TD — Graphes (avec solutions)

Exercice 1. *Graphes (adapté d'un roman de Georges Perec)*

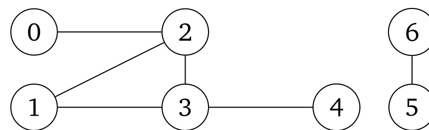
Ces échanges, qui sont suscités aussi bien par des occasions propices de vente ou d'achat (il s'agit alors de faire de la place) que par des inspirations subites, des lubies, des caprices ou des dégoûts, ne se font pas au hasard, et n'épuisent pas les douze possibilités de permutations qui pourraient se faire entre ces quatre lieux et que la figure 1 *met bien en évidence ; ils obéissent strictement au schéma de la* figure 2 *: quand Madame Marcia achète quelque chose, elle le met chez elle, dans son appartement, ou dans sa cave ; de là, ledit objet peut passer dans l'arrière-boutique, et de l'arrière-boutique dans le magasin ; du magasin enfin il peut revenir — ou parvenir s'il venait de la cave — dans l'appartement. Ce qui est exclu, c'est qu'un objet revienne dans la cave, ou arrive au magasin sans être passé par l'arrière-boutique, ou repasse du magasin dans l'arrière-boutique, ou de l'arrière-boutique dans l'appartement, ou enfin passe directement de la cave à l'appartement.*

1. Dessinez les graphes des figures 1 & 2.
2. Comment appelle-t'on les graphes semblables à celui de la figure 1.

> Le graphe de la figure 1 est un graphe *complet* (ici orienté).

Exercice 2. *Graphes (adapté d'un exercice de Marie Durand)*

On donne le graphe non orienté suivant :



1. Donnez le degré du sommet 2.

> Le sommet 2 a un degré de 3 : il possède trois arêtes le reliant aux sommets 0, 1 et 3.

2. Ce graphe est-il acyclique ? Si non, donnez un exemple de cycle.

> Ce graphe n'est pas acyclique : il possède un cycle $2 \to 1 \to 3 \to 2$.

3. Ce graphe est-il connexe ? Si non, donnez les ensembles de sommets formant ses composantes connexes.

> Ce graphe n'est pas connexe : il est par exemple impossible d'atteindre le sommet 6 à partir du sommet 0. Il possède deux composantes connexes : $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $\{5, 6\}$.

4. Donnez deux chemins allant du sommet 0 au sommet 4. Combien y a-t'il de chemins possibles entre ces sommets ? Combien de ces chemins sont élémentaires ?

> Il existe exactement deux chemins élémentaires (qui ne passent pas plusieurs fois par le même sommet) : $0 \to 2 \to 3 \to 4$ et $0 \to 2 \to 1 \to 3 \to 4$. Il existe en revanche une infinité de chemins quelconques puisque l'on peut répéter le cycle $2 \to 1 \to 3 \to 2$ un nombre arbitraire de fois.

5. Donnez une représentation en Python de ce graphe par liste de listes d'adjacence, utilisant des `list`.

> On peut prendre la convention que le graphe sera représenté par une liste de listes, où chaque sommet est représenté par l'entier Python lui correspondant : soit `G` cette liste, `G[i]` donne la liste des sommets reliés par une arête au sommet représenté par `i`. On a alors par exemple :
>
> ```
> G = [[2], [2, 3], [1, 0, 3], [1, 2, 4], [3], [6], [5]]
> ```
>
> Cette représentation n'est pas unique : l'ordre d'énumération des sommets dans les sous-listes n'est pas fixé. On aurait aussi pu représenter le graphe avec des `tuple` à condition qu'il ne soit pas nécessaire de pouvoir le modifier.

6. De quelle autre façon pourrait-on représenter ce graphe informatiquement ?

   Par exemple avec une matrice d'adjacence.

7. Écrivez une fonction Python `reachable(G, src, dst)` qui prend en entrée un graphe et les identifiants de deux sommets (représentés comme à la question précédente) et renvoie `True` (resp. `False`) s'il existe (resp. n'existe pas) un chemin dans le graphe entre les deux sommets.

   Pour répondre à cette question, il suffit d'effectuer un parcours de graphe quelconque depuis `src` et de renvoyer `True` si `dst` est rencontré en chemin, et `False` si l'on a visité tous les sommets accessibles depuis `src` sans le rencontrer. On propose de faire cela avec un parcours en profondeur, mais ce n'est pas le seul choix possible. On donne ici une implémentation itérative utilisant un dictionnaire pour stocker les sommets visités, mais encore une fois ce n'est pas la seule option.

```python
def reachable(G, src, dst):
    vis = {src: True} # on stocke les sommets visités dans un dictionnaire
    tbe = G[src].copy() # on initialise une pile des sommets à explorer
                        # une copie est nécessaire pour ne pas modifier G
    while tbe: # while len(tbe) > 0:
        nxt = tbe.pop()
        if nxt == dst:
            return True
        elif nxt not in vis:
            vis[nxt] = True
            for s in G[nxt]:
                if s not in vis: # optionnel
                    tbe.append(s)
    return False
```

Exercice 3. *Parcours complet & détection de cycle*

On considère des graphes représentés par tableau (liste) de liste d'adjacence en Python.

