Correction du DM de “Processus Stochastiques et Applications Financières”

2A IF ENSIMAG

8 décembre 2022

Problème. Partie I. 1) (1 pt) On a $U_N = Z_N$ puis pour tout $0 \leq n \leq N-1$ on a $U_n \geq Z_n$ par la définition de U_n comme le maximum entre Z_n et autre chose. Donc U majore Z.

Pour voir que U est une surmartingale on peut tout d'abord vérifier par récurrence descendante que c'est un processus intégrable. En effet $U_N = Z_N$ est intégrable puisque par hypothèse Z est un processus intégrable. Supposons que U_{n+1} est intégrable. On peut faire la majoration

$$\mathbb{E}|U_n| \leq \mathbb{E}|Z_n| + \mathbb{E}|\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}|Z_n| + \mathbb{E}[\mathbb{E}(|U_{n+1}|\,|\mathcal{F}_n)] = \mathbb{E}|Z_n| + \mathbb{E}|U_{n+1}| < \infty$$

qui montre que U_n est intégrable (à la première inégalité on a utilisé $|\max(a,b)| \leq |a| + |b|$ et à la deuxième l'inégalité de Jensen conditionnelle).

Par ailleurs Z est un processus adapté donc Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $0 \leq n \leq N$. Donc $U_N = Z_N$ est immédiatement $\mathcal{F}_N$-mesurable. Puis, pour $0 \leq n \leq N-1$, on utilise le fait que Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, que pour toute v.a. Y intégrable la v.a. $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et que le maximum entre deux v.a. $\mathcal{F}_n$-mesurables est $\mathcal{F}_n$-mesurable, pour conclure à la $\mathcal{F}_n$-mesurabilité de U_n.

Il reste à vérifier la propriété de surmartingale mais celle-ci découle de la relation

$$U_n = \max\big(\, Z_n,\, \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\,\big)$$

qui fait que

$$U_n \geq \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1.$$

2) (1 pt) Soit $Y = (Y_n)_{0\leq n\leq N}$ une martingale majorant Z, i.e. avec $Y_n \geq Z_n$, $\forall 0 \leq n \leq N$. Montrons par récurrence descendante que $Y_n \geq U_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$.

On a déjà $Y_N \geq Z_N = U_N$. Soit $1 \leq n \leq N$, supposons que $Y_n \geq U_n$. Le passage à l'espérance conditionnelle conserve les inégalités larges et Y est une surmartingale on a donc

$$\mathbb{E}(U_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq Y_{n-1}.$$

Donc on a à la fois $Y_{n-1} \geq Z_{n-1}$ et $Y_{n-1} \geq \mathbb{E}(U_n|\mathcal{F}_{n-1})$ ce qui entraîne

$$Y_{n-1} \geq \max\big(\, Z_{n-1},\, \mathbb{E}(U_n|\mathcal{F}_{n-1})\,\big) = U_{n-1},$$

et permet de conclure.

La surmartingale U est bien la plus petite qui majore Z, la proposition 1 est prouvée.

3) (1 pt) Il est impossible que $\{0 \leq k \leq N : U_k = Z_k\} = \emptyset$, et donc que $\tau_0 = +\infty$, puisqu'il y a au moins l'instant $k = N$ pour lequel on a $U_k = Z_k$. Donc soit $\tau_0 = k$ pour un certain $0 \leq k \leq N-1$, soit ceci n'arrive pas et on a $\tau_0 = N$. Donc τ_0 est bien à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$.

Pour montrer que τ_0 est un temps d'arrêt (sous-entendu un $(\mathcal{F}_n)$-t.a.) il suffit d'après la remarque 4.3.1 du cours de vérifier que pour tout $0 \leq n \leq N$ on a $\{\tau_0 = n\} \in \mathcal{F}_n$. Or

$$\{\tau_0 = n\} = \{U_0 \neq Z_0\} \cap \{U_1 \neq Z_1\} \cap \ldots \cap \{U_{n-1} \neq Z_{n-1}\} \cap \{U_n = Z_n\},$$

et comme U et Z sont adaptés cet évènement est bien dans $\mathcal{F}_n$.

