

Rapport de stage

Modélisation d'une coulée de débris

Antoine DEHARVENG
Polytech Nice Sophia, Mines ParisTech Sophia

Mars-Août 2017

Encadrants :

Pierre Saramito
Directeur de Recherches CNRS
LJK, Grenoble

Claude Smutek
Enseignant chercheur
Université de la Réunion

Olivier OZENDA
Doctorant
LJK, Grenoble



*Je tiens à remercier en premier lieu mes encadrants, Olivier Ozenda et Pierre Saramito, pour leurs conseils avisés
Merci également à Noé Bernabeu, pour le code qu'il m'a fourni, ainsi que pour ses explications bien utiles
Je remercie aussi toute l'équipe du LJK pour leur gentillesse et leur accompagnement.*

Table des matières

1	Introduction	8
2	Modèle Newtonien	9
2.1	Contexte et objectifs	9
2.2	Fonctionnement du modèle	9
2.3	Algorithme	9
2.4	Discussion des résultats	10
3	Le Suspension Balance Model (SBM)	11
3.1	Présentation et objectifs	11
3.2	Description du modèle	11
3.3	Le nouveau modèle réduit	12
3.4	Résolution numérique	12
3.5	Discussion des résultats	15
4	Changement de modèle - Rivière des Remparts	16
4.1	Choix d'un modèle selon la granulométrie	16
5	Modèle de Herschel–Bulkley	17
5.1	Equations	17
5.2	Observations	18
5.3	Analyse des résultats	20
5.4	Limites du modèle	23
6	Conclusion	24
7	Annexe : Changement de variables et analyse asymptotique	25
7.1	Conservation de la masse	26
7.2	Conservation de la quantité de mouvement	26
7.3	Equation constitutive	27
7.4	Conditions aux limites	27
7.5	Récapitulatif	29
7.6	Intégration et obtention du problème en ϕ	29
7.7	Intégration et obtention du problème en h	31
8	Annexe : progression de la coulée au cours du temps	34
	Bibliographie	37

Nomenclature

L	Longueur caractéristique de la coulée
L_{max}	Longueur maximale dans la simulation numérique
H	Hauteur caractéristique de la coulée
$U = \epsilon^3 \frac{\rho g L^2}{\eta_0}$	Vitesse caractéristique de la coulée
$\epsilon = \frac{H}{L}$	Rapport d'aspect
x	Coordonnée horizontale
z	Coordonnée verticale
h	hauteur de la coulée
u	Vitesse
t	temps
Γ_f	Bord du domaine : surface libre (free)
Γ_w	Bord du domaine : mur (wall)
Γ_b	Bord du domaine : fond (bottom)
N	Nombre de couches
σ	Tenseur des contraintes
p	Pression
ρ	Densité
g	Gravité
$Re = \epsilon^3 \frac{\rho^2 g L^3}{\eta_0^2}$	Nombre de Reynolds
ϕ	Fraction volumique
φ	Densité de particules discrétisée en z
η_0	Viscosité du fluide
$\eta_p(\phi), \eta_n(\phi), \eta_s(\phi) = 1 + \eta_p(\phi)$	Fonctions de viscosité
$D(u)$	Taux de déformation
Q	Matrice d'anisotropie
λ_2	Constante de la matrice d'anisotropie
\mathbf{j}	Flux de migration de particules
\hat{M}	Constante relative à la migration des particules
$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$	Coefficients de l'équation en h
$c(z), d(z)$	Coefficients de l'équation en ϕ
\mathcal{A}, \mathcal{F}	Matrice et second membre du système en ϕ
P_p	Pression particulaire au sein de la coulée

1 Introduction

La modélisation des coulées de débris est un travail difficile mais nécessaire dans le cadre de la prévention des risques naturels. En effet, la présence de débris dans une coulée rend son comportement imprévisible.

Les travaux de Morris, Boulay et Miller [5][6] ont permis la mise au point du Suspension Balance Model, qui permet de prédire le comportement d'une coulée de débris à partir de la densité de particules présente dans le fluide. Le résultat est un modèle 3D assez complexe.

Dans le cadre de mon stage, je me suis inspiré de l'approche par analyse asymptotique multi-couches d'Olivier Ozenda sur des coulées de lave [7] pour l'appliquer au Suspension Balance Model. J'ai effectué une réduction du modèle sous une forme exploitable, puis j'ai implémenté le modèle en C++.

Dans ce rapport, nous allons d'abord présenter une résolution d'un problème newtonien via un schéma d'Euler implicite. La méthode obtenue sera par la suite complétée pour correspondre au problème de la coulée de débris. Nous verrons en annexe les calculs permettant de passer du modèle continu au modèle discret. Après cela, nous nous pencherons sur un modèle déjà connu afin d'effectuer des simulations sur une topographie réelle.



FIGURE 1 – Exemple de coulée de débris

2 Modèle Newtonien

2.1 Contexte et objectifs

Dans cette partie, nous allons étudier la résolution par une méthode d'éléments finis d'un problème d'écoulement newtonien unidimensionnel. L'enjeu est d'obtenir un programme précis et rapide pour simuler l'écoulement d'un fluide. Dans un second temps, la structure du programme sera réutilisée pour y ajouter les paramètres de l'écoulement avec suspension.

2.2 Fonctionnement du modèle

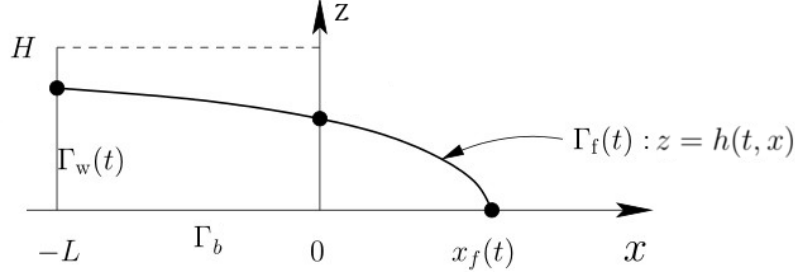


FIGURE 2 – Schéma de la coulée

On cherche à modéliser une coulée en deux dimensions comme sur la figure 2. On symbolise la coulée par sa hauteur. En supposant l'écoulement mince et lent, le problème est le suivant [10] :

(P) Trouver $h : (t, x) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \right) &= 0 && \text{dans }]0, +\infty[\times]-L, +\infty[\\ h(t=0) &= h_0 && \text{dans }]-L, +\infty[\\ \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 && \text{sur }]0, +\infty[\times \{-L, +\infty\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution de la hauteur h en fonction du temps t et d'une direction spatiale x .

2.3 Algorithme

Le problème est discrétisé en temps par un schéma d'Euler implicite. Le sous-problème est résolu par un algorithme de point fixe.

$n = 0 : h_0$ donné
 $n \geq 0 : h_n$ connu, on pose $h_{n+1,k=0} = h_n$
 $| \quad k \geq 0 : h_{n+1,k}$ connu, trouver $h_{n+1,k+1}$ tel que
 $| \quad \frac{h_{n+1,k+1} - h_n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{n+1,k}^3}{3} \frac{\partial h_{n+1,k+1}}{\partial x} \right) = 0$ dans $] -L, +\infty[$
 $| \quad \frac{\partial h_{n+1,k+1}}{\partial x} = 0$ sur $\{-L, +\infty\}$
 $| \quad \text{Si } h_{n+1,k+1} - h_{n+1,k} < \text{seuil alors } n < -n + 1$

À chaque itération de la boucle en k du point fixe, nous avons un problème linéaire dont la formulation variationnelle est :

(FV) Trouver $h_{n+1,k+1}$ défini dans I tel que :

$$\int_I \frac{h_{n+1,k+1} - h_n}{\Delta t} \xi + \int_I \frac{h_{n+1,k}^3}{3} \frac{\partial h_{n+1,k+1}}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

pour toute fonction test ξ définie dans I , où $I =]-L, L_{max}[$ et $L_{max} > 0$ est choisi suffisamment grand. Ce problème est ensuite discrétisé en espace par éléments finis P_1 continus ou discontinus. J'ai utilisé la librairie Rheolef [8],[9] pour l'implémentation numérique.

2.4 Discussion des résultats

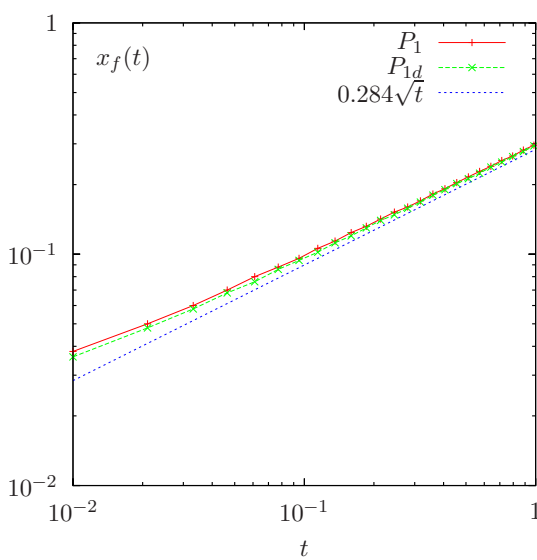


FIGURE 3 – Progression du front

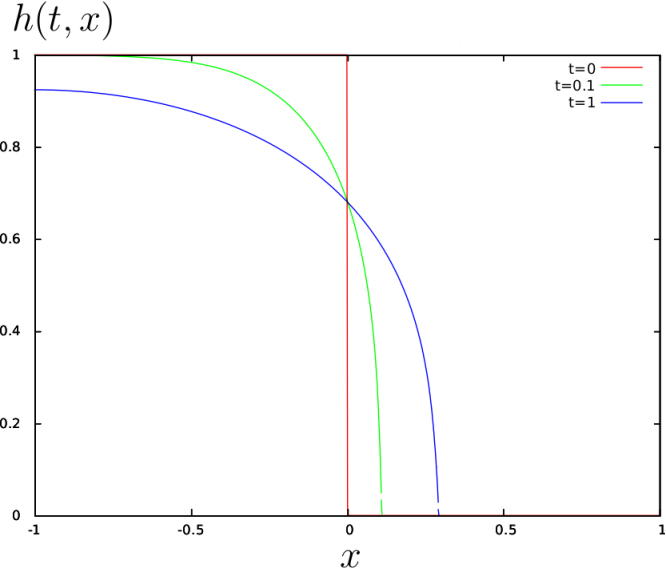


FIGURE 4 – Profil de la coulée pour des éléments P_1D

Le résultat théorique attendu de $0,284\sqrt{t}$ vient de l'article [10]. Lors des tests, j'ai pu observer que l'algorithme de point fixe converge toujours, et le nombre d'itérations ne dépasse pas 100. On a donc une convergence rapide. On remarque sur la figure 3 que la solution est stable relativement à la finesse du maillage, et la position du front ressemble grandement à ce qu'on attend du comportement d'un fluide newtonien. Les légers écarts lors des premiers pas de temps sont de l'ordre de la précision du maillage. La différence entre l'utilisation d'éléments P_1 continus ou discontinus est minime. Sur la figure 4, on peut observer un profil régulier.

