2.4.2	En dimension 3	16
2.5	Calcul de la matrice de rigidité A	18
2.5.1	En dimension 2	18
2.5.2	Dimension 3	20
2.6	Calcul de la matrice de masse	23
2.6.1	En dimension 2 :	23
2.6.2	En dimension 3, cas où l'intersection est un triangle . .	23
2.6.3	En dimension 3, Cas où l'intersection est un quadrilatère :	25
2.7	Analyse théorique des erreurs de discrétisation	27
3	Résultats des expériences numériques	28
3.1	Exemple en dimension 2	28
3.2	Exemple en dimension 3	29

Table des figures

1	maillage régulier d'une surface sphérique	10
2	maillage d'une surface Γ_h donnée par une fonction level set ϕ_h montrant la présence des triangles détériorés	10
3	Un maillage Λ_h d'un domaine $\Omega \subseteq R^3$, formé de plusieurs tétraèdres	13
4	Le maillage de la bande β_h ainsi que le maillage de la courbe Γ_h	16
5	Les segments planaires d'intersection de ϕ avec les maillages triangulaires (a) et tétraédriques (b,c).	18
6	formule de simpson utilisée pour calculer la matrice de masse en dimension 2	24
7	la formule des milieux des arêtes appliquée en dimension 3 dans le cas où l'intersection entre le maillage β_h et Γ_h est un triangle(a) ou tétraèdre(b)	25
8	variation de l'erreur de discrétisation en dimension 2 montrant une convergence d'ordre h en semi norme $ \cdot _{H^1}$ et en norme $\ \cdot\ _{L^2}$	29
9	variation de l'erreur de discrétisation en dimension 3 montrant une convergence d'ordre h en semi norme $ \cdot _{H^1}$ et en norme $\ \cdot\ _{L^2}$ (a), Les lignes de niveau de la solution discrétisée u_h (b)	31

1 Introduction

Les surfaces en mouvement et les interfaces apparaissent dans beaucoup de phénomènes physiques comme l'écoulement polyphasique et l'écoulement sur une surface libre. Les surfaces considérées peuvent être l'interface entre deux phases (liquides et gaz) par exemple, être des films (film liquide des bulles de savon) ou des membranes fluides (la membrane d'une globule rouge). Ces modèles mathématiques, apparaissent dans les fluides polyphasiques si on prend en considération la présence des surfactants. La présence de ces surfactants modifie les propriétés de tension de l'interface entre eau et air. Lorsque la concentration des surfactants n'est pas uniforme, ils se diffusent sur la surface et nous étudions alors les équations de diffusion-advection sur les surfaces. Ce gradient de tension interfaciale provoque un mouvement spontané des fluides adjacents : c'est l'effet "Marangoni" qui permet par exemple à un morceau de papier flottant sur l'eau, avec une goutte de savon au bout d'avancer tout seul [1], [2]. Les simulations numériques jouent un rôle important pour la modélisation des processus qui décrivent les phénomènes sur les surfaces. Dans les modèles mathématiques, les équations des surfaces sont couplées avec d'autres équations formulées dans un domaine fixe qui contient la surface. Une méthode des éléments finis connue pour la résolution des équations elliptiques sur les surfaces est introduite dans le papier [3], elle consiste à approcher les surfaces Γ par une surface polygonale continue par morceaux et utiliser des espaces des éléments finis définis sur une triangulation de la surface discrétisée voir fig 1. Cette méthode a un ordre optimal de convergence en norme L^2 voir [3, page 12]. Mais elle n'est que pour des surfaces de formes géométriques déterminées. Si la surface change en forme au cours du temps, cette approche nécessite des triangulations et des espaces d'éléments finis dépendants du temps. Une autre approche est récemment introduite dans [4]. Cette méthode est appliquée aux cas où la surface approchée Γ_h est donnée directement par une fonction level set ϕ_h . Son idée générale est de résoudre l'équation aux dérivées partielles sur un espace d'éléments finis qui est l'espace des fonctions continues et affines par morceaux sur Γ_h . Cette méthode est convenable pour des surfaces Γ de formes géométriques quelconques. Mais les analyses théoriques n'assurent pas toujours la convergence de cette méthode du fait de la qualité du maillage induit voir fig 2.

Dans l'article [5] les auteurs introduisent une nouvelle technique pour la résolution d'une équation elliptique posée sur une surface c'est d'utiliser des espaces d'éléments finis induits par triangulation d'un domaine extérieur pour discrétiser l'équation aux dérivées partielles. La surface est décrite implicitement par une fonction level set et elle est couplée avec un problème d'écoulement sur un domaine extérieur fixe. On utilise des espaces des élé-

ments finis pour la discrétisation, indépendants du temps, induits par triangulation du domaine fixe Γ , obtenus par intersection de l'isosurface et du maillage du volume. On confirme par des expériences numériques que cette méthode a un ordre optimal de convergence pour les normes L^2 et H^1 . L'analyse numérique nécessite une régularité en forme des éléments K du maillage Λ_h voir figure 2 alors qu'elle ne nécessite pas une régularité des éléments k du sous ensemble du maillage Λ_h qui intersectent la surface voir figure 3 . Toutes ces propriétés rendent cette méthode attractive du point de vue théorique et pratique. Notre objectif primaire est de résoudre des équations des fluides sur des surfaces libres et implicites, cette méthode est aussi adaptée pour les problèmes où les surfaces sont explicites.

Ce travail est organisé comme suit. Dans le deuxième chapitre on présente la méthode des éléments finis pour l'exemple de **Laplace-Beltrami**. Dans le troisième chapitre on présente les résultats des expériences numériques qui confirment les analyses théoriques.