1. Écrivez une fonction `wfs` Python telle que `wfs(g,v)` effectue un parcours de graphe d'origine `v` et s'évalue en une `list` dont la case d'indice `i` contient `None` si `i` n'est pas accessible depuis `v`, et sinon `t` avec `t` son ordre de visite par le parcours (l'ordre dans lequel il a été ajouté dans la `list`).
   Votre fonction devra avoir un coût linéaire en la taille de ses arguments.

   Il y a plein de possibilités... On propose un parcours en profondeur, cette fois implémenté récursivement :

```python
def wfs(g, v):
    n = len(g)
    t = [None]*n
    i = 0
    def dfs(v):
        nonlocal i
        if (t[v] == None):
            t[v] = i
            i = i + 1
            for w in g[v]:
                dfs(w)
    dfs(v)
    return t
```

   L'instruction `nonlocal i` (hors programme) permet d'indiquer que la variable `i` utilisée dans la fonction interne `dfs` fait référence à celle déclarée dans le corps de `wfs`.

2. Donnez une caractérisation des graphes non-orientés pour lesquels un résultat d'appel à `wfs` peut contenir des cases à `None`.

   Dans le cas d'un graphe non orienté la présence de `None` équivaut au fait que le graphe ne soit pas connexe, peu importe le point de départ du parcours.

3. Modifiez votre fonction `wfs` en une fonction `wfsf` qui visite *tous* les sommets du graphe (désormais non orienté, mais **peu importe sa connexité**) et s'évalue en une paire donnant le nombre de composantes

connexes et un tableau contenant en case `i` un entier indiquant sa composante connexe (on numérotera par exemple les $\#C$ composantes connexes par des entiers 0, 1, …, $\#C-1$).
Cette fonction devra être de **coût linéaire** en la taille de son argument.

On ne peut pas se permettre de passer trop de temps à chercher un éventuel sommet encore non visité si l'on veut bien avoir un coût linéaire. Une solution simple est de partager le tableau de visite pour tous les parcours et de maintenir un pointeur vers son plus petit indice où l'on peut trouver une case encore non visitée (ce pointeur sera donc incrémenté exactement $\#S$ fois pour la *totalité* de l'exécution).
On peut alors par exemple adapter `wfs` en :

```
def wfsf(g):
    n = len(g)
    t = [-1]*n
    def dfs(v, c):
        if (t[v] == -1):
            t[v] = c
            for w in g[v]:
                dfs(w, c)
    c = 0
    for v in range(n):
        if (t[v] == -1):
            dfs(v, c)
            c = c + 1
    return t
```

4. Utilisez votre fonction de la question précédente pour écrire une fonction `acyc` telle que `acyc(g)` renvoie `True` si `g` représente (toujours de la même façon) un graphe non-orienté acyclique, et `False` sinon.

Il suffit d'utiliser `wfsf` pour compter le nombre $\#C$ de composantes connexes de `g`, de compter son nombre de sommets & d'arêtes $\#S$ & $\#A$, et de vérifier si $\#A = \#S - \#C$.
On propose :

```
def acyc(g):
    cell = wfsf(g)
    c = max(cell) + 1
    s = len(g)
    a = 0
    for v in range(s):
        a = a + len(g[v])
    a = a // 2
    return a == s - c
```

Exercice 4. *Bicoloriage*

Pour le besoin de cet exercice, on dit d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ qu'il est *biparti* si $A \neq \emptyset$ et S est l'union disjointe de L, R non vides tels que $(u, v) \in A \Rightarrow ((u \in L \wedge v \in R) \vee (u \in R \wedge v \in L))$. (Autrement dit, toute arête de G connecte nécessairement un sommet de L à un sommet de R.) On définit également le *nombre chromatique* d'un graphe G (noté $\chi(G)$) comme le nombre minimal n de couleurs pour lequel G est n-coloriable (c'est à dire que n couleurs sont suffisantes pour que chaque sommet soit colorié d'une couleur différente de celle de tous ses voisins).