Cette méthode de résolution semble donc robuste et précise. Nous allons donc pouvoir la compléter pour traiter des coulées avec suspension.

3 Le Suspension Balance Model (SBM)

3.1 Présentation et objectifs

Nous allons présenter ici un modèle qui prend en compte la présence d'une phase solide en suspension dans la coulée. Cela se traduit par une modification de la viscosité apparente, et donc une modification de l'écoulement.

La rivière des remparts, sur l'île de la Réunion, a connu un glissement de terrain de grande ampleur en 1965. Grâce à des photos, une équipe a pu reconstituer une topographie détaillée de la zone avant et après l'événement [3]. L'objectif final est de comparer les résultats obtenus avec les mesures effectuées sur la rivière des remparts. En utilisant la topographie initiale avec notre algorithme, nous pourrions savoir si la simulation donne des résultats proches du cas réel. Avant de pouvoir tester ce code sur une topographie 3D complexe, nous avons d'abord travaillé sur une topographie 2D linéaire identique à celle utilisée dans le cas newtonien.

3.2 Description du modèle

Nous cherchons à modéliser le comportement d'une coulée avec suspensions. Pour cela, nous utilisons les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (\sigma - pI) = \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

Afin de caractériser un écoulement avec suspension, on emploie le modèle SBM. Le modèle SBM (Suspension Balance Model) est un modèle permettant de décrire le comportement d'un fluide comptant une phase liquide et une phase solide en suspension. Son fonctionnement est décrit dans l'article [6] et complété dans l'article [5]. Nous utilisons donc l'équation caractéristique donnée par l'article de Miller et Morris [5] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.3)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi))D(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}\hat{\eta}_n(\phi)|2D(\mathbf{u})|Q \right] \quad (3.4)$$

$$D(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ D_{xz} & D_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où λ_2 est un paramètre du modèle.

Les conditions nécessaires à la validité du modèle sont les suivantes :

- Une fraction volumique $0,2 \leq \phi \leq 0,5$.
- Un nombre de Reynolds faible.

Ces conditions correspondent à ce qu'on peut observer dans une coulée naturelle. Pour que le modèle soit entièrement valide, nous faisons également l'hypothèse que les particules en suspension ont la même densité que le fluide. Cette hypothèse est physiquement peu réaliste, mais cela simplifie grandement les calculs, et l'influence sur les résultats est négligeable. A partir de ces équations, nous cherchons donc à obtenir un modèle discrétisé en espace et en temps pour décrire le comportement du fluide.

Le problème (3.1) - (3.3) contient trois équations pour les trois inconnues u , p et ϕ . Il doit être complété par des conditions aux limites :

Sur Γ_w et Γ_b :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, x) = 0 & (a) \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0 & (b) \end{cases} \quad (3.5)$$

Sur Γ_f :

$$\begin{cases} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0 & (a) \\ (\sigma - pI) \cdot \mathbf{n} = 0 & (b) \end{cases} \quad (3.6)$$

On complète enfin ce modèle par des conditions initiales h_0 et ϕ_0 .

3.3 Le nouveau modèle réduit

Les calculs détaillant l'analyse asymptotique sont développés en annexe, et permettent d'obtenir le problème qui suit.

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^3}{N^3} \mathcal{B} + \frac{h^2}{N^2} \mathcal{C}(t, x, h) + \mathcal{D}(t, x, h) \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\hat{M} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[-d \frac{\partial \phi}{\partial z} + c \phi \right] \simeq -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \phi) \quad (3.8)$$

Le nouveau problème ressemble beaucoup au problème newtonien, mais on ajoute des coefficients \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} qui dépendent de la densité de particules ϕ . Il est complété par l'équation (3.8) permettant de calculer l'évolution de ϕ au cours du temps en fonction de la hauteur.

3.4 Résolution numérique

Afin de résoudre numériquement ce problème, on doit gérer l'apparition des nouveaux coefficients \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} . Tout d'abord, ϕ n'a pas une valeur uniforme sur toute la hauteur. Pour gérer cette particularité, nous avons choisi un modèle multi-couches. Autrement dit, on ne considère plus le fluide comme un volume simple défini par sa hauteur, mais comme une série de couches interagissant entre elles. Pour cela, nous nous inspirons de la méthode employée dans l'article [7]. On va ainsi pouvoir découpler (3.7) et (3.8), contenant respectivement des dérivées en x et en z .

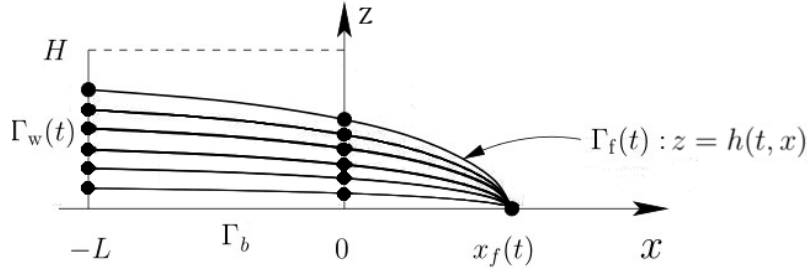


FIGURE 5 – Schéma multi-couches de la coulée

A chaque nœud du maillage, on doit résoudre l'équation (3.8). Sous forme matricielle, on obtient le système suivant :

$$\mathcal{A}\varphi = \mathcal{F}$$

Avec :

$$\varphi = (\phi_{1/2}, \phi_{3/2}, \dots, \phi_{N-1/2})$$

$$\mathcal{F} = (f_{1/2}, f_{3/2}, \dots, f_{N-1/2})$$

$$f_{i+1/2} = -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \phi(z_{i+1/2}, t_k)) + \frac{\hat{M}}{\Delta t} \phi(z_{i+1/2}, t_k)$$

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-1}$$

où N est le nombre de couches, et \mathcal{A} est la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0,0} &= \left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_1}{\Delta z^2} - \frac{|c_1| - c_1}{2\Delta z} \right) & \mathcal{A}_{1,0} &= \left(-\frac{d_1}{\Delta z^2} + \frac{|c_1| - c_1}{\Delta z} \right) \\
\mathcal{A}_{i-1,i} &= \left(-\frac{d_i}{\Delta z^2} - \frac{|c_i| + c_i}{\Delta z} \right) & \mathcal{A}_{i,i} &= \left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_{i+1} + d_i}{\Delta z^2} - \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2\Delta z} + \frac{|c_i| + c_i}{2\Delta z} \right) \\
\mathcal{A}_{i+1,i} &= \left(-\frac{d_{i+1}}{\Delta z^2} + \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{\Delta z} \right) & \forall 1 \leq i \leq N-2 \\
\mathcal{A}_{N-2,N-1} &= \left(-\frac{d_{N-1}}{\Delta z^2} - \frac{|c_{N-1}| + c_{N-1}}{\Delta z} \right) & \mathcal{A}_{N-1,N-1} &= \left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_{N-1}}{\Delta z^2} - \frac{|c_{N-1}| + c_{N-1}}{2\Delta z} \right) \\
\mathcal{A}_{i,j} &= 0 \text{ partout ailleurs}
\end{aligned}$$

Ce problème à matrice tridiagonale peut être résolu efficacement par une méthode directe de factorisation LU, de complexité $\mathcal{O}(N)$, que j'ai implémentée en C++.

La résolution du problème discrétisé passe par un algorithme très similaire à l'algorithme newtonien.

$n = 0$: h_0 et ϕ_0 donnés
 $n \geq 0$: h_n et ϕ_n connus, on pose $h_{n+1,k=0} = h_n$ et $\phi_{n+1,k=0} = \phi_n$
 $|$ $k \geq 0$: $h_{n+1,k}$ et $\phi_{n+1,k}$ connus
 $|$ \forall nœud i du maillage
 $|$ $|$ calculer $\mathcal{F}_{i,n+1,k}$ en fonction des valeurs selon z de $\phi_{n+1,k}$
 $|$ $|$ trouver $\varphi_{i,n+1,k+1}$ tel que :
 $|$ $|$ $\mathcal{A}\varphi_{i,n+1,k+1} = \mathcal{F}_{i,n+1,k}$
 $|$ $\phi_{n+1,k+1} = \{\varphi_{i,n+1,k+1}\}_{i=0}^{N-1}$
 $|$ calculer \mathcal{B}, \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction de $\phi_{n+1,k+1}$
 $|$ trouver $h_{n+1,k+1}$ tel que :
 $|$ $\frac{h_{n+1,k+1} - h_n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{n+1,k}^3}{N^3} \mathcal{B} \frac{\partial h_{n+1,k+1}}{\partial x} + \frac{h_{n+1,k+1}}{N^2} \mathcal{C} h_{n+1,k} + \mathcal{D} \right) = 0$ dans $] -L, +\infty[$
 $|$ $\frac{\partial h_{n+1,k+1}}{\partial x} = 0$ sur $\{-L, +\infty\}$
 $|$ Si $h_{n+1,k+1} - h_{n+1,k} < \text{seuil}$ alors $n \leftarrow n + 1$

Chaque itération de notre algorithme consistera à calculer les valeurs de ϕ dans chaque couche en fonction de la hauteur, puis d'en déduire tous les coefficients, et enfin de mettre à jour la hauteur en se basant sur ces nouveaux coefficients. Les expressions des coefficients sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{i+1/2})} \left((\beta_i + N - i) \left(N - i - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(N - i - \frac{2}{3} \right) \right) \\
\beta_k &= \sum_{j=k+1}^{N-1} (B_j \alpha_j) \ , \ B_k = \sum_{i=k}^{N-1} \left(\prod_{j=k}^{i-1} (a_j) \right) \\
a_k &= \left(2 - \frac{\eta_s(\phi_{k+1/2})}{\eta_s(\phi_{k+3/2})} \right) \ , \ \alpha_k = \left(\frac{\eta_s(\phi_{k-1/2})}{\eta_s(\phi_{k+1/2})} - 1 \right) \\
\mathcal{C} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\gamma_i}{\eta_s(\phi_{i+1/2})} \left(N - i - \frac{1}{2} \right) \\
\gamma_k &= \sum_{j=k+1}^{N-1} (C_j \alpha_j) \ , \ C_k = \sum_{i=k}^{N-1} \left(c_i \prod_{j=k}^{i-1} (a_j) \right) \ , \ c_k = - \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\frac{\partial P_p}{\partial x} \right) dz \\
\mathcal{D} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{i+1/2})} \left(\int_{z_i}^{z_{i+1}} \theta(z) dz + \frac{h}{N} \theta(z_i) (N - i - 1) \right) \\
\theta(z) &= \int_{z=z_i(z)}^z \int_{\zeta=z}^h \left(\frac{\partial P_p}{\partial x}(t, x, \zeta) \right) d\zeta dz \\
P_p(t, x, z) &= \sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(\lambda_2 \left| \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_j) \right| \left[\eta_n(\phi_{j-1/2}) - \eta_n(\phi_{j+1/2}) \right] \right) + \lambda_2 \eta_n(\phi_{i(z)+1/2}) \left| \frac{\partial u_x}{\partial z}(z) \right|
\end{aligned}$$