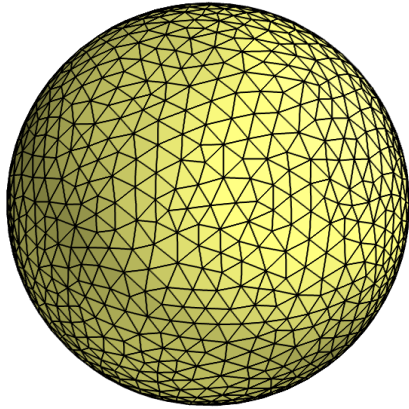


FIG. 1 – maillage régulier d'une surface sphérique

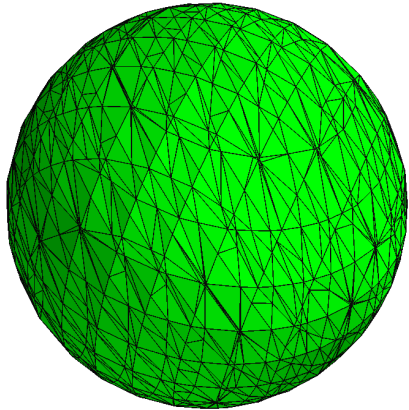


FIG. 2 – maillage d'une surface Γ_h donnée par une fonction level set ϕ_h montrant la présence des triangles détériorés

2 Développement de la méthode des éléments finis pour Laplace-Beltrami

2.1 Présentation générale du problème

Dans les applications, la méthode des éléments finis utilisée dans cette section est en particulier convenable pour la discrétisation des équations elliptiques sur une isosurface $\Gamma = \Gamma(t)$, *sans bords* ($\partial\Gamma = 0$) Mais on se concentre dans notre travail sur des surfaces indépendantes du temps (fixes)

On prend en considération que le domaine Λ est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et Γ est une surface connexe, compacte et de classe C^2 contenue dans Λ . On définit pour toute fonction $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ la dérivée tangentielle le long de Γ par :

$$\nabla_{\Gamma} g = \nabla g - (\nabla g \cdot n_{\Gamma}) n_{\Gamma} \quad (1)$$

où n_{Γ} est la normale extérieure sur la surface Γ .

L'équation posée sur la surface est donnée par :

$$u - \Delta_{\Gamma} u = f \quad \text{pour } f \in L^2(\Gamma) \quad (2)$$

avec Δ_{Γ} est l'opérateur de Laplace Beltrami sur Γ . On considère le problème de Laplace Beltrami dans sa forme faible : pour un certain $f \in L^2(\Gamma)$ déterminer $u \in H^1(\Gamma)$ tel que :

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} v + \int_{\Gamma} u v ds = \int_{\Gamma} f v ds \quad v \in H^1(\Gamma) \quad (3)$$

La solution u est unique et satisfait $u \in H^2(\Gamma)$ avec $\|u\|_{H^2(\Gamma)} \leq c \|f\|_{L^2(\Gamma)}$ et la constante c est indépendante de f d'après [3]

2.2 Discrétisation Γ_h de la surface Γ

Pour la discrétisation de ce problème on a besoin d'une approximation Γ_h de Γ . Soit ϕ une fonction continue dans Λ . On pose :

$$\Gamma = \{x \in \Lambda / \phi(x) = 0\} \quad (4)$$

Soit $\{\tau_h\}_{h>0}$ la famille des triangulations de Λ . Ces triangulations doivent être constantes, régulières et stables. Soit ϕ_h une approximation continue et linéaire par morceaux sur une triangulation τ_h . Alors on introduit Γ_h , l'approximation de Γ définie par :

$$\Gamma_h = \{x \in \Lambda / \phi_h(x) = 0\} \quad (5)$$

Il est important de noter que l'approximation Γ_h est fermée sur Γ dans le sens suivant [5] : $dist(\Gamma_h, \Gamma) \leq c_0 h^2$ et $sup_{x \in \Gamma_h} \|n(x) - n_h(x)\| \leq c_0 h$ où n est l'extension de n_Γ sur un voisinage de Γ et n_h la normale unité sur Γ_h . Dans la figure 4 on voit la construction de Γ_h en dimension 2. On utilise un espace d'éléments finis induits par des éléments linéaires et continus sur τ_h . Pour cela, on introduit un sous ensemble de τ_h proche de Γ_h :

$$\beta_h = \bigcup_{K \cap \Gamma_h \neq \emptyset} K$$

et l'espace correspondant :

$$B_h = \{\psi_h \in C(\beta_h), \psi_h|_K \in P_1, \forall K \in \beta_h\} \quad (6)$$

où P_1 est l'espace des polynômes de degré 1. L'espace β_h induit l'espace suivant sur Γ_h :

$$V_h = \{v_h \in H^1(\Gamma_h), \exists \psi_h \in B_h : v_h = \psi_h|_{\Gamma_h}\} \quad (7)$$

Cet espace est alors utilisé pour la discrétisation de Galerkin de (3). Le problème devient :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \nabla_{\Gamma_h} v_h ds_h + \int_{\Gamma_h} u_h v_h ds_h = \int_{\Gamma_h} f_h v_h ds_h \quad \forall v_h \in V_h \quad (8)$$

où f_h est une approximation de f voir [5]. Par le lemme de Lax Milgram, ce problème admet une solution unique u_h

Remarque : la famille des triangulations $\{\tau_h\}_{h>0}$ est régulière en forme voir figure 3 alors que dans les figures obtenues par les expériences numériques, on voit que β_h contient un nombre intéressant des triangles K détériorés à angles très petits. En fait, les triangles voisins peuvent avoir des différents aires voir figure 2. Comme on démontre dans l'article [5] les erreurs de discrétisation sont bornées, si les éléments de τ_h sont régulières en forme même si les éléments K ne sont pas réguliers.

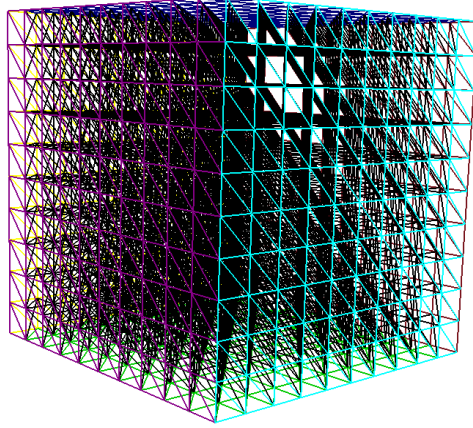


FIG. 3 – Un maillage Λ_h d'un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, formé de plusieurs tétraèdres

2.3 Implémentation de la méthode des éléments finis

Notons que les détails de la méthodes de éléments finis se trouvent dans [6].

