TD #10 — Trois récurrences à analyser

Exercice 1. *Tours de Hanoï*

L'algorithme récursif usuel de résolution du problème des *tours de Hanoï* (si vous ne connaissez pas allez voir, c'est rigolo) a un coût $T(1) = 1$, et $T(n) = 2T(n-1)+1$ pour une tour de n étages.

1. Dessinez l'arbre de la récurrence et donnez une estimation de $T(n)$ en fonction de n.
2. Prouvez que l'on a $T(n) =$ *ici : votre estimation*.

Exercice 2. *Calcul naïf d'un nombre de lapins*

Un calcul récursif naïf des termes de la suite « de Fibonacci » a un coût (s'approchant par) $T(0) = T(1) = 1$, et $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$.

1. Montrez par récurrence forte que l'on a $T(n) \leq \varphi^n$, avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfaisant $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Exercice 3. *Algorithme « de Strassen » de multiplication de matrices*

Le coût total de l'algorithme « de Strassen » de multiplication de matrices peut s'approcher par la récurrence $T(1) = 1$, $T(n) \leq 7T(n/2) + a(n/2)^2$.

1. Dessinez l'arbre de la récurrence pour n une puissance de deux, et donnez une estimation de $T(n)$ sous la forme d'un $\mathcal{O}$.
   (Dans cette question on pourra prendre $a = 4$ pour simplifier le terme $a(n/2)^2$ en n^2.)
2. Prouvez que pour $N = 2^n$ une puissance de deux l'on a $T(N) \leq \lambda N^\omega + \mu N^2$, avec $\omega = \log 7$ et λ et μ deux constantes à déterminer. Procédez par récurrence en considérant d'abord le cas récursif pour déterminer μ (en fonction de a), puis seulement ensuite le cas de base pour déterminer λ.