3.5 Discussion des résultats

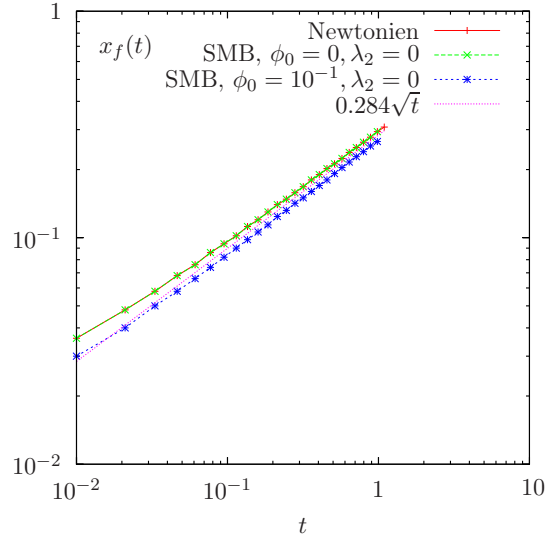


FIGURE 6 – Progression du front

On remarque que lorsque $\phi = 0$ et $\lambda_2 = 0$ (SBM newtonien), on retombe précisément sur le cas newtonien mono-couche (newtonien), comme attendu. En revanche, si on modifie ϕ , le modèle ne converge plus en un nombre fini d'itérations, et les résultats obtenus ne sont pas cohérents. De plus, si on modifie également λ_2 , le modèle diverge très rapidement et donne des résultats très aberrants. Au bout de quelques itérations, le solveur ne fonctionne plus et les résultats ne sont pas affichables, c'est pourquoi ils n'apparaissent pas sur le graphe. Il y a donc un problème dans le calcul des coefficients. Au cours des tests, nous avons pu identifier que le problème est probablement lié au coefficient \mathcal{B} . En effet, ce coefficient, qui intervient dans l'équation (3.7) en h , de type diffusion-convection, devrait être toujours positif ou nul. Or, nous avons observé qu'il prend des valeurs négatives durant les calculs. Il semblerait que le problème soit mal posé, ce qui rend la résolution numérique impossible. Nous avons donc cherché à utiliser un autre modèle.

4 Changement de modèle - Rivière des Remparts

Le nouvel objectif est de parvenir à simuler au mieux la coulée de la rivière des Remparts, évoquée dans l'introduction, à partir d'un modèle pré-existant. La coulée de 1965 a déplacé des dizaines de millions de m^3 , et elle a été suffisamment bien documentée pour pouvoir en faire une étude.

4.1 Choix d'un modèle selon la granulométrie

Il existe de nombreux modèles simplifiés pour décrire le comportement d'une coulée de débris. Pour choisir le modèle le mieux adapté à la coulée qui nous intéresse, nous nous sommes basés sur un travail de thèse réalisé par Eric Bardou [1], ainsi que sur des mesures de Claude Smutek et Pierre Saramito. La figure 7 présente ces résultats. Les graphes colorés ont été déterminés à partir d'un grand nombre de coulées dont on connaît le comportement et la granulométrie. L'enveloppe des mesures indique un intervalle dans lequel on peut considérer qu'une mesure de granulométrie correspond à un modèle donné. A partir d'un prélèvement des résidus de la coulée, on a pu déterminer la proportion massique des particules selon leur taille.

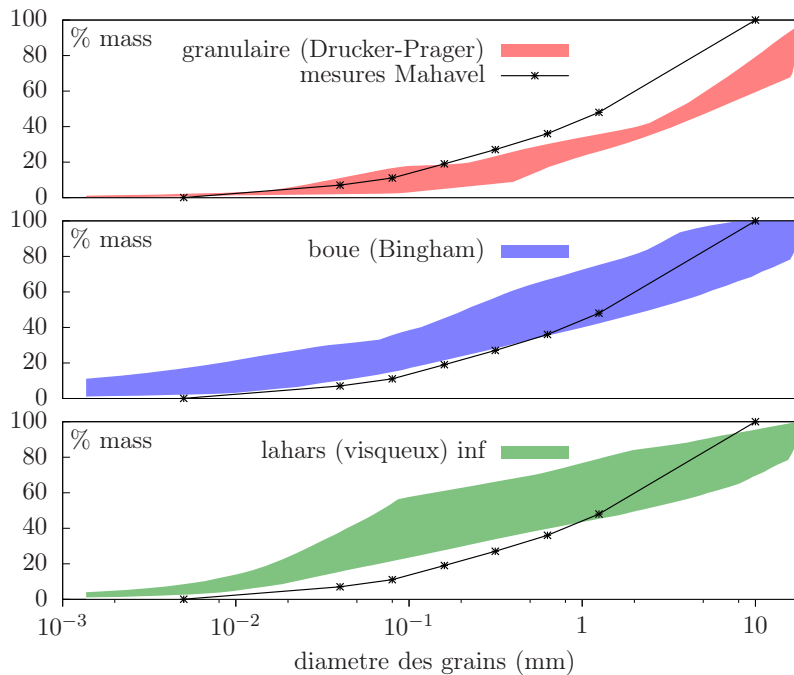


FIGURE 7 – Analyse granulométrique de résidus de la coulée

On remarque qu'il n'y a pas eu de mesures au-delà de 10mm, mais ce n'est pas important pour déterminer le modèle approprié. En effet, le comportement de la coulée est principalement déterminé par les particules les plus petites. Or, si on se focalise sur la partie du graphe comprise en-dessous de 10^{-1} , on remarque que les mesures se situent à la frontière entre la zone rouge et la zone bleue.

Notre choix de modèle devait donc se tourner vers Drucker-Prager ou Bingham.

5 Modèle de Herschel–Bulkley

Nous avons à notre disposition un code complet qui implémente le modèle de Herschel-Bulkley. Il s'agit d'une version généralisée du modèle de Bingham, et c'est donc celui que nous avons choisi.

5.1 Equations

J'ai utilisé le programme et les calculs présentés par Noé Bernabeu dans [2]. Les équations de conservation (5.2) et les équations constitutives (5.3) permettent d'obtenir le modèle réduit (5.4). C'est ce modèle réduit qui est présent dans le code qui sera utilisé par la suite.

Equations de conservation :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (\sigma - pI) = \rho \mathbf{g} \quad (5.2)$$

Equation constitutive :

$$\begin{aligned} \sigma &= 2K|D(u)|^{n-1}D(u) + \sigma_0 \frac{D(u)}{|D(u)|} && \text{si } D(u) \neq 0 \\ |\sigma| &\leq \sigma_0 && \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Modèle Réduit

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \left(\frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{div} \left\{ \mu_n \left(\frac{\sigma_0}{\rho g}, h, |\nabla(f+h)| \right) \nabla(f+h) \right\} = 0 \quad (5.4)$$

avec $\mu_n(B_i, h, \xi) = \begin{cases} \frac{n((n+1)h\xi + nB_i)(h\xi - B_i)^{1+\frac{1}{n}}}{(n+1)(2n+1)\xi^3} & \text{quand } h\xi > B_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5.2 Observations

Comme expliqué en introduction du Suspension Balance Model, nous avons à notre disposition deux topographies d'une coulée dans la rivière des remparts.

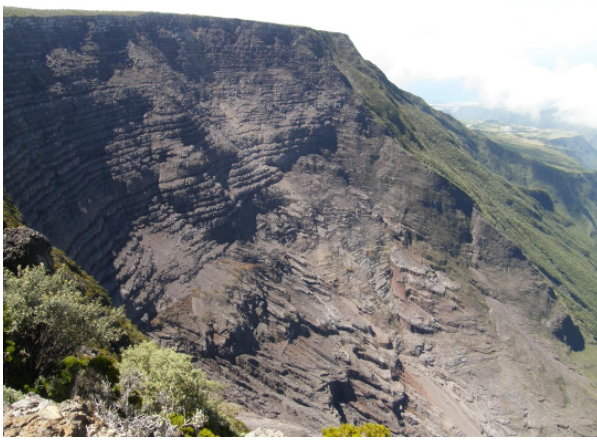


FIGURE 8 – Zone du glissement de terrain,
Bras de Mahavel,
Rivière des remparts,
La Réunion

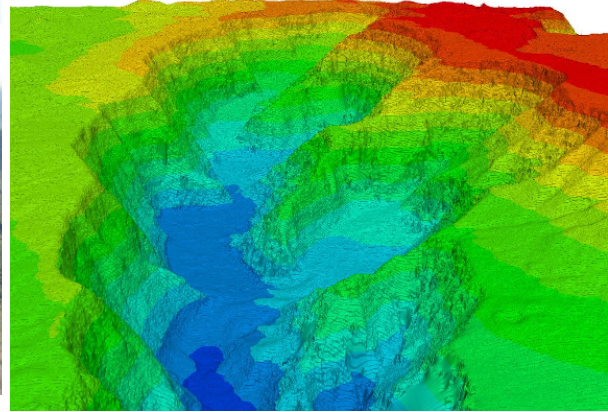


FIGURE 9 – Topographie 3D
du bras de Mahavel

On peut voir sur la photo 8 la zone de départ du glissement de terrain, et sur la figure 9 une vue 3D de la topographie de 1966 issue du rapport de stage [3].

En interpolant les deux maillages sur une grille avec $\Delta x = 50m$, on obtient les images de la figure 10. Le minimum des deux maillages représentera le sol (en gris) pour les simulations numériques. La partie positive de la différence nous servira de condition initiale (à gauche), et la partie négative déterminera la justesse de nos résultats finaux (à droite).

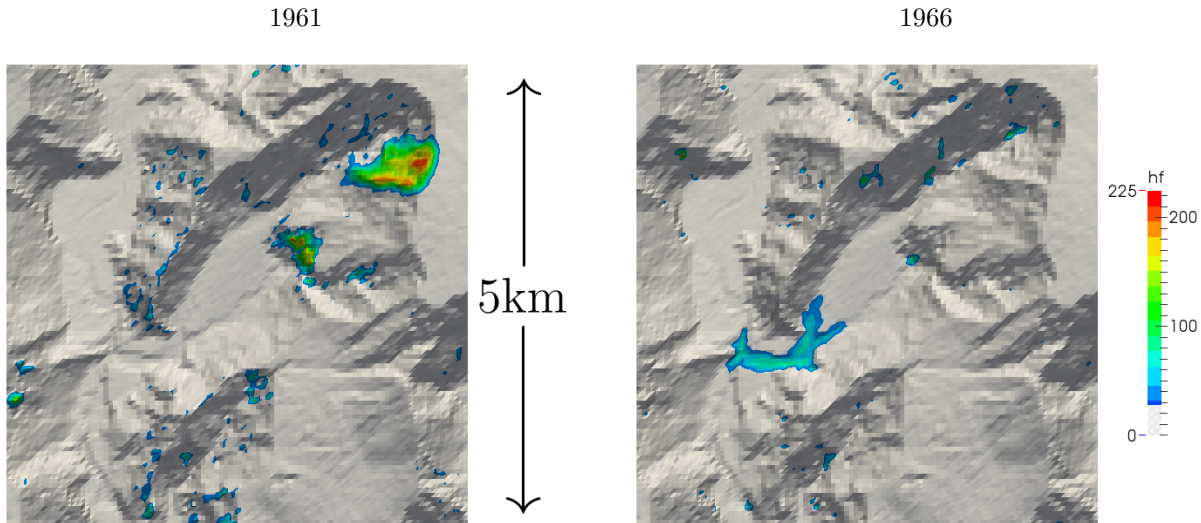


FIGURE 10 – Topographies avant et après la coulée

On remarque néanmoins que les deux images comportent des parasites, car il existe de nombreuses différences mineures entre les deux topographies. Nous avons donc supprimé ces parasites en ne gardant que la zone importante autour du départ et de l'arrivée de la coulée, sur la figure 11.

