DM #3 — Deux exercices d'algorithmique d'automne

Exercice 1. *Les œufs mystérieux*

On vous donne un panier d'œufs mystérieux et vous indique une tour de N étages. Votre tâche est de déterminer à partir de quel étage lâcher un œuf le cassera. Vous savez que cet étage existe et est le même pour tous les œufs, que si un œuf n'est pas cassé (respectivement, est cassé) à un étage il ne sera pas cassé (resp., sera cassé) à tout étage inférieur (resp., supérieur). De plus, un œuf lâché mais non cassé n'est pas endommagé : il ne cassera pas plus bas qu'initialement.

L'objectif de cet exercice est de concevoir trois algorithmes permettant de déterminer le premier étage à partir duquel les œufs cassent, avec trois limites différentes sur le nombre *maximum* (c'est à dire, dans le pire cas) d'œufs que vous pouvez être amené à casser afin de trouver le résultat.

On demande seulement une description informelle (mais néanmoins précise !) des algorithmes.

1. Donnez un algorithme cassant *un* œuf dans le pire cas. Quel est le nombre maximum de lâchés effectués dans le pire cas ?
2. Donnez un algorithme effectuant le plus petit nombre de lâchés dans le pire cas. Quel est le nombre maximum d'œufs cassés dans le pire cas (à une constante près) ?
3. Donnez un algorithme cassant *deux* œuf dans le pire cas, dont le nombre de lâchés effectués dans le pire cas est $\sqrt{N}$ (à d'éventuelles constantes multiplicatives et additives près).

Exercice 2. *Le puzzle des tours de Hanoï*

On considère une tour de N étages (qui peut ou non servir à lancer des œufs) constitués de disques concentriques de rayon strictement décroissant (du bas en haut de la tour). Ces disques sont creux en leur centre et empilés dans un piquet, et l'on dispose de deux autres piquets vides dans lesquels aucun disque n'est initialement empilé. L'objectif du puzzle « des tours de Hanoï » consiste à transférer la tour du piquet sur lequel elle se trouve initialement sur un autre piquet (éventuellement désigné), en observant les contraintes suivantes :

- on ne peut retirer que les disques au sommet des piquets ;
- tout disque ne peut être empilé qu'au sommet d'un piquet vide ou sur un piquet dont le disque sommital est de rayon strictement plus grand (notamment, on ne peut pas stocker les disques ailleurs que sur un piquet).

1. Proposez un algorithme (décrit informellement mais précisément) permettant de résoudre ce problème.

2. Analysez le coût de votre algorithme selon la métrique « nombre de déplacements effectués ».
3. Montrez que toute résolution du puzzle nécessite *au moins* $2^N - 1$ déplacements de disques.