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ la collection de tous les sommets des éléments K dans β_h et α_i la base nodale linéaire relative à x_i .

$$\alpha_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Alors V_h est engendré par l'ensemble des restrictions des α_i sur Γ_h pour $1 \leq i \leq m$ où m est le nombre des sommets des éléments K de β_h . Notons que Ces fonctions ne sont pas nécessairement linéairement indépendantes. Dans les calculs on utilise ce système de générateurs formé des bases nodales pour résoudre le problème discret (8). Le problème (8) a une solution pour tout $\int_{\Gamma_h} \phi_h u_h = 0$ d'où $u_h + c \phi_h$ est une solution unique de (8) pour tout $c \in \mathbb{R}$. Le problème (P) est alors :

trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \nabla_{\Gamma_h} v_h ds_h + \int_{\Gamma_h} u_h v_h ds_h = \int_{\Gamma_h} f v_h ds_h \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\int_{\Gamma_h} \phi_h u_h ds_h = 0$$

Pour résoudre (P) on calcule :

$$J(v_h) = \int_{\Gamma_h} |\nabla_s v_h|^2 ds_h - \int_{\Gamma_h} f_h v_h ds_h + \int_{\Gamma_h} u_h^2 ds_h$$

$$L(v_h, \lambda) = \int_{\Gamma_h} |\nabla_s v_h|^2 ds_h + \lambda \int_{\Gamma_h} v \phi_h ds_h - \int_{\Gamma_h} f v_h ds_h$$

avec λ est un multiplicateur de Lagrange.

Puis on trouve le point selle (u_h, λ) tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v}(u_h, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(u_h, \lambda) = 0 \end{cases}$$

On se ramène alors à résoudre le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \nabla_{\Gamma_h} v_h ds_h + \int_{\Gamma_h} u_h v_h ds_h + \lambda \int_{\Gamma_h} \phi_h v_h ds_h = \int_{\Gamma_h} f_h v_h ds_h \\ \int_{\Gamma_h} \phi_h u_h ds_h = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

or f_h est l'interpolé de f sur l'espace V_h et ϕ_h est l'interpolé de ϕ sur l'espace V_h . Donc on obtient :

$$u_h = \sum_{i=1}^m u_{hi} \alpha_i$$

$$v_h = \sum_{j=1}^m v_{hj} \alpha_j$$

$$f_h = \sum_{i=1}^m f_{hi} \alpha_i$$

$$\phi_h = \sum_{i=1}^m \phi_{hi} \alpha_i$$

Le problème (10) devient :

$$\sum_{i=1}^{i=m} u_{hi} \int_{\Gamma_h} \alpha_i \alpha_j ds_h + \sum_{i=1}^{i=m} u_{hi} \int_{\Gamma_h} \nabla_s \alpha_i \nabla_s \alpha_j ds_h + \lambda \sum_{i=1}^m \phi_{hi} \int_{\Gamma_h} \alpha_i \alpha_j ds_h = \sum_{i=1}^m f_{hi} \int_{\Gamma_h} \alpha_i \alpha_j ds_h \quad (10)$$

or $\Gamma_h = \bigcup S$ où S est l'ensemble des segments, triangles ou quadrilatères qui forment Γ_h . Alors on calcule sur chaque élément S les matrices

$$a_S = \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \alpha_i \nabla_{\Gamma_h} \alpha_j ds_h \quad \forall 1 \leq i, j \leq m$$

$$m_S = \int_{\Gamma_h} \alpha_i \alpha_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq m$$

Puis on assemble les matrices a_S et m_S pour obtenir la matrice de masse M et la matrice de rigidité A .

$$A = \sum_{S \in \Gamma_h} a_S$$

$$M = \sum_{S \in \Gamma_h} m_S$$

Les matrices A et M sont carrées de tailles $m \times m$.

En posant $B = m \phi_h$ On aura à résoudre le système linéaire :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M f \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

2.4 Construction géométrique de la bande du maillage

2.4.1 En dimension 2

En dimension 2, le maillage global est un ensemble de triangles. La surface à mailler est donnée par la fonction level set ϕ . Notre but dans la première étape est de déterminer l'ensemble des triangles qui font partie du maillage β_h c'est à dire ceux qui intersectent la surface Γ voir 4. Pour cela, pour chaque triangle K , on calcule la fonction ϕ aux sommets x_0, x_1 et x_2 du triangle.

Si les 3 valeurs de ϕ aux 3 sommets sont de même signe :

$$\phi(x_0) \phi(x_1) > 0$$

$$\phi(x_0) \phi(x_2) > 0$$

on exclut le triangle du maillage.

Si les valeurs de ϕ sont de signes différents sur les 3 sommets du triangle. On note j_0 le sommet de signe différent et j_1, j_2 les 2 autres. L'intersection sera le segment $[a, b]$ voir figure 5.a les coordonnées a et b sont donnés par :

$$a = \theta_1 j_0 + (1 - \theta_1) j_1$$

$$b = \theta_2 j_0 + (1 - \theta_2) j_2$$

$$\theta_1 = \frac{\phi(j_1)}{\phi(j_1) - \phi(j_0)}$$

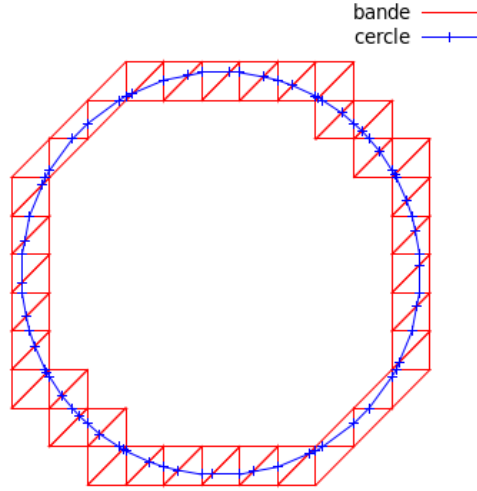


FIG. 4 – Le maillage de la bande β_h ainsi que le maillage de la courbe Γ_h

$$\theta_2 = \frac{\phi(j_2)}{\phi(j_2) - \phi(j_0)}$$

Dans le cas où ϕ s'annule sur un sommet du triangle et ne change pas de signe sur les 2 autres, on exclut le triangle du maillage.