1961

1966

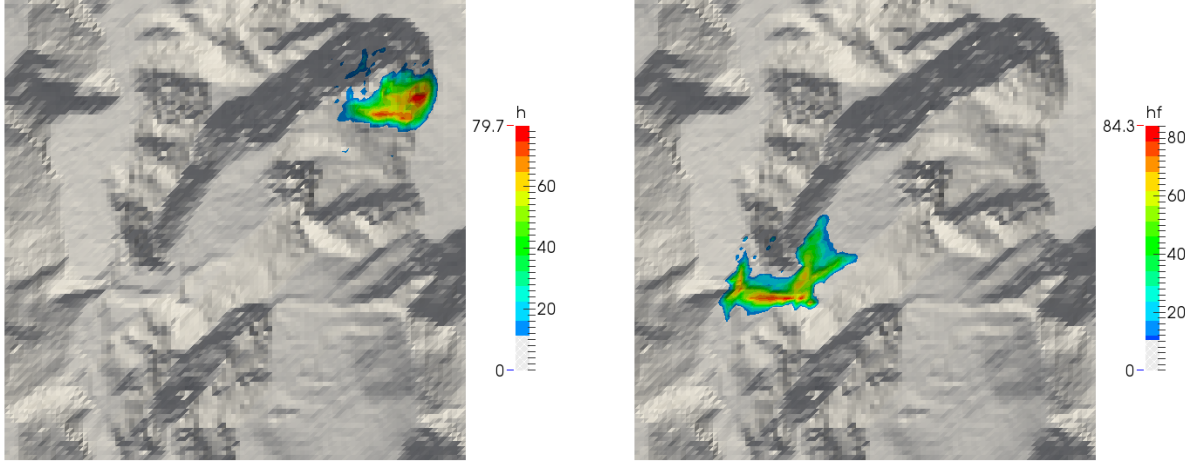


FIGURE 11 – Topographies avant et après la coulée sans les parasites

A partir de ces maillages nettoyés, on peut également déterminer le volume de ces deux zones. On trouve un volume respectif de $84.10^6 m^3$ pour le départ de la coulée, et $25.10^6 m^3$ pour son arrivée. La différence importante entre ces deux volumes s'explique par une imprécision de la topographie. En effet, les topographies ont été obtenues à partir de photos d'époque, et ces photos comportaient beaucoup d'ombres, qui ont pu fausser partiellement les résultats. Après en avoir discuté avec l'équipe qui a obtenu ces maillages, le volume aval semble être le plus fiable. Nous avons donc ajusté le volume amont en multipliant les hauteurs, de manière à obtenir une forme identique, mais un volume corrigé.

Les résultats obtenus sont présentés dans les graphes en annexe 2.

Afin d'obtenir ces simulations, nous avons dû déterminer plusieurs paramètres du système. Le paramètre de la loi puissance n de l'équation constitutive de Herschel-Bulkley a été fixé à $n = 1/3$, en se basant sur l'article [4]. Il reste alors deux paramètres du modèle de Herschel-Bulkley à déterminer : τ_0 , le seuil de contrainte, et K , la consistance. Des mesures sur de nombreux matériaux ont permis de constater que $\tau_0 \approx 3K$, lorsque ces grandeurs sont exprimées en unités du standard international, d'après le même article [4]. Le choix $\tau_0 = 3K$ permet de n'avoir plus qu'un paramètre à identifier, la consistance K . En faisant varier K , nous avons pu déterminer empiriquement qu'une valeur de 1.7×10^4 provoquait un arrêt de la coulée à un niveau proche des observations. Avec un coefficient plus grand, la coulée s'arrêtait trop tôt, et avec une valeur plus grande, elle s'étendait trop loin dans la rivière. Nous n'avons pas pu étudier l'effet des autres coefficients sur la solution, car les calculs prennent un temps conséquent.

5.3 Analyse des résultats

On peut remarquer que la situation finale sur la figure 12 présente de nombreuses ressemblances avec les observations. Tout d'abord, la séparation du front en deux pointes à la fin est présente dans notre simulation, même si leur forme n'est pas strictement identique aux observations. De plus, la majorité de l'arrière de la coulée a continué sa course comme prévu. le dépôt restant sur la partie amont a une hauteur relativement faible.

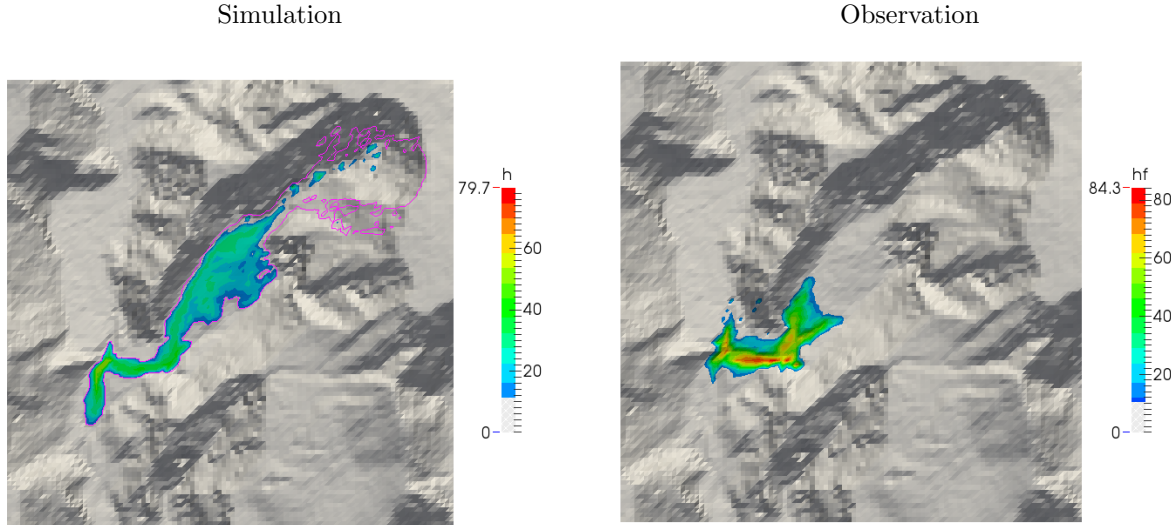


FIGURE 12 – Situation finale

La figure 13 montre en rouge toutes les zones atteintes par la coulée au cours du temps. On peut retrouver cette zone sous forme de contour violet sur les autres images des simulations. A partir du secteur en noir, on peut tirer des conclusions supplémentaires.

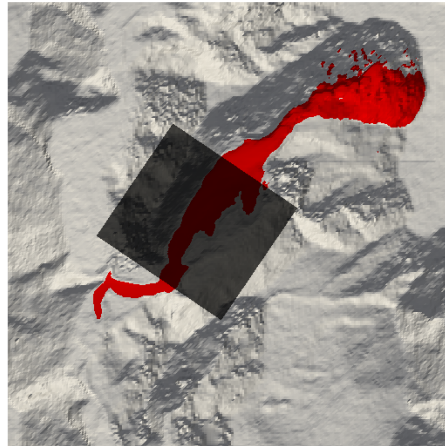
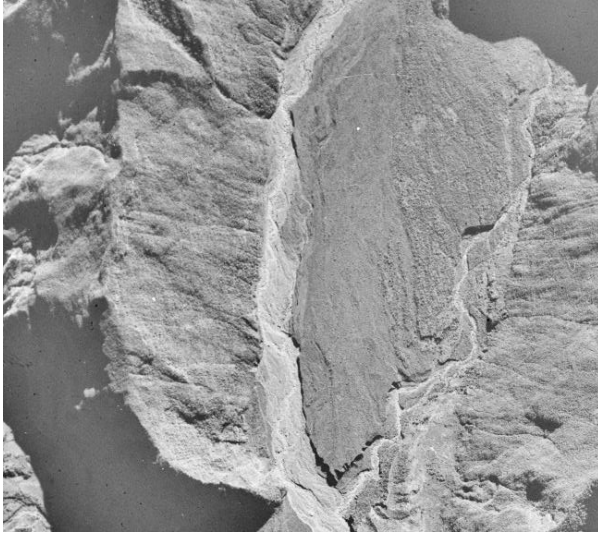


FIGURE 13 – Zone atteinte par la coulée

En effet, on peut voir sur les photos 14 qu'une partie en haut à droite semble presque intacte après la coulée. On peut donc isoler en rouge les zones que la coulée a pu atteindre.

Avant



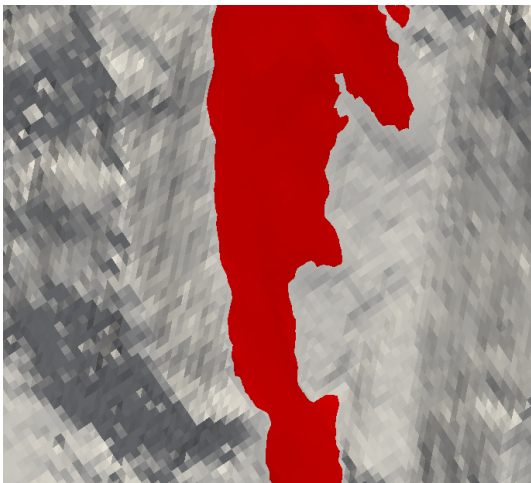
Après



FIGURE 14 – Zone Centrale

En comparant les résultats numériques avec les observations sur la figure 15, on remarque un débordement plus important en amont dans la simulation, et plus important en aval pour l'observation. Malgré tout, la majorité de la coulée a bien continué sa course sur le flanc à gauche sur la photo, comme dans les observations.

