Chap.3 : Processus de Poisson - Processus de naissance et de mort - notion de file d'attente

3.1 Processus de Poisson - Simulation - Propriétés

Rappel : $(X_i)_{i\geq 1}$ suite i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (temps d'interoccurence)
On définit les temps d'occurence T_n par

$$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = T_{n-1} + X_n, \ \ \forall n \geq 1$$

Alors le processus $N = (N_t)_{t\geq 0}$ est défini par

$$N_t = \max\{n \geq 0 : \ T_n \leq t\}, \quad \forall t \geq 0.$$

C'est le "processus de Poisson d'intensité λ". Il vérifie $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, $\forall t > 0$.
(cf exercice 2.1.1)

Définition (3.1.1)

Soit $t > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $U_1, \ldots, U_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, t])$. Le vecteur

$$(U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$$

est appelé "vecteur des statistiques d'ordre des U_i's" (la notation $U_{(i)}$ signifie que les U_i ont été ordonnés par ordre croissant).

On liste maintenant une série de propriétés du processus de Poisson.

Proposition (3.1.1)

i) Conditionnellement à $\{N_t = n\}$ le vecteur $(T_1, \ldots, T_n)$ est de même loi que la loi jointe des statistiques d'ordre de n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, t])$.
ii) N est à accroissements indépendants : c'est à dire que pour tous $0 < t_1 < \ldots < t_k$ les v.a. N_{t_1}, $N_{t_2} - N_{t_1}$, ..., $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
iii) N est à accroissements stationnaires : c'est à dire que pour tous $s, t > 0$ on a que $N_{t+s} - N_t$ a même loi que N_s.

Proposition (3.1.1, suite)

iv) Pour tout $h > 0$ on a

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$$

et

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h).$$

v) N est de Markov homogène.

Preuve : [cf p57 du poly de Hervé Guiol]

Exercice 3.1.1 : Soit un processus de Poisson $N = (N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\lambda > 0$. Soit $0 < T < \infty$. Proposer deux algorithmes de simulation d'une trajectoire de N sur $[0, T]$.

Proposition (3.1.2)

Soient N_1 et N_2 deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2.
i) Alors $N = N_1 + N_2$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
ii) On note T_n les instants de saut de N. On pose

$$G(T_n) = \begin{cases} 1 & si \quad T_n \quad \textit{est un instant de saut de} \quad N_1 \\ 0 & si \quad T_n \quad \textit{est un instant de saut de} \quad N_2 \end{cases}$$

Alors les v.a. $(G(T_n))_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}er(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

Elements de démonstration : [au tableau]

Le processus de Poisson peut être vu comme modélisant le nombre de clients dans un magasin à l'instant t, ces clients arrivant avec une intensité λ.
On illustre maintenant les calculs qui peuvent être faits à l'aide du processus de Poisson, dans une série d'exercices.

☛ place à l'exercice 2 de la fiche 5.

3.2 Processus de naissance et de mort

Il s'agit d'une généralisation du processus de Poisson : les temps entre les sauts sont de loi exponentielle, mais les sauts peuvent s'effectuer vers le bas.

Plus précisément : le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, de taux de naissance $\lambda > 0$ et de taux de mort $\mu > 0$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, est construit de la façon suivante ([dessins au tableau]) :

- $X_0 = 0$
- On tire $\tau_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
  $T_1 = \tau_1$ est le temps de naissance du premier individu.
- Puis on tire $\bar{\tau}_1 \sim \mathcal{E}(\mu)$: le temps de vie du premier individu.
  $\tau_2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$: le temps de naissance du deuxième individu.
  - Si $\tau_2 < \bar{\tau}_1$ on a le début de trajectoire représenté à la Fig. 3.2.1.
  - Si $\bar{\tau}_1 < \tau_2$ on a le début de trajectoire représenté à la Fig. 3.2.2 (la trajectoire "redescend").
- Etc...

Remarque 3.2.1 : Quand le processus touche zéro on repart comme à l'instant initial où $X_0 = 0$.

Remarque 3.2.2 : X peut être vu comme $X = N_1 - \bar{N}_2$ où N_1 est un processus de Poisson d'intensité λ et où $\bar{N}_2$ est un processus de Poisson d'intensité μ.
Mais où $\bar{N}_2$ est "neutralisé" quand X touche zéro.

Le processus X est défini par la donnée de la loi de X_0 (ici $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$) et du "générateur"

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & (-\mu-\lambda) & \lambda & & & \\ & \mu & (-\mu-\lambda) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \infty \end{array} \end{array} .$$

NB : Par convention $Q(x,x) = -\sum_{y \neq x} Q(x,y)$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Le processus X est