Dans le cas où ϕ s'annule sur deux sommets alors le segment d'intersection sera l'arrête formée par les 2 sommets du triangle.

Dans le cas où ϕ s'annule sur les trois sommets du triangle alors on exclut le triangle du maillage (cas dégénéré).

2.4.2 En dimension 3

On aura à détecter l'ensemble des tétraèdres qui font partie du maillage. Pour chaque tétraèdre T , on calcule la fonction ϕ aux sommets x_0 , x_1 , x_2 et x_4 .

si la fonction ϕ est de même signe sur les 4 sommets :

$$\phi(x_0) \phi(x_1) > 0$$

$$\phi(x_0) \phi(x_2) > 0$$

$$\phi(x_2)\phi(x_3) > 0$$

Alors on exclut le tétraèdre du maillage.

Si les valeurs de ϕ sont de signe différents sur les sommets du tétraèdre alors deux cas se présentent :

cas 1 :

Si la fonction ϕ garde le même signe sur 3 sommets et a un signe différent sur le quatrième alors le sommet de signe différent que les 3 autres est noté j_0 alors que les 3 autres j_0, j_1 et j_2 . Dans ce cas l'intersection est un triangle abc voir fig5.b avec :

$$a = \theta_1 j_0 + (1 - \theta_1) j_1$$

$$b = \theta_2 j_0 + (1 - \theta_2) j_2$$

$$c = \theta_3 j_0 + (1 - \theta_3) j_3$$

$$\theta_1 = \frac{\phi(j_1)}{\phi(j_1) - \phi(j_0)}$$

$$\theta_2 = \frac{\phi(j_2)}{\phi(j_2) - \phi(j_0)}$$

$$\theta_3 = \frac{\phi(j_3)}{\phi(j_3) - \phi(j_0)}$$

Dans le cas où ϕ s'annule sur un sommet ou (sur deux sommets) et garde le même signe sur les trois autres ou (les deux autres) on exclut le tétraèdre du maillage.

Dans le cas où ϕ s'annule sur les trois sommets du tétraèdre, cette face du tétraèdre sera le triangle d'intersection.

Si la fonction ϕ s'annule sur les 4 sommets du tétraèdre alors on exclut le triangle du maillage (cas dégénéré).

cas 2 :

Si la fonction ϕ a un signe négatif sur 2 sommets et un signe positif sur 2 autres alors on retourne un couple de points (q_0, q_1) et (q_2, q_3) .

Dans ce cas l'intersection est un quadrilatère abcd voir fig5.c avec :

$$a = \theta_1 q_0 + (1 - \theta_1) q_2$$

$$b = \theta_2 q_1 + (1 - \theta_2) q_2$$

$$c = \theta_3 q_0 + (1 - \theta_3) q_3$$

$$d = \theta_4 q_1 + (1 - \theta_4) q_3$$

$$\theta_1 = \frac{\phi(q_2)}{\phi(q_2) - \phi(q_0)}$$

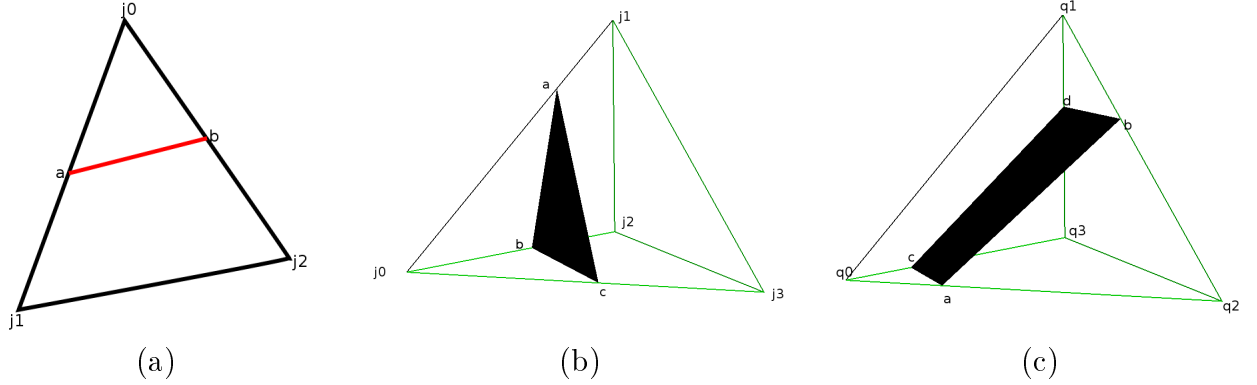


FIG. 5 – Les segments planaires d’intersection de ϕ avec les maillages triangulaires (a) et tétraédriques (b,c).

$$\theta_2 = \frac{\phi(q_2)}{\phi(q_2) - \phi(q_1)}$$

$$\theta_3 = \frac{\phi(q_3)}{\phi(q_3) - \phi(q_0)}$$

$$\theta_4 = \frac{\phi(q_3)}{\phi(q_3) - \phi(q_1)}$$

2.5 Calcul de la matrice de rigidité A

2.5.1 En dimension 2

Sur chaque triangle K faisant partie du maillage induit par triangulation, on calcule la longueur du segment d’intersection $[a, b]$.

$$|S| = \sqrt{(a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2} \quad (12)$$

cas particulier :

Dans des cas particuliers où ϕ s’annule sur deux sommets du triangle on divise la longueur du segment par deux pour ne pas calculer l’intégral deux fois sur l’arrête du triangle.

Les fonctions α_i définies sur l’espace B_h sont des polynômes de degré 1 sur les éléments (K) de β_h . Alors $\nabla\alpha_i$ est constante.