Numérique



Observation

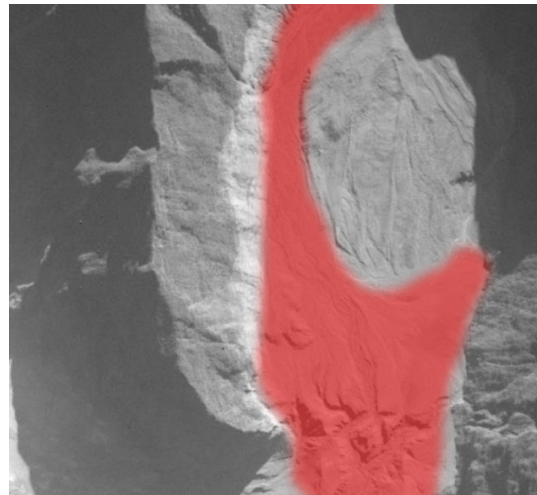


FIGURE 15 – Zone Centrale

Un autre élément qui permet de déterminer la validité du modèle est la vitesse. Sur le graphe 16 en échelle logarithmique, on remarque une pente constante, ce qui est un comportement logique pour la vitesse du front de la coulée. En revanche, les vitesses initiales sont anormalement élevées. Même pour un éboulement de l'ampleur de celui-ci, une vitesse de plus de 10km/s est inconcevable. Le comportement de la simulation est donc incohérent lors des premiers pas de temps.

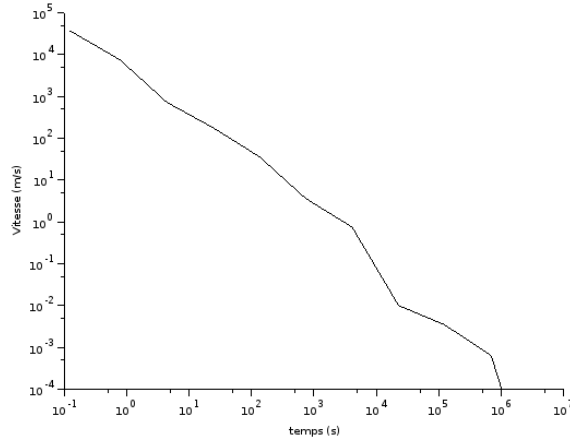


FIGURE 16 – Vitesse de la coulée en fonction du temps

Afin de s'assurer que les problèmes identifiés plus haut ne sont pas dûs aux imprécisions de maillage, la figure 17 présente les résultats obtenus respectivement sur la grille aux mailles de 50m, et sur une grille raffinée à 25m. On remarque que la solution finale et le contour violet de la zone maximale sont sensiblement identiques. Des tests sur une grille à 12,5m semblaient confirmer cela, mais la durée trop importante des calculs ne permet pas de présenter une figure pour le montrer.

$\Delta x = 50\text{m}$

$\Delta x = 25\text{m}$

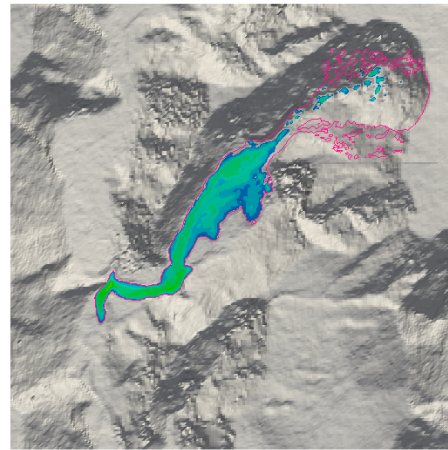
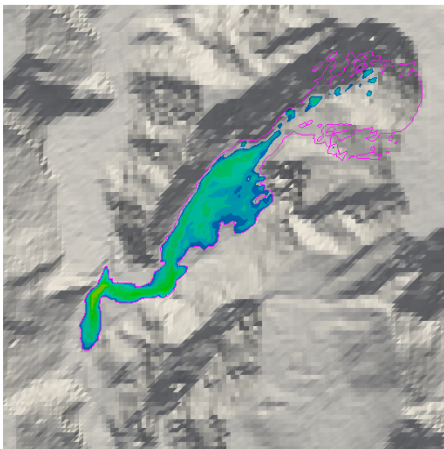


FIGURE 17 – Précision augmentée

5.4 Limites du modèle

On constate de nombreuses similitudes entre les résultats de simulation et les observations, notamment les contours des dépôts en fin d'écoulement, pour penser que le modèle de Herschel-Bulkley est un bon point de départ. Il apparaît cependant un certain nombre de limitations que nous allons passer en revue.

Le problème le plus apparent concerne la vitesse, qui atteint dans les premiers instants des valeurs aberrantes. Cela est probablement dû au fait que les termes inertiels ne sont pas pris en compte dans le modèle actuel. En effet, dans les conditions extrêmes du déclenchement de l'écoulement, ces termes ne devraient pas être négligés. L'absence de termes inertiels peut aussi être à l'origine de l'étalement trop important de la coulée à la sortie du goulot d'étranglement.

Un second problème pourrait venir du modèle, qui n'est pas parfaitement adapté au type d'écoulement qui a eu lieu. Le modèle de Drucker-Prager serait probablement plus adapté, mais il n'est pas encore implémenté dans le code que nous avons utilisé.

Il est également possible de faire appel à des modèles plus complexes, comme les lits fluidisés, ou de prendre en compte l'abrasion des roches pendant l'écoulement. Cependant, il s'agit de deux pistes encore peu étudiées, donc leur application à une coulée de débris comme celle de Mahavel n'est pas possible à l'heure actuelle.

6 Conclusion

Ce stage m'a permis d'expérimenter de nombreux domaines scientifiques, ainsi que de déterminer des résultats intéressants.

Via de l'analyse asymptotique et de la programmation en C++, j'ai pu créer et étudier un modèle réduit à partir du modèle SBM. J'ai également pu étudier la physique sous-jacente à ce modèle, ainsi qu'au modèle de Herschel-Bulkley. J'ai effectué des tests numériques, des simulations sur topographie réelle, de l'étude paramétrique, ainsi que des comparaisons entre le modèle et l'expérience, afin de déterminer la pertinence des modèles employés.

J'ai développé une méthode de résolution pour modéliser une coulée. Les résultats dans le cas d'un fluide newtonien sont cohérents. L'utilisation d'une modélisation multi-couches permet de trouver des résultats proches de ceux prédits par la théorie. La méthode est stable, et reste précise même avec une discrétisation grossière. En revanche, l'ajout des paramètres du modèle SBM ne permet pas d'obtenir des résultats pertinents pour l'instant. Ce modèle reste tout de même très intéressant, si les problèmes numériques peuvent être résolus.

L'utilisation du modèle de Herschel-Bulkley a permis d'obtenir des résultats qualitativement proches de la coulée réelle. Malgré quelques problèmes mis en avant par ce stage, ce type de simulation semble la piste la plus prometteuse pour modéliser des coulées de débris du même type que celle de la rivière des Remparts.

7 Annexe : Changement de variables et analyse asymptotique

Soit H et L les hauteur et longueur caractéristiques de la coulée. On introduit $\epsilon = H/L$, supposé petit, et le changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= L\tilde{x} & u_x &= U\tilde{u}_x \\ z &= \epsilon L\tilde{z} & u_z &= \epsilon U\tilde{u}_z \end{aligned} \quad (7.1)$$

où x, z, u_x et u_z désignent les coordonnées et les vitesses du fluide. $\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{u}_x$ et \tilde{u}_z désignent les mêmes grandeurs adimensionnées. Le changement sur U a pour objectif de garder la loi de conservation de la masse inchangée après le changement de variables. Nous allons conserver la notation de \widetilde{var} pour désigner les variables adimensionnées dans le reste du document.

Nous allons détailler la transformation des équations (3.1) à (3.4) par le changement de variable (7.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{U}{\epsilon L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} = \epsilon^{-1} \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{\epsilon U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} = \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{\epsilon U}{\epsilon L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2D(u)|^2 &= \frac{1}{2}(2D_{xx})^2 + \frac{1}{2}(2D_{zz})^2 + (2D_{xz})^2 \\ &= 2 \left(\frac{U}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\epsilon U}{\epsilon L} \right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon U}{\epsilon L} \right)^2 \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} + \epsilon^{-1} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \\ &= \epsilon^{-2} \left(\frac{U}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + 2\epsilon^2 \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right) \right) + \epsilon^4 \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right] \\ &\simeq \epsilon^{-2} \left(\frac{U}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \\ |2D(u)| &\simeq \epsilon^{-1} \frac{U}{L} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \hat{\eta}_n(\phi) |2D(u)| \right] \\ &\simeq 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{2} \hat{\eta}_n(\phi) \epsilon^{-1} \frac{U}{L} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \\ &\simeq \eta_0 \frac{U}{L} \left[2(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} - \hat{\eta}_n(\phi) \epsilon^{-1} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \\ \sigma_{zz} &= 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \lambda_2 \frac{1}{2} \hat{\eta}_n(\phi) |2D(u)| \right] \\ &\simeq 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\epsilon U}{\epsilon L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} - \lambda_2 \frac{1}{2} \hat{\eta}_n(\phi) \epsilon^{-1} \frac{U}{L} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \\ &\simeq \eta_0 \frac{U}{L} \left[2(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} - \lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \epsilon^{-1} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \\ \sigma_{xz} &= 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \\ &= 2\eta_0 \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\epsilon L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} + \frac{\epsilon U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \\ &= \epsilon^{-1} \eta_0 \frac{U}{L} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \end{aligned}$$

7.1 Conservation de la masse

La loi de conservation de la masse reste inchangée par changement de variable :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\epsilon U}{\epsilon L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{U}{L} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \Leftrightarrow \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.1)$$

7.2 Conservation de la quantité de mouvement

On réduit la loi de conservation de la quantité de mouvement à deux équations correspondant aux projections selon x et selon z :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (\sigma - pI) = \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x = 0 & (a) \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z & (b) \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x = 0 & (7.2.a) \\ \Leftrightarrow & \rho \left(\frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + U \tilde{u}_x \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \epsilon U \tilde{u}_z \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right) - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \epsilon \rho g \frac{L \partial \tilde{p}}{L \partial \tilde{x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \epsilon^2 Re \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right) - \frac{1}{\epsilon \rho g} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0 \end{aligned}$$

On remplace les valeurs de σ par leurs valeurs adimensionnées :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon \rho g} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ & = 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} \right] - \epsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\hat{\eta}_m(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right] \end{aligned}$$

On effectue un développement asymptotique à l'ordre 0 en ϵ , et l'équation (7.2.a) devient :

$$-\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \simeq 0 \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z & (7.2.b) \\ \Leftrightarrow & \rho \left(\frac{\epsilon U^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{t}} + U \tilde{u}_x \frac{\epsilon U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} + \epsilon U \tilde{u}_z \frac{\epsilon U}{L} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right) - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \epsilon \rho g \frac{L \partial \tilde{p}}{\epsilon L \partial \tilde{z}} = -\rho g \\ \Leftrightarrow & \epsilon^4 Re \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right) - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 1 \end{aligned}$$

On remplace les valeurs de σ par leurs valeurs adimensionnées :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\ & = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{x}} \right] + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[2(1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right] - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_m(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \end{aligned}$$

A l'ordre 0, l'équation (7.2.b) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_m(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \simeq -1 \quad (7.4)$$