1. Montrez l'équivalence (G est biparti) $\Longleftrightarrow \chi(G) = 2$.

$\Rightarrow$: Soient L, R les sous-ensembles de S donnés par le fait que G est biparti, on peut colorier chaque sommet de L en une couleur (disons noir) et chaque sommet de R en une autre (disons rouge). Par le fait que G est biparti, aucun sommet de L n'est adjacent à un sommet de L et de même pour R, et ce coloriage est valide. De plus par le fait que $A \neq \emptyset$, G n'est pas 1-coloriable, et donc $\chi(G) = 2$.
$\Leftarrow$: Si $\chi(G) = 2$ alors A et S sont tous-deux non vides. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ les ensembles de sommets de S coloriés respectivement en noir et en rouge par un 2-coloriage valide, ils sont non vides et forment une partition de S. De plus, toute arête $(u, v) \in A$ connecte nécessairement un sommet de $\mathcal{B}$ à un sommet de $\mathcal{R}$ puisque sinon le coloriage ne serait pas valide. On peut donc prendre $L = \mathcal{B}$ et $R = \mathcal{R}$ comme bipartition de G.

2. Déduisez de cela qu'un arbre de taille > 1 est biparti.

Un arbre non trivial est 2-coloriable : par exemple, on distingue un sommet arbitraire comme racine que l'on colorie en noir, puis l'on colorie ses enfants (non vides) de profondeur impaire (resp. paire) en rouge (resp. en noir). Il est donc biparti par la question précédente.

3. Montrez que $\chi(C_n) = 2$ ssi. $n \geq 3$ est pair.

On considère des représentations canoniques de C_n, avec $S = [\![n]\!]$ et $A = \{(0,1),(1,2),\ldots,(n-1,0)\}$.
Par $A \neq \emptyset$, C_n n'est jamais 1-coloriable.
Si n est pair, les sommets voisins d'un sommet pair sont impairs, et vice-versa : c'est évident pour tout sommet autre que 0 et $n-1$, et c'est aussi vrai dans ce dernier cas puisque $n-1$ est impair. Un 2-coloriage coloriant les sommets pairs en noir et les sommets impairs en rouge est donc valide, et minimal par ce qui précède.

Si n est impair, on va montrer (par un parcours de l'arbre des possibilités) que tout 2-coloriage de G est invalide. On commence par colorier 0 en noir sans perte de généralité. On a deux choix potentiels pour le sommet 1, mais tout coloriage où il serait colorié en noir serait invalide ; il suffit donc de considérer les coloriages où il est colorié en rouge. De même pour le sommet 2 : tout coloriage où il serait colorié en rouge serait invalide, et il suffit de considérer les coloriages où il serait colorié en noir. On procède de même pour les sommets restants jusqu'à $n-2$ inclus : les sommets pairs sont nécessairement coloriés en noir et les sommets impairs en rouge. C'est notamment le cas de $n-2$, ce qui fait que $n-1$ ne peut pas être colorié en rouge dans un coloriage valide. Puisqu'il est adjacent à 0, il ne peut pas non plus être colorié en noir, et il s'ensuit que G n'est pas 2-coloriable (il est par contre 3-coloriable, puisque le coloriage partiel précédent peut être trivialement complété en un coloriage valide en coloriant $n-1$ en bleu (disons)).

Remarque : si G' est un sous-graphe de G, il est immédiat que $\chi(G) \geq \chi(G')$ (un coloriage valide de G restant valide pour ses sous-graphes puisque ceux-ci sont obtenus en *retirant* des sommets et des arêtes (et donc des contraintes)). On a donc notamment que tout graphe contenant des cycles de longueur impaire n'est pas 2-coloriable.

4. Décrivez un algorithme qui décide si un graphe est 2-coloriable, et le colorie le cas échéant.

On réalise un parcours (complet) du graphe comme à l'exercice précédent, en coloriant chaque point de départ du parcours en noir. Tout sommet visité est alors colorié de l'autre couleur que celle de son parent dans l'arborescence du parcours, et l'on détecte l'invalidité du coloriage en considérant les éventuelles couleurs déjà connues de ses voisins.

5. Proposez-en une implémentation Python pour un graphe représenté comme à l'exercice précédent.

On propose :

```
def bicolor(g):
    n = len(g)
    cols = [-1]*n
    def dfs(v, col):
        if (cols[v] == -1): # pas encore colorié
            cols[v] = col
            for w in g[v]: # on essaye de colorier les voisins
                           # avec l'autre couleur
                if (not dfs(w, 1 - col)):
                    return False
        elif (cols[v] != col): # on devrait colorier v
                               # avec deux couleurs différentes
            return False
        return True
    for v in range(n):
        if (cols[v] == -1):
            if (not dfs(v, 0)):
                return False, None
    return True, cols
```

(L'utilisation d'exceptions simplifierait grandement la sortie de la fonction interne en cas de non coloriage, mais celles-ci ne sont pas au programme d'ITC...)