Donc

$$\int_S \nabla\alpha_i \nabla\alpha_j = |S| \nabla\alpha_i \nabla\alpha_j \quad (13)$$

pour chaque triangle K , on doit calculer les gradients sur les 3 sommets du triangle. On utilise alors la technique de triangle de référence. Pour passer du triangle de référence \hat{K} à n'importe quel triangle K on utilise une transformation F :

$$\begin{aligned} \hat{K} &\longrightarrow K : \\ \hat{x} &\longrightarrow x = B \hat{x} + b \end{aligned} \quad (14)$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées des sommets d'indices $i = 0, 1, 2$. Les indices des coordonnées sont numérotés à partir de zero afin de suivre les conventions de la librairie Rheolef [7]

$$b_0 = (x_0, y_0)^T$$

On définit les bases sur le triangle de référence par :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0 &= 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{\alpha}_1 &= \hat{x} \\ \hat{\alpha}_2 &= \hat{y} \end{aligned}$$

Alors les gradients définis sur les sommets du triangle de référence sont :

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\alpha}_0 &= (-1, -1)^T \\ \nabla \hat{\alpha}_1 &= (1, 0)^T \\ \nabla \hat{\alpha}_2 &= (0, 1)^T \end{aligned}$$

Les gradients sur les sommets du triangle d'indices 0 , 1 et 2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \nabla \alpha_0 &= (B^{-1})^T \nabla \hat{\alpha}_0 \\ \nabla \alpha_1 &= (B^{-1})^T \nabla \hat{\alpha}_1 \\ \nabla \alpha_2 &= (B^{-1})^T \nabla \hat{\alpha}_2 \end{aligned}$$

On projette après les gradients pour les transformer en gradient surfaciques. On utilise pour cela la normale n_s définie sur la surface par :

$$n_S = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$$

on definit $\nabla\phi$ par :

$$\nabla\phi = \phi_0 \nabla\alpha_0 + \phi_1 \nabla\alpha_1 + \phi_2 \nabla\alpha_2$$

$$\|\nabla\phi\| = \sqrt{(\nabla\phi)_0^2 + (\nabla\phi)_1^2}$$

$$\nabla_s\alpha_i = (\nabla\alpha_i \cdot n) n \text{ pour } i = 0, 1, 2,$$

$$a_k = |S| \begin{pmatrix} \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Dimension 3

Sur chaque élément K appartenant à β_h on calcule l'aire S de l'élément de surface S par :

$$|S| = \|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\|$$

si S est le triangle abc

$$|S_Q| = \|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\| + \|\vec{bd} \wedge \vec{bc}\|$$

si S est le quadrilatère $abcd$

Cas particulier :

Dans des cas particuliers où ϕ s'annule sur trois sommets du tétraèdre on divise l'aire du triangle (qui est une face du tétraèdre) par deux pour ne pas calculer l'intégral deux fois sur la face. Les fonctions α_i définies sur l'espace B_h sont des polynômes de degré 1 sur les tétraèdres K de β_h . Alors $\nabla\alpha_i$ est

une constante. Alors le gradient sur chaque élément S de Γ_h est :

$$\int_S \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j = |S| \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j \quad (15)$$

Pour chaque tétraèdre K , on devra calculer les gradients sur les quatre sommets du tétraèdre.

On utilise alors la technique de tétraèdre de référence. Pour passer du tétraèdre de référence \hat{K} à n'importe quel tétraèdre K on utilise une transformation F :

$$\begin{aligned} \hat{T} &\longrightarrow T : \\ \hat{x} &\longrightarrow x = B \hat{x} + b \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix}$$

où (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) sont les coordonnées des sommets d'indices respectifs 0, 1, 2 et 3.

$$b_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$$

On définit les bases sur le triangle de référence par :

$$\hat{\alpha}_0 = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{x}$$

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{y}$$

$$\hat{\alpha}_3 = \hat{z}$$

Alors les gradients définis sur les sommets du tétraèdre de référence sont :

$$\nabla \hat{\alpha}_0 = (-1, -1, -1)^T$$

$$\nabla \hat{\alpha}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\nabla \hat{\alpha}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\nabla \hat{\alpha}_3 = (0, 0, 1)^T$$

Les gradients sur les sommets du tétraèdre d'indices 0 , 1 et 2 et 3 sont donnés par :

$$\begin{aligned}\nabla\alpha_0 &= (B^{-1})^T \nabla\hat{\alpha}_0 \\ \nabla\alpha_1 &= (B^{-1})^T \nabla\hat{\alpha}_1 \\ \nabla\alpha_2 &= (B^{-1})^T \nabla\hat{\alpha}_2 \\ \nabla\alpha_3 &= (B^{-1})^T \nabla\hat{\alpha}_3\end{aligned}$$

Pour calculer le gradient surfacique, on calcule la normale sur la bande discrétisée :

$$n_S = \frac{\vec{ab} \wedge \vec{ac}}{\|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\|}$$

Le gradient surfacique de α_i est donné alors par :

$$\nabla_{\Gamma_h}\alpha_i = (\nabla\alpha_i \cdot n) n \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3$$

Donc la matrice A_k sur chaque chaque tétraèdre (T) est :

cas où on a un triangle d'intersection :

$$A_k = |S| \begin{pmatrix} \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \end{pmatrix}$$

cas où on a un quadrilatère d'intersection :

$$A_K = |S| \begin{pmatrix} \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \\ \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_0 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_1 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_2 & \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \nabla_{\Gamma_h}\alpha_3 \end{pmatrix}$$

2.6 Calcul de la matrice de masse

2.6.1 En dimension 2 :

Pour chaque triangle faisant partie du maillage B_h , on doit calculer $\int_S \alpha_i \alpha_j \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$. Pour cela on utilise la formule de Simpson, qui est exacte à l'ordre 2 pour approcher cette intégrale voir figure 6

$$\int_S \alpha_i \alpha_j = \frac{|S|}{6} [\alpha_i(a) \alpha_j(a) + \alpha_i(b) \alpha_j(b) + 4 \alpha_i \alpha_j(c)] \quad (16)$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Pour calculer l'intégrale (16) on utilise le fait que :

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(F^{-1}(\hat{x})) = (\alpha_i \circ F^{-1})(\hat{x}) = \hat{\alpha}_i(\hat{x}).$$