7.3 Equation constitutive

On simplifie progressivement l'équation constitutive jusqu'à obtenir la relation adimensionnée à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{2a^2}{9\eta_0} f(\phi) \nabla \cdot \sigma_p$$

$$\sigma_p = \sigma - 2\eta_0 D(u)$$

$$\sigma_{p,xx} \simeq \eta_0 \frac{U}{L} \left[2\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{x}} - \hat{\eta}_n(\phi) \epsilon^{-1} \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \quad \sigma_{p,zz} \simeq \eta_0 \frac{U}{L} \left[2\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_z}{\partial \widetilde{z}} - \lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \epsilon^{-1} \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right]$$

$$\sigma_{p,xz} \simeq \epsilon^{-1} \eta_0 \frac{U}{L} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \left(\frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} + \epsilon^2 \frac{\partial \widetilde{u}_z}{\partial \widetilde{x}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma_p &= \left(\frac{\frac{\partial \sigma_{p,xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{p,xz}}{\partial z}}{\frac{\partial \sigma_{p,xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{p,xz}}{\partial z}} \right) \\ &\simeq \frac{\eta_0 U}{L^2} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left[2\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{x}} \right] - \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left[\hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] + \epsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right] + \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_z}{\partial \widetilde{x}} \right] \\ \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right] + \epsilon \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_z}{\partial \widetilde{x}} \right] + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[2\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_z}{\partial \widetilde{z}} \right] - \epsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \end{array} \right) \end{aligned}$$

On réduit à l'ordre -2 :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma_p &\simeq \epsilon^{-2} \frac{\eta_0 U}{L^2} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \end{array} \right) \\ \mathbf{j} &\simeq \frac{2a^2}{9\eta_0} f(\phi) \epsilon^{-2} \frac{\eta_0 U}{L^2} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \end{array} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j} &= \nabla \cdot \left(\frac{2a^2}{9\eta_0} f(\phi) \nabla \cdot \sigma_p \right) \\ &\simeq \epsilon^{-2} \frac{2Ua^2}{9L^3} \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right] \right] - \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \right] \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_z \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \widetilde{u}_x \frac{\partial \phi}{\partial \widetilde{x}} + \widetilde{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial \widetilde{z}} + \frac{2\hat{a}^2}{9} \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \right] \right) &\simeq 0 \end{aligned}$$

A l'ordre 0, on obtient :

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \widetilde{u}_x \frac{\partial \phi}{\partial \widetilde{x}} + \widetilde{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial \widetilde{z}} - \frac{2\hat{a}^2}{9} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial \widetilde{z}} \right| \right] \right] \simeq 0 \quad (7.7)$$

7.4 Conditions aux limites

Nous allons maintenant traiter les conditions aux limites (3.5) et (3.6)

$$u(t, x) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{u}(\widetilde{t}, \widetilde{x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \text{ et } \Gamma_b \quad (3.5.a)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\text{sur } \Gamma_w, \Gamma_b \text{ et } \Gamma_f$$

$$(\text{ 3.5.b}) \text{ et } (\text{ 3.6.a})$$

$$\mathbf{j} = \frac{2a^2}{9\eta_0} f(\phi) \nabla \cdot \sigma_p \simeq \frac{2\hat{a}^2 U}{9} f(\phi) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \end{pmatrix} \quad \text{d'après (7.5)}$$

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

On va remplacer n par sa valeur selon le bord du domaine sur lequel on se situe :

Sur Γ_f :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}} \left(\frac{\partial h}{\partial x}, 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}}} \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, 1 \right) \simeq \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, 1 \right) \\ &\Rightarrow \frac{2\hat{a}^2 U}{9} f(\phi) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \end{pmatrix} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \simeq 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Sur Γ_b :

$$\begin{aligned} n &= (0, -1) \Rightarrow \frac{2\hat{a}^2 U}{9} f(\phi) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \end{pmatrix} \cdot (0, -1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \simeq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Sur Γ_w :

$$\begin{aligned} n &= (-1, 0) \Rightarrow \frac{2\hat{a}^2 U}{9} f(\phi) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \end{pmatrix} \cdot (-1, 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\hat{\eta}_p(\phi) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

On va étudier séparément les deux coordonnées de (3.6.b) :

Sur Γ_f :

$$(\sigma - pI) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.6.b)$$

$$[(\sigma - pI) \cdot \mathbf{n}]_x = 0 \quad (3.6.b.x)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \epsilon^2 \rho g L \left(-\tilde{p} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + (1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right) \simeq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + \hat{\eta}_p(\phi)) \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \simeq \tilde{p} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$[(\sigma - pI) \cdot \mathbf{n}]_z = 0 \quad (3.6.b.z)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} - p \end{pmatrix} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{p} \simeq 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

7.5 Récapitulatif

En combinant les deux équations de conservation (3.1), (7.4), l'équation constitutive (7.7), et les conditions aux limites (3.5) à (7.12), on a toutes les formules nécessaires pour poser notre problème de fluide avec suspension. Nous allons maintenant présenter la suite des calculs menant aux équations utilisées dans le programme.

7.6 Intégration et obtention du problème en ϕ

Pour alléger les notations, on écrit :

$$\tilde{h}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \tilde{h}$$

On intègre sur la verticale l'équation de conservation de la masse :

$$\nabla(\tilde{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=\tilde{h}} \tilde{u}_x(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{z}) \partial \tilde{z} - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0 \quad (7.13)$$

On effectue la même opération depuis une hauteur z_0 arbitraire sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \simeq -1 \quad (7.4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}}(\tilde{t}, \tilde{x}, z_0) \right| \right] + \tilde{p}(\tilde{t}, \tilde{x}, z_0) \simeq \tilde{h} - z_0 \quad (7.14)$$

On reprend maintenant l'équation constitutive :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}} - \frac{2\hat{a}^2}{9} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[f(\phi) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n(\phi) \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \right] \right] \simeq 0 \quad (7.7)$$

On sait que :

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \tilde{u}_x \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}} + \phi \left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{u}_x \phi) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{u}_z \phi) \\ \Leftrightarrow \hat{M} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[- \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \frac{2\phi f(\phi) \phi_m}{(\phi_m - \phi)^3} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}} - \frac{\phi f(\phi)}{(\phi_m - \phi)^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \phi + \hat{M} u_z \phi \right] &\simeq -\hat{M} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{u}_x \phi) \\ \Leftrightarrow \hat{M} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[-d \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}} + c \phi \right] &\simeq -\hat{M} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{u}_x \phi) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi(z, t) & \phi(z) &= \Phi(z, t_{k+1}) \\ d &= d(z) = \left(\left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| \frac{2\phi f(\phi) \phi_m}{(\phi_m - \phi)^3} \right) & c &= c(z) = \left(- \frac{\phi f(\phi)}{(\phi_m - \phi)^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left| \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right| + \hat{M} u_z \right) \end{aligned}$$

On pose aussi :

$$\begin{aligned} c(z_i) &= c_i & d(z_i) &= d_i \\ \Phi(z_{i+1/2}, t_{k+1}) &\simeq \phi_{i+1/2} & \Phi(z_{i+1/2}, t_j) &\simeq \phi_{i+1/2, j} \end{aligned} \quad (\text{On ne précise l'indice que si } j \neq k+1)$$

On discrétise :

$$\begin{aligned} \hat{M} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(z_i, t_{k+1}) + \frac{\partial}{\partial z} \left[-d(z_i) \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z_i, t_{k+1}) + c(z_i) \Phi(z_i, t_{k+1}) \right] &= -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x}(u_x \Phi(z_i, t_k)) \\ \hat{M} \frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i+1/2, k}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta z} \left[-d(z_j) \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z_j, t_{k+1}) + c(z_j) \Phi(z_j, t_{k+1}) \right]_{j=i}^{i+1} &= -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x}(u_x \Phi(z_i, t_k)) \end{aligned}$$

Ici, on va décentrer le terme de diffusion en $c(z_j)$ dans le sens amont. Pour cela, on va effectuer la manipulation suivante :

$$\begin{aligned} c(z_j) > 0 &\Rightarrow \frac{1}{\Delta z} [c(z_j)\Phi(z_j, t_{k+1})]_{j=i}^{i+1} \simeq c(z_{i+1}) \frac{\phi_{i+3/2} - \phi_{i+1/2}}{\Delta z} \\ c(z_j) < 0 &\Rightarrow \frac{1}{\Delta z} [c(z_j)\Phi(z_j, t_{k+1})]_{j=i}^{i+1} \simeq c(z_i) \frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}}{\Delta z} \end{aligned}$$

On peut reformuler cette condition ainsi :

$$\frac{1}{\Delta z} [c(z_j)\Phi(z_j, t_{k+1})]_{j=i}^{i+1} \simeq \frac{|c_i| + c_i}{2} \frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}}{\Delta z} - \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2} \frac{\phi_{i+3/2} - \phi_{i+1/2}}{\Delta z} + \mathcal{O}(\Delta z)$$

Au contraire, les autres termes vont être discrétisés de manière centrée.

$$\begin{aligned} &\hat{M} \left(\frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i+1/2,k}}{\Delta t} \right) - \left[d_j \frac{\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}}{\Delta z^2} \right]_{j=i}^{i+1} \\ &+ \left(\frac{|c_i| + c_i}{2} \frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}}{\Delta z} - \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2} \frac{\phi_{i+3/2} - \phi_{i+1/2}}{\Delta z} + \mathcal{O}(\Delta z) \right) \\ &= -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \phi_{i+1/2,k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{M}}{\Delta t} (\phi_{i+1/2} - \phi_{i+1/2,k}) - \left(\frac{d_{i+1}}{\Delta z^2} (\phi_{i+3/2} - \phi_{i+1/2}) \right) + \left(\frac{d_i}{\Delta z^2} (\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}) \right) \\ &- \left(\frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2\Delta z} (\phi_{i+3/2} - \phi_{i+1/2}) \right) + \left(\frac{|c_i| + c_i}{2\Delta z} (\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}) \right) \\ &= -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \phi_{i+1/2,k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_{i+1} + d_i}{\Delta z^2} + \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2\Delta z} + \frac{|c_i| + c_i}{2\Delta z} \right) \phi_{i+1/2} \\ &+ \left(-\frac{d_i}{\Delta z^2} - \frac{|c_i| + c_i}{2\Delta z} \right) \phi_{i-1/2} + \left(-\frac{d_{i+1}}{\Delta z^2} - \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2\Delta z} \right) \phi_{i+3/2} \\ &= f(z_{i+1/2}) = -\hat{M} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \phi_{i+1/2,k}) + \frac{\hat{M}}{\Delta t} \phi_{i+1/2,k} \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq N-2$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_{i+1} + d_i}{\Delta z^2} + \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2\Delta z} + \frac{|c_i| + c_i}{2\Delta z} \right) \phi_{i+1/2} \\ &+ \left(-\frac{d_i}{\Delta z^2} - \frac{|c_i| + c_i}{2\Delta z} \right) \phi_{i-1/2} + \left(-\frac{d_{i+1}}{\Delta z^2} - \frac{|c_{i+1}| - c_{i+1}}{2\Delta z} \right) \phi_{i+3/2} = f_{i+1/2} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Si $i = 0 \Leftrightarrow z_i = 0$:

On a les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[-d(z) \frac{\partial \phi}{\partial z} + c(z) \phi \right] = 0 \quad \text{quand } z = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[-d_0 \frac{\phi_{1/2} - \phi_{-1/2}}{\Delta z^2} + \frac{|c_0| + c_0}{2} \frac{\phi_{1/2} - \phi_{-1/2}}{\Delta z} \right] = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant les termes dans l'équation en $1 \leq i \leq N-2$, on obtient donc :

$$\left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_1}{\Delta z^2} - \frac{|c_1| - c_1}{2\Delta z} \right) \phi_{1/2} + \left(-\frac{d_1}{\Delta z^2} + \frac{|c_1| - c_1}{\Delta z} \right) \phi_{3/2} = f_{1/2} \quad (7.17)$$

Si $i = N - 1 \Leftrightarrow z_{i+1} = h$:

On a les mêmes conditions aux limites qu'en $z = 0$ au niveau de la surface.

$$\Rightarrow \left[-d_N \frac{\phi_{N+1/2} - \phi_{N-1/2}}{\Delta z^2} + \frac{|c_N| + c_N}{2} \frac{\phi_{N+1/2} - \phi_{N-1/2}}{\Delta z} \right] = 0$$

En remplaçant les termes dans l'équation en $1 \leq i \leq N - 2$, on obtient donc :

$$\left(\frac{\hat{M}}{\Delta t} + \frac{d_{N-1}}{\Delta z^2} - \frac{|c_{N-1}| + c_{N-1}}{2\Delta z} \right) \phi_{N-1/2} + \left(-\frac{d_{N-1}}{\Delta z^2} - \frac{|c_{N-1}| + c_{N-1}}{\Delta z} \right) \phi_{N-3/2} = f_{N-1/2} \quad (7.18)$$

En ré-écrivant ces équations sous forme matricielle, on retrouve le système présenté dans la partie 3.3.

7.7 Intégration et obtention du problème en h

Nous allons effectuer les calculs nécessaires à l'obtention de $\int_{\tilde{z}=0}^{\tilde{z}=h} \tilde{u}_x(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{z}) \partial \tilde{z}$ pour expliciter l'équation (7.13).
On intègre (7.4) entre z_i et z_{i+1} pour $i \in [0, N - 1]$ en supposant :

$$\phi(t, x, z) = \sum \phi_{i+1/2}(t, x) I_{\left[\frac{h(t,x)}{N} i, \frac{h(t,x)}{N} (i+1) \right]}(z) \quad (7.19)$$

$$(7.4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 \eta_n(\phi_{i+1/2}) \left[\left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right| \right]_{z_i}^{z_{i+1}} + [p]_{z_i}^{z_{i+1}} = -\frac{h}{N} & \forall i \in [1, N - 2] \\ \lambda_2 \eta_n(\phi_{1/2}) \left[\left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right| \right]_{z_0}^{z_1} + p(z_1) - p(z_0) = -\frac{h}{N} \\ -\lambda_2 \eta_n(\phi_{N-1/2}) \left| \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_{N-1}) \right| - p(z_{N-1}) = -\frac{h}{N} \end{cases}$$

On pose $i(z)$ tel que $z \in [z_i, z_{i+1}]$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i(z)+1}^{N-2} \left(\lambda_2 \eta_n(\phi_{j+1/2}) \left[\left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right| \right]_{z_j}^{z_{j+1}} \right) - \lambda_2 \eta_n(\phi_{N-1/2}) \left| \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_{N-1}) \right| \\ & + \lambda_2 \eta_n(\phi_{i(z)+1/2}) \left[\left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right| \right]_z^{z_{i(z)+1}} - p(z) = z - h \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(\lambda_2 \left| \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_j) \right| [\eta_n(\phi_{j-1/2}) - \eta_n(\phi_{j+1/2})] \right) + \lambda_2 \eta_n(\phi_{i(z)+1/2}) \left| \frac{\partial u_x}{\partial z}(z) \right| + h - z = p(z) \\ \Leftrightarrow & P_p(t, x, z) + P_h(t, x, z) = p(z) \end{aligned} \quad (7.20)$$

On intègre (7.3) pour obtenir $\frac{\partial u_x}{\partial z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial P_p}{\partial x} + \frac{\partial P_h}{\partial x} = \frac{\partial P_p}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \\ \int_z^h (7.3) dz &= \sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(\eta_s(\phi_{j+1/2}) \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} \right]_{z_j}^{z_{j+1}} \right) \\ & + \eta_s(\phi_{i(z)+1/2}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}(z_{i(z)+1}) - \frac{\partial u_x}{\partial z}(z) \right) + \int_z^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = 0 \\ \Rightarrow \eta_s(\phi_{i+1/2}) \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_i) &= \eta_s(\phi_{i+3/2}) \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_{i+1}) \left(2 - \frac{\eta_s(\phi_{i+1/2})}{\eta_s(\phi_{i+3/2})} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{h}{N} - \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(\frac{\partial P_p}{\partial x} \right) dz \end{aligned}$$

On en déduit la formulation de la suite suivante :

$$\begin{aligned}
x_k &= \eta_s(\phi_{k+1/2}) \frac{\partial u_x}{\partial z}(z_k) & a_k &= \left(2 - \frac{\eta_s(\phi_{k+1/2})}{\eta_s(\phi_{k+3/2})}\right) & b &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{h}{N} & c_k &= - \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\frac{\partial P_p}{\partial x}\right) dz \\
x_k &= a_k x_{k+1} + b + c_k & x_N &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_k &= b \sum_{i=k}^{N-1} \left(\prod_{j=k}^{i-1} (a_j) \right) + \sum_{i=k}^{N-1} \left(c_i \prod_{j=k}^{i-1} (a_j) \right) \\
\frac{\partial u_x}{\partial z}(z_k) &= \frac{x_k}{\eta_s(\phi_{k+1/2})} = \frac{1}{\eta_s(\phi_{k+1/2})} \left(\frac{h}{N} \frac{\partial h}{\partial x} B_k + C_k \right) \\
\frac{\partial u_x}{\partial z}(z) &= \frac{1}{\eta_s(\phi_{i(z)+1/2})} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{h}{N} \sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(B_j \left(\frac{\eta_s(\phi_{j-1/2})}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} - 1 \right) \right) + (h(t, x) - z) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\eta_s(\phi_{i(z)+1/2})} \left(\sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(C_j \left(\frac{\eta_s(\phi_{j-1/2})}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} - 1 \right) \right) + \int_z^h \left(\frac{\partial P_p}{\partial x} \right) dz \right)
\end{aligned}$$

On intègre une seconde fois (7.3), pour obtenir u_x :

$$\begin{aligned}
u_x(z_{i+1}) - u_x(z_i) &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial u_x}{\partial z}(z) dz \\
u_x(z) &= \frac{1}{\eta_s(\phi_{i(z)+1/2})} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{h}{N} (z - z_{i(z)}) \sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(B_j \left(\frac{\eta_s(\phi_{j-1/2})}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} - 1 \right) \right) + \left[h\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right]_{z_{i(z)}}^z \right) \\
&\quad + \frac{1}{\eta_s(\phi_{i(z)+1/2})} \left((z - z_{i(z)}) \sum_{j=i(z)+1}^{N-1} \left(C_j \left(\frac{\eta_s(\phi_{j-1/2})}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} - 1 \right) \right) + \int_{z=z_{i(z)}}^z \int_{\zeta=z}^h \left(\frac{\partial P_p}{\partial x}(t, x, \zeta) \right) d\zeta dz \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i(z)-1} (u_x(z_{j+1}) - u_x(z_j))
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{j=k+1}^{N-1} \left(B_j \left(\frac{\eta_s(\phi_{j-1/2})}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} - 1 \right) \right), & \gamma_k &= \sum_{j=k+1}^{N-1} \left(C_j \left(\frac{\eta_s(\phi_{j-1/2})}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} - 1 \right) \right) \\
\theta(z) &= \int_{z=z_{i(z)}}^z \int_{\zeta=z}^h \left(\frac{\partial P_p}{\partial x}(t, x, \zeta) \right) d\zeta dz, & \delta z &= z - z_{i(z)} \\
\left[h\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right]_{z_{i(z)}}^z &= \delta z \left(\frac{h}{N} (N - i(z)) - \frac{\delta z}{2} \right), & \left[h\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right]_{z_i}^{z_{i+1}} &= \frac{h^2}{N^2} \left(N - i - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x(z) &= \frac{1}{\eta_s(\phi_{i(z)+1/2})} \left(\delta z \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{h}{N} \beta_{i(z)} + \frac{h}{N} (N - i) - \frac{\delta z}{2} \right) + \delta z \gamma_{i(z)} + \theta(z) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i(z)-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^2}{N^2} \left(\beta_j + N - j - \frac{1}{2} \right) + \frac{h}{N} \gamma_j + \theta(z_{j+1}) \right)
\end{aligned}$$

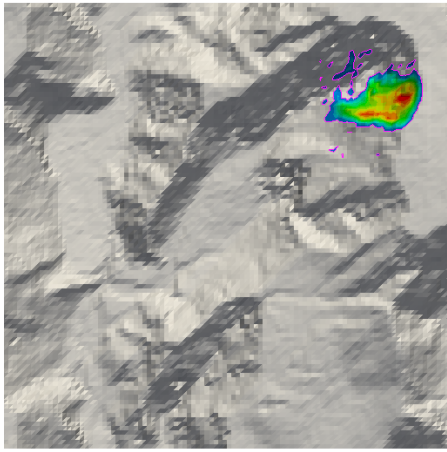
On intègre encore (7.3) pour obtenir l'intégrale de u_x

$$\begin{aligned}
\int_0^h u_x(z) dz &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} u_x(z) dz \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{1}{\eta_s(\phi_{i(z)+1/2})} \left(\delta z \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{h}{N} \beta_{i(z)} + \frac{h}{N} (N-i) - \frac{\delta z}{2} \right) + \delta z \gamma_{i(z)} + \theta(z) \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{h}{N} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^2}{N^2} \left(\beta_j + N - j - \frac{1}{2} \right) + \frac{h}{N} \gamma_j + \theta(z_{j+1}) \right) \right) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^3}{N^3} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\eta_s(\phi_{i+1/2})} \left(\beta_i + N - i - \frac{1}{3} \right) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} \left(\beta_j + N - j - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&\quad + \frac{h^2}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\eta_s(\phi_{i+1/2})} \gamma_i + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{j+1/2})} \gamma_j \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\eta_s(\phi_{i+1/2})} \left(\int_{z_i}^{z_{i+1}} \theta(z) dz + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{h}{N} \theta(z_j) \right) \\
\int_0^h u_x(z) dz &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^3}{N^3} \mathcal{B} + \frac{h^2}{N^2} \mathcal{C} + \mathcal{D}
\end{aligned}$$

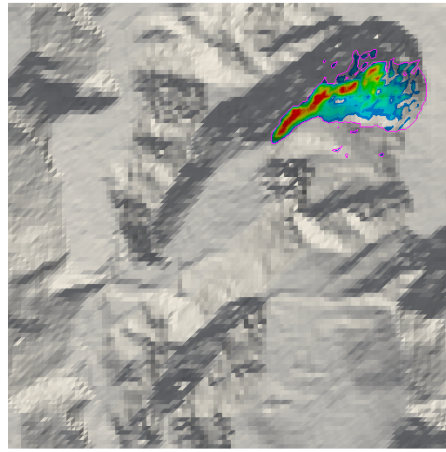
$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^{z=h} u_x(t, x, z) dz &= 0 \\
\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^3}{N^3} \mathcal{B} + \frac{h^2}{N^2} \mathcal{C} + \mathcal{D} \right) &= 0
\end{aligned}$$

où \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont développés page 14.