[**Variante sans passer par la remarque 4.3.1:** pour tout n on a

$$\{\tau_0 \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_n;$$

en effet c'est l'évènement ”il existe un $0 \leq k \leq n$ tel que $U_k = Z_k$”.]

On conclut que τ_0 est un t.a. à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$, et est donc en particulier borné.

4) (1 pt) Le théorème 4.3.1 du cours dans sa version surmartingale nous dit que le processus arrêté U^{τ_0} est encore une surmartingale (puisque U en est une).

Or ici ce qu'on va vouloir montrer c'est que la surmartingale U arrêtée au temps d'arrêt particulier τ_0 est une martingale (donc plus qu'une surmartingale).

Retenons cependant, pour la suite du problème, l'information que U^{τ_0} est un processus intégrable et adapté.

5) (1 pt) Pour voir que $U_{n\wedge\tau_0} = U_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{k\leq\tau_0}(U_k - U_{k-1})$ il suffit de procéder exactement comme à la fin de la preuve du théorème 4.3.1 pp 30-31 du poly (avec U à la place de X et τ_0 à la place de T).

6) (1.5 pt) Soit $0 \leq n \leq N-1$. Sur l'évènement $\{n+1 \leq \tau_0\}$ on a $n < \tau_0$ c'est à dire que jusqu'à l'instant n compris U n'a pas encore touché Z est resté strictement au-dessus (puisque U majore Z). En particulier $U_n > Z_n$. C'est donc que $U_n = \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ (puisque U_n ne vaut pas Z_n).

Par la question 5) on a que $U^{\tau_0}_{n+1} - U^{\tau_0}_n = \mathbf{1}_{n+1\leq\tau_0}(U_{n+1} - U_n)$. On remarque que $\{n+1 \leq \tau_0\} = \{\tau_0 \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ (car comme τ_0 est un t.a. l'évènement $\{\tau_0 \leq n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$ qui est stable par passage au complémentaire).

En utilisant toutes ces informations il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((U^{\tau_0}_{n+1} - U^{\tau_0}_n)\,|\,\mathcal{F}_n\big) &= \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{n+1\leq\tau_0}(U_{n+1} - U_n)\,|\,\mathcal{F}_n\big) \\
&= \mathbf{1}_{n+1\leq\tau_0}\mathbb{E}\big(U_{n+1} - \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\,|\,\mathcal{F}_n\big) \\
&= \mathbf{1}_{n+1\leq\tau_0}\big(\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathbb{E}\big(U^{\tau_0}_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\big) = U^{\tau_0}_n$, $0 \leq n \leq N-1$ (puisque $U^{\tau_0}_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable), ce qui prouve que U^{τ_0} est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale sous $\mathbb{P}$.

7) (1 pt) On peut au choix utiliser le théorème 4.3.2 ou pas pour répondre à cette question.

Par le thm 4.3.2: On utilise le fait que U^{τ_0} est une martingale et τ_0 un t.a. borné. On a

$$U_0 = U^{\tau_0}_0 = \mathbb{E}(U^{\tau_0}_{\tau_0}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_{\tau_0}|\mathcal{F}_0)$$

(le théorème d'arrêt a été utilisé à la deuxième égalité).

Sans le thm 4.3.2: En utilisant simplement le fait que U^{τ_0} est une martingale et $\tau_0 \leq N$ il vient

$$U_0 = U^{\tau_0}_0 = \mathbb{E}(U^{\tau_0}_N|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_{\tau_0}|\mathcal{F}_0).$$

On a donc $U_0 = \mathbb{E}(U_{\tau_0}|\mathcal{F}_0)$ et par définition de τ_0 on a $U_{\tau_0} = Z_{\tau_0}$. On a donc bien $U_0 = \mathbb{E}(Z_{\tau_0}|\mathcal{F}_0)$.