Donc on a à calculer les coordonnées des points \hat{a} , \hat{b} et \hat{c}

$$\hat{a} = B^{-1}(a - b_0)$$

$$\hat{b} = B^{-1}(b - b_0)$$

$$\hat{c} = B^{-1}(c - b_0)$$

Donc la matrice M_k de dimension $(3, 3)$ est donnée par :

$$(M_K(i, j))_{0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2} = \frac{|S|}{6} [\hat{\alpha}_i(\hat{a}) \hat{\alpha}_j(\hat{a}) + 4 \hat{\alpha}_i(\hat{c}) \hat{\alpha}_j(\hat{c}) + \hat{\alpha}_i(\hat{b}) \hat{\alpha}_j(\hat{b})] \quad (17)$$

2.6.2 En dimension 3, cas où l'intersection est un triangle

Pour chaque tétraèdre appartenant à w_h , on doit calculer $\int_S \alpha_i \alpha_j \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ voir figure 7.a. Pour cela on utilise la formule des milieux des arêtes des triangles, qui est exacte à l'ordre 2 pour approcher cette intégrale.

$$\int_S \alpha_i \alpha_j = \frac{|S|}{3} [\alpha_i(d) \alpha_j(d) + \alpha_i(e) \alpha_j(e) + \alpha_i(f) \alpha_j(f)] \quad (18)$$

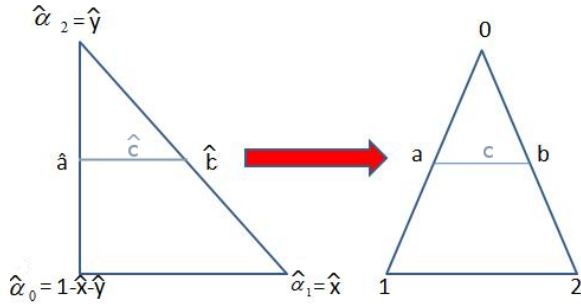


FIG. 6 – formule de simpson utilisée pour calculer la matrice de masse en dimension 2

$$d = \frac{a+b}{2}$$

$$f = \frac{b+c}{2}$$

$$e = \frac{a+c}{2}$$

Pour calculer l'intégrale (18) on utilise le fait que :

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(F^{-1}(\hat{x})) = (\alpha_i \circ F^{-1})(\hat{x}) = \hat{\alpha}_i(\hat{x}).$$

Donc on a à calculer les coordonnées des points \hat{d} , \hat{f} , et \hat{e}

$$\hat{d} = B^{-1}(d - b_0)$$

$$\hat{e} = B^{-1}(e - b_0)$$

$$\hat{f} = B^{-1}(f - b_0)$$

Donc la matrice M_K de dimension $(4, 4)$ est donnée par :

$$(M_K(i, j))_{0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 3} = \frac{|S|}{3} [\hat{\alpha}_i(\hat{d}) \hat{\alpha}_j(\hat{d}) + \hat{\alpha}_i(\hat{e}) \hat{\alpha}_j(\hat{e}) + \hat{\alpha}_i(\hat{f}) \hat{\alpha}_j(\hat{f})]$$

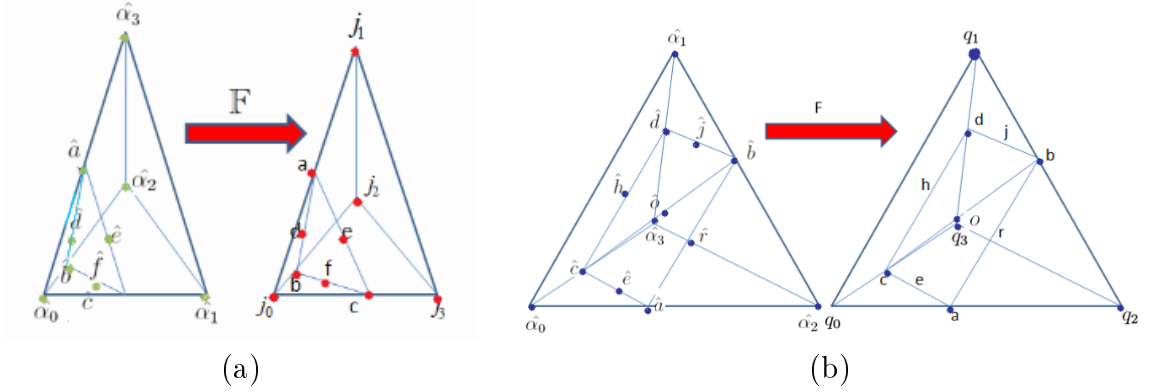


FIG. 7 – la formule des milieux des arrêtes appliquée en dimension 3 dans le cas où l'intersection entre le maillage β_h et Γ_h est un triangle(a) ou tétraèdre(b)

2.6.3 En dimension 3, Cas où l'intersection est un quadrilatère :

Si l'intersection de l'isosurface et du maillage induit est un quadrilatère (abdc) alors on doit intégrer sur deux triangles $S1 = abc$ et $S2 = bdc$ voir figure 7.b

$$\int_S \alpha_i \alpha_j = \frac{|S1|}{3} [\alpha_i(r) \alpha_j(r) + \alpha_i(o) \alpha_j(o) + \alpha_i(e) \alpha_j(e)] + \frac{|S2|}{3} [\alpha_i(h) \alpha_j(h) + \alpha_i(j) \alpha_j(j) + \alpha_i(o) \alpha_j(o)] \quad (21)$$

$$r = \frac{a + b}{2}$$

$$o = \frac{b + c}{2}$$

$$e = \frac{a + c}{2}$$

$$j = \frac{b + d}{2}$$

$$h = \frac{c + d}{2}$$

Pour calculer l'intégrale (21) on utilise le fait que :

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(F^{-1}(\hat{x})) = (\alpha_i \circ F^{-1})(\hat{x}) = \hat{\alpha}_i(\hat{x}). \quad (19)$$