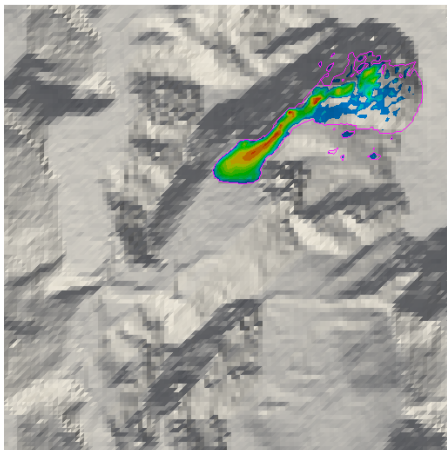
8 Annexe : progression de la coulée au cours du temps



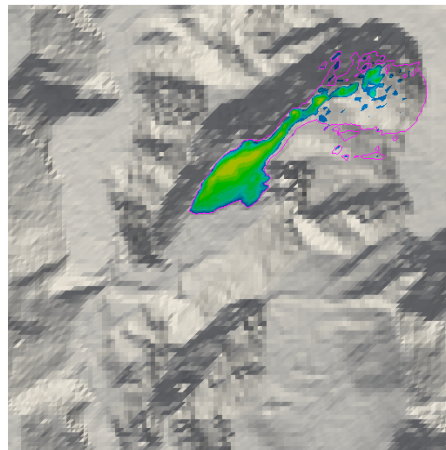
$T = 0$



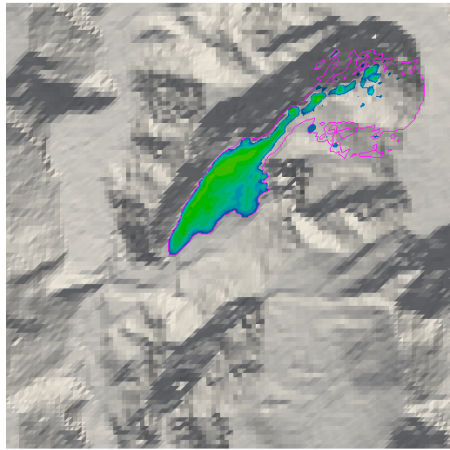
$T = 0.12s$



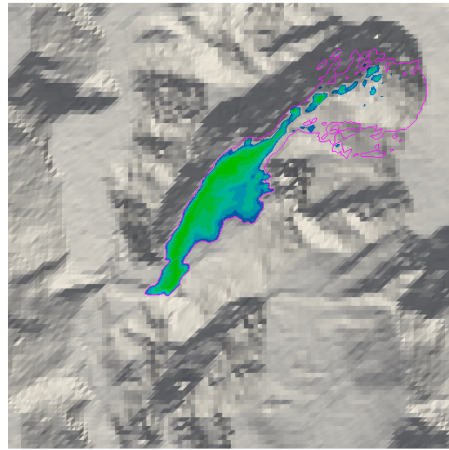
$T = 0.78s$



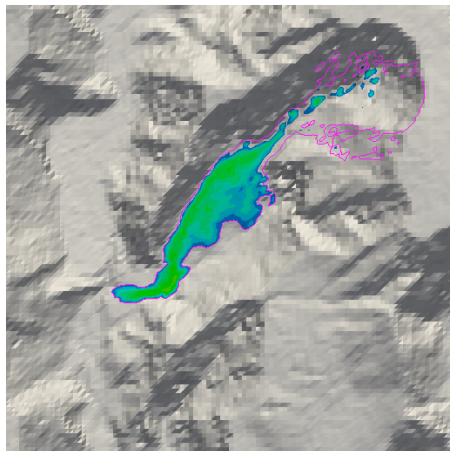
$T = 4.4s$



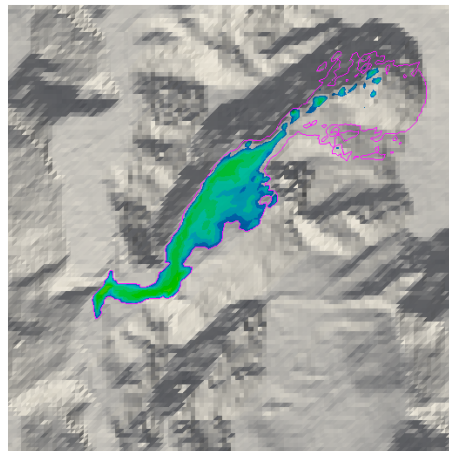
$T = 24s$



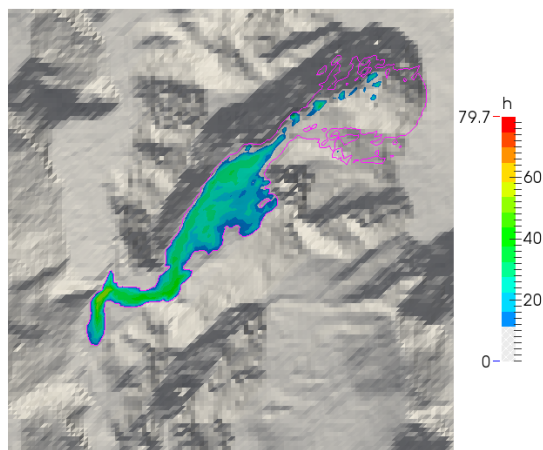
$T = 2 \text{ min } 14s$



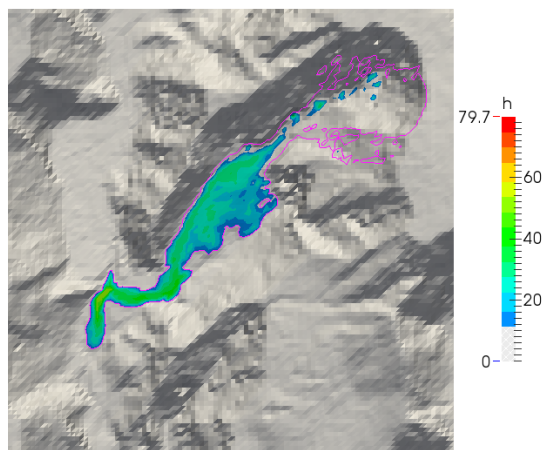
$T = 12 \text{ min } 23s$



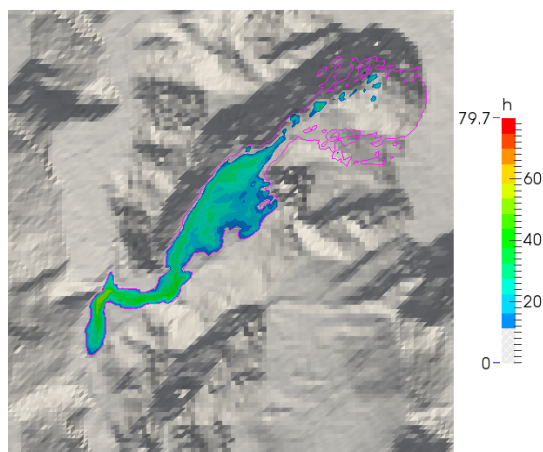
$T = 1h \ 8 \text{ min}$



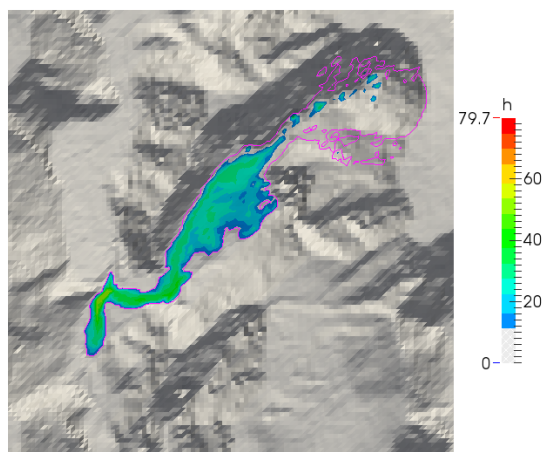
$T = 6\text{h } 17\text{ min}$



1 jour 10h



$T = 7\text{ jours } 23\text{h}$



$T = 11\text{ jours } 18\text{h}$

Bibliographie

- [1] E. Bardou. *Méthodologie de diagnostic des laves torrentielles sur un bassin versant alpin*. PhD thesis, École polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse, 2002.
- [2] N. Bernabeu, P. Saramito, and C. Smutek. Numerical modeling of shallow non-newtonian flows : Part ii. viscoplastic fluids and general tridimensional topographies. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 11(1) :213–228, 2014.
- [3] Lucie Bérenguer. Dynamique de l'érosion à la réunion illustrée par les glissements de Mahavel. *Rapport de stage L3 effectué au laboratoire Géosciences Réunion, Saint-Denis, Licence de Sciences de la Terre de l'Université de Nice Sophia-Antipolis*, 2017.
- [4] Philippe Coussot. Rhéologie des laves torrentielles. *La Houille Blanche*, 3, 1994.
- [5] Ryan M. Miller and Jeffrey F. Morris. Normal stress-driven migration and axial development in pressure-driven flow of concentrated suspensions. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 135 (2) :149–165, 2006.
- [6] Jeffrey F. Morris and Fabienne Boulay. Curvilinear flows of noncolloidal suspensions : The role of normal stresses. *Journal of Rheology*, 43 :1213, 1999.
- [7] Olivier Ozenda. Modélisation multicouche d'écoulements visqueux minces et calculs thermiques appliqués à la simulation d'épanchements de lave. *M2R mathématiques appliqués, UJF Grenoble*, 2014.
- [8] Pierre Saramito. *Efficient C++ finite element computing with Rheolef*. CNRS-CCSD ed., 2015. <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00573970>.
- [9] Pierre Saramito. *Efficient C++ finite element computing with Rheolef : vol. 2. discontinuous Galerkin methods*, CNRS-CCSD ed., 2015. CNRS-CCSD ed., 2015. <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00863021>.
- [10] Pierre Saramito, Claude Smutek, and Benoît Cordonnier. Numerical modelig of shallow non-newtonian flows : Part I. the 1D horizontal dam break problem revisited. *Int. J. Numer. Anal. Model. B*, 4 :283–298, 2013.