8) (1.5 pt) Tout d'abord notons que pour toute surmartingale Y on a $\mathbb{E}(Y_m|\mathcal{F}_n) \leq Y_n$ pour $m \geq n$ (il suffirait d'adapter la preuve par récurrence de la propriété 4.1.1 du cours). Soit $\tau \in \mathcal{T}_{0,N}$. Par le théorème 4.3.1 du cours on a que U^τ est une **sur**martingale (**bien sûr!**; coquille corrigée le 13/12). On a donc en utilisant $\tau \leq N$,

$$U_0 = U^\tau_0 \geq \mathbb{E}(U^\tau_N|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_\tau|\mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}(Z_\tau|\mathcal{F}_0),$$

car $U_\tau \geq Z_\tau$ et le passage à l'espérance conditionnelle conserve les inégalités larges.

Donc U_0 est un majorant de $\mathbb{E}(Z_\tau|\mathcal{F}_0)$ pour τ parcourant $\mathcal{T}_{0,N}$. Mais τ_0 appartient à $\mathcal{T}_{0,N}$ et touche ce majorant. C'est donc qu'effectivement

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}(Z_\tau\,|\,\mathcal{F}_0)$$

et la proposition 3 est montrée.

Partie II. 9) (1 pt) Si on arrive à l'instant N sans qu'il y ait eu exercice auparavant le vendeur va devoir fournir la richesse G_N pour pouvoir honorer le contrat en N, on a donc $X_N \geq G_N$. Mais il semble juste que $X_N = G_N$ et non pas $X_N > G_N$ car il n'y a plus maintenant de risque ultérieur à couvrir (on arrive à maturité).

10) (1 pt) On est dans le cadre du modèle CRR viable et complet vu en cours. On sait que pour être certain en $N-1$ d'avoir à sa disposition la richesse X_N en N on peut investir dans une stratégie autofinancée ϕ qui réplique la richesse X_N, i.e. telle que $V_N(\phi) = X_N$. Par les arguments martingale développés en cours - cf en particulier la formule (5.4.1) - on a

$$V_{N-1}(\phi) = \frac{S^0_{N-1}}{S^0_N}\mathbb{E}^*(X_N|\mathcal{F}_{N-1}).$$

Cette dernière quantité nous donne donc la richesse dont il faut disposer à l'instant $N-1$ pour être certain d'avoir à sa disposition la richesse X_N à l'instant N.

11) (1 pt) Si le détenteur de l'option décide d'exercer en $N-1$ il faut bien que le vendeur dispose en $N-1$ d'au moins G_{N-1} euros d'où $X_{N-1} \geq G_{N-1}$ (mais contrairement à ce qui se passe dans la question 9) on ne demande pas l'égalité car le vendeur peut avoir besoin de plus, notamment si c'est ce qu'il faut pour investir dans la stratégie évoquée à la question 10)).

12) (1.5 pt) En tenant compte des questions 10) et 11) on voit qu'il nous faut à la fois

$$X_{N-1} \geq \frac{S^0_{N-1}}{S^0_N}\mathbb{E}^*(X_N|\mathcal{F}_{N-1})$$

et $X_{N-1} \geq G_{N-1}$. Il semble donc juste de prendre $X_{N-1} = \max\Big(G_{N-1},\, S^0_{N-1}\mathbb{E}^*(\frac{X_N}{S^0_N}|\mathcal{F}_{N-1})\Big)$.

Puis on réitère le raisonnement: en $N-2$ il faut au vendeur une richesse au moins égale à G_{N-2}; mais il faut aussi que cette richesse lui assure d'avoir X_{N-1} en $N-1$, et soit donc plus grande que $\frac{S^0_{N-2}}{S^0_{N-1}}\mathbb{E}^*(X_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2})$. On a donc

$$X_{N-2} = \max\Big(G_{N-2},\, S^0_{N-2}\mathbb{E}^*(\frac{X_{N-1}}{S^0_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2})\Big)$$

etc...

Ce qui donne la définition récursive descendante de X énoncée dans la question 12).

13) (1 pt) On a

$$\begin{cases} X_N/S^0_N &= G_N/S^0_N \\ X_n/S^0_n &= \max\Big(G_n/S^0_n,\, \mathbb{E}^*(\frac{X_{n+1}}{S^0_{n+1}}|\mathcal{F}_n)\Big), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \tilde{X}_N &= \tilde{G}_N \\ \tilde{X}_n &= \max\Big(\tilde{G}_n,\, \mathbb{E}^*(\tilde{X}_{n+1}|\mathcal{F}_n)\Big), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Donc $\tilde{X}$ est l'enveloppe de Snell de $\tilde{G}$.

14) (1 pt) D'après les résultats de la partie I le processus $\tilde{X}$ est une surmartingale donc le processus $-\tilde{X} = (-\tilde{X}_n)_{0\leq n\leq N}$ est une sous-martingale. D'après la décomposition de Doob (théorème 4.5.1 du cours) on a

$$-\tilde{X}_n = N_n + A_n, \quad 0 \leq n \leq N,$$

avec N martingale et A processus prévisible croissant avec $A_0 = 0$. On a donc

$$\tilde{X}_n = M_n - A_n, \quad 0 \leq n \leq N,$$

où on a posé $M_n = -N_n$, $0 \leq n \leq N$. Le processus M est à nouveau une martingale (par linéarité de l'espérance conditionnelle), et on a donc bien le résultat demandé.

15) (1 pt) On pose $h = S^0_N M_N$. Notons qu'on peut construire (marché CRR viable et complet) une stratégie autofinancée $H = (H^0, H^1)$ telle que $V_N(H) = h$ (on ne parle pas d'admissibilité car on n'a pas fait d'hypothèse sur le signe de G; si G est à valeurs positives cela entraîne par positivité de l'espérance conditionnelle que X est positif et comme A est aussi positif cela entraîne $M_N \geq 0$ et donc $h \geq 0$ et donc l'admissibilité, cf Rq 5.6.1).

On a (proposition 5.4.1)

$$\tilde{V}_n(H) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(H)\,|\,\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[\frac{h}{S^0_N}\,|\,\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[M_N\,|\,\mathcal{F}_n] = M_n, \quad \forall 0 \leq n \leq N,$$

d'où le résultat.

16) (1 pt) Si le vendeur investit le prix de vente $X_0 = \tilde{X}_0 = \tilde{V}_0(H) = V_0(H) = M_0$ dans une telle stratégie, il a à tout instant $0 \leq n \leq N$ la richesse

$$V_n(H) = S_n^0 \tilde{V}_n(H) = S_n^0 M_n = S_n^0 \tilde{X}_n + S_n^0 A_n = X_n + S_n^0 A_n \geq X_n \geq G_n.$$

CQFD.

17) (1.5 pt) On peut investir dans une stratégie autofinancée H telle que $V_n(H)$ à tout instant est plus grand que G_n, et telle que plus précisément $\tilde{V}_n(H) - A_n = \tilde{X}_n \geq \tilde{G}_n$.

Imaginons qu'on ait une autre stratégie H' autofinancée et un autre processus croissant prévisible partant de zéro A' tels que

$$\tilde{V}_n(H') - A'_n \geq \tilde{G}_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

On pourrait montrer que le processus $(\tilde{V}_n(H') - A'_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une surmartingale (car

$$\mathbb{E}^*[\tilde{V}_n(H') - A'_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{V}_{n-1}(H') - A'_n \leq \tilde{V}_{n-1}(H') - A'_{n-1} \quad).$$

Cela serait donc une surmartingale majorant $\tilde{G}$. Mais H nous donne la surmartingale $\tilde{X}$ qui est la plus petite qui majore $\tilde{G}$. D'où le prix "juste".

18) (1 pt) D'après la généralisation de la proposition 3 on a

$$\tilde{X}_n = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{G}_\tau \,|\, \mathcal{F}_n)$$

i.e.

$$X_n = S_n^0 \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^*\Big(\frac{G_\tau}{S_\tau^0} \,|\, \mathcal{F}_n\Big)$$

19) (1 pt) En appliquant la proposition 3 il vient (car $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$)

$$X_0 = \mathbb{E}^*\Big[\frac{G_{\tau_0}}{(1+r)^{\tau_0}}\Big] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*\big(\frac{G_\tau}{(1+r)^\tau}\big)$$

Il semble qu'exercer au premier instant où X touche G maximise le gain.