Donc on a à calculer les cordonnées des points \hat{d} , \hat{f} , \hat{e} , \hat{j} et \hat{h}

$$\hat{r} = B^{-1}(r - b_0)$$

$$\hat{o} = B^{-1}(o - b_0)$$

$$\hat{e} = B^{-1}(e - b_0)$$

$$\hat{j} = B^{-1}(j - b_0)$$

$$\hat{h} = B^{-1}(h - b_0)$$

Donc la matrice m_k de dimension $(4, 4)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} M_K(i, j) = & \frac{|S1|}{3} [\hat{\alpha}_i(\hat{d}) \hat{\alpha}_j(\hat{d}) + \hat{\alpha}_i(\hat{e}) \hat{\alpha}_j(\hat{e}) + \hat{\alpha}_i(\hat{f}) \hat{\alpha}_j(\hat{f})] \\ & + \frac{|S2|}{3} [\hat{\alpha}_i(\hat{f}) \hat{\alpha}_j(\hat{f}) + \hat{\alpha}_i(\hat{j}) \hat{\alpha}_j(\hat{j}) + \hat{\alpha}_i(\hat{h}) \hat{\alpha}_j(\hat{h})] \end{aligned}$$

Après le calcul sur chaque triangle où tétraèdres K du maillage des matrices A_K et M_K , on assemble sur le maillage global induit par triangulation ces deux matrices pour obtenir les deux grandes matrices M et A .

Notons que l'assemblage est fait grâce à des techniques de codage disponibles dans Rheolef [7]

2.7 Analyse théorique des erreurs de discrétisation

D'après l'article [5] on a un théorème qui donnent une majoration des erreurs de discrétisation.

Théorème 1

Soit $u \in H^2(\Gamma)$ la solution de (3) et soit $u_h \in V_h$ la solution de (7) avec $\phi_h = \pi_h(\phi)$ où π_h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange. On pose $f_h = \pi_h(f)$.

L'erreur de discrétisation est bornée tel que :

$$\|\nabla_{\Gamma_h}(u - u_h)\|_{H^1(\Gamma_h)} \leq c h \|f\|_{H^1(\Gamma_h)}. \quad (20)$$

$$\|(u - u_h)\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq c h^2 \|f\|_{L^2(\Gamma_h)} \quad (21)$$

avec c est une constante indépendante de f et h .

On remarque que ce résultat est optimal pour l'élément P_1 utilisé. On confirme ces résultats numériquement avec des exemples en 2D et 3D

3 Résultats des expériences numériques

Dans ce chapitre, on présente les résultats des tests numériques et expérimentaux. En particulier, ces tests numériques confirment la convergence d'ordre h pour la semi norme $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$ et une convergence d'ordre L^2 pour la norme $\|\cdot\|_{L_h^2}$.

3.1 Exemple en dimension 2

On commence avec un test de calcul pour un problème de solution connue pour être capable de calculer l'erreur entre la solution exacte et la solution discrète voir [4]

On a à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$-\Delta_\Gamma u + u = f \quad (22)$$

sur la surface

$$\Gamma = \{x \in R^2, |x| = 1\}$$

La fonction "level set" est $\phi(x) = |x| - 1$. On choisit $\Lambda = (-2, 2)^2$ le domaine de calcul qui est triangulisé comme la figure (4). Pour le terme de droite on prend

$$f(x) = 26(x_1^5 - 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4), x \in \Lambda$$

et on l'étend constamment dans la direction normale tel que :

$$f(x) = \frac{26}{|x|^5} (x_1^5 - 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4), x \in \Lambda \setminus \{0\}$$

La fonction

$$u(x) = \frac{1}{|x|^5} \frac{26|x|^2}{|x|^2 + 25} (x_1^5 - 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4)$$

est la solution du problème (22) sur la courbe Γ voir ([4])

La figure (8) montre la variation des erreurs de discrétisation en semi norme $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$ et en $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_h)}$. L'erreur en semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$ est d'ordre h alors qu'elle est d'ordre h^2 en $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_h)}$, ce qui confirme l'optimalité des résultats.

Le tableau suivant montre les valeurs des erreurs en $|\cdot|_{H^1}$ et en $\|\cdot\|_{L^2}$. Ce

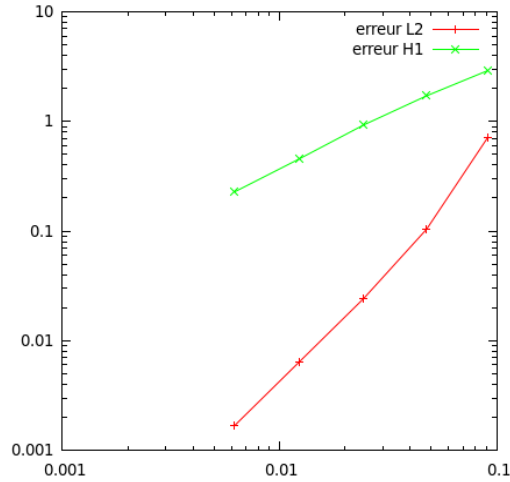


FIG. 8 – variation de l’erreur de discrétisation en dimension 2 montrant une convergence d’ordre h en semi norme $|\cdot|_{H^1}$ et en norme $\|\cdot\|_{L^2}$

tableau confirme d’une part que plus le maillage est fin plus l’erreur de discrétisation est petite et d’autre part que la convergence est plus rapide en $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_h)}$ qu’en $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$.

n	$\ u_h - u\ _{L^2(\Gamma_h)}$	$\ u_h - u\ _{H^1(\Gamma_h)}$
11	7.13×10^{-1}	2.90545
21	2.42×10^{-1}	1.71414
41	1.04×10^{-1}	0.927927
81	6.41×10^{-2}	0.455798
161	1.68×10^{-2}	0.227909

Dans le tableau précédent, n représente le nombre d’arrêtes sur un côté du maillage du carré. Le maillage Λ_h contient au total $2n^2$ éléments.

3.2 Exemple en dimension 3

Dans l’espace de dimension 3, on résout les équations aux dérivées partielles sur les surfaces. La méthode numérique est principalement la même qu’en dimension 2.

Exemple :

On choisit Γ la sphère unité et $\Lambda = (-2, 2)^3$ avec $\phi(x) = |x| - 1$. Pour toute constante a la fonction

$$u(x) = \frac{a|x|^2}{12 + |x|^2} (3x_1^2 x_2 - x_2)^3 \quad x \in \Lambda \setminus \{0\}$$

est une solution exacte du problème continu 2 d'après [4]. Pour le second membre on prend

$$f(x) = a(3x_1^2x_2 - x_2^3), x \in |\Lambda \setminus \{0\}$$

Pour ces calculs on prend $a = \frac{13}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}}$.

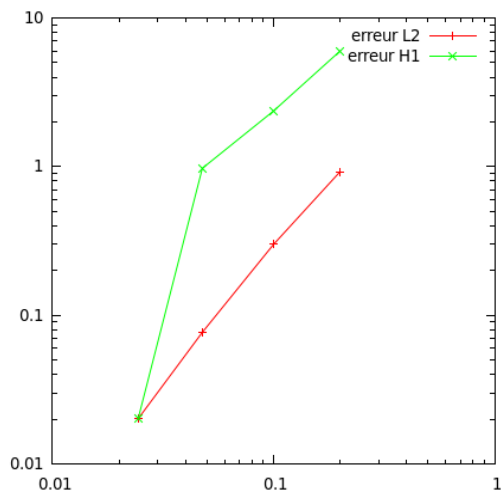
La figure 9 montre la variation des erreurs de discrétisation en semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$ et en $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_h)}$. L'erreur en semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$ est d'ordre h alors qu'elle est d'ordre h^2 en $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_h)}$ ce qui confirme les résultats théoriques prévues en dimension 3.

La figure 9.b montre les lignes de niveau de la solution discrétisée u_h .

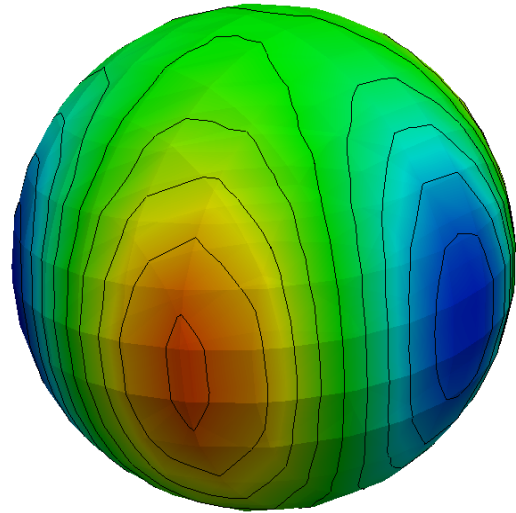
Le tableau suivant montre les valeurs des erreurs en $|\cdot|_{H^1}$ et en $\|\cdot\|_{L^2}$. Ce tableau confirme d'une part que plus le maillage est fin plus l'erreur de discrétisation est petite et d'autre part que la convergence est plus petite en $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_h)}$ qu'en $|\cdot|_{H^1(\Gamma_h)}$. (Les tests avec des gros maillages se sont avérés difficile à cause d'un manque de mémoire en présence d'un grand nombre de tétraèdres)

n	$\ u_h - u\ _{L^2(\Gamma_h)}$	$ u_h - u _{H^1(\Gamma_h)}$
5	0.924277	5.99541
10	0.300067	2.36822
21	0.07684	0.97063
41	0.0201522	0.0201522

Dans le tableau précédent, n représente le nombre d'arrêtes sur un côté du maillage du cube. Le maillage Λ_h contient au total $6n^3$ éléments (voir fig 3).



(a)



(b)

FIG. 9 – variation de l'erreur de discrétisation en dimension 3 montrant une convergence d'ordre h en semi norme $|\cdot|_{H^1}$ et en norme $\|\cdot\|_{L^2}$ (a), Les lignes de niveau de la solution discrétisée u_h (b)

Conclusions et Perspective

Ce travail nous a permis de construire une approximation de la solution d'équations elliptiques posées sur des surfaces. Pour cela, nous avons proposé une mise en oeuvre de la méthode décrite dans un article récent [5]. Cette méthode s'inscrit dans le cadre des éléments finis, et se base non pas sur un maillage direct de la surface mais sur un maillage induit par une triangulation en volume. Elle permet donc d'aborder des géométries complexes sans difficultés de génération de maillage, sans pour autant augmenter le coût de calcul. Surtout, elle permet d'envisager des problèmes où des EDP en surface interagissent avec des EDP en volume. Nous observons un ordre de convergence optimal en semi norme H^1 et en norme L^2 .

Pour ce qui est des perspectives, On peut utiliser cette approche pour mieux appréhender l'adhésion cellulaire. L'appel à des systèmes où les réactions biochimiques (molécules d'adhésion par exemple) et des équilibres des forces mécaniques ont lieu à la fois dans la cellule et dans le milieu extérieur, mais aussi sur la membrane de la cellule. Ce qui nous amène à faire un couplage fort entre les équations écrites "en volume" et équations en "surface", un type de problème que nous pourrions aborder avec la méthode mise en oeuvre dans ce stage.

Références

- [1] A. JAMES and J.LOWENGRUB. A surfactant-conserving volume-of-fluid method for interfacial flows with insoluble surfactant. *Journal of Computational Physics*, 201 :685–722, 2004.
- [2] M. MURANDOGLU and G.TRYGGVASON. Front-tracking method for computation of interfacial flows with soluble surfactant. *Journal of Computational Physics*, 227 :2238–2262, 2008.
- [3] G.DZIUK. An adaptive finite element method for the laplace-beltrami operator on implicitly defined surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*
- [4] G.DZIUK K. DECKELNICK. An h-narrow band finite element method for elliptic equations on implicit surface. *IMA Journal of Numerical Analysis*, to appear, 2009.
- [5] ARNOLD REUSKEN MAXIM A OLSHANSKII and JORG GRANDE. A finite element method for elliptic equations on surface. *SIAM J. Num. Anal.*, 47 :3339–3358, 2009.
- [6] Suzanne C. Brenner L.Ridgway Scott. the mathematical theory of finite element methods.
- [7] N.ROQUET P. SARAMITO and J.ETIENNE. Efficient advanced scientific computing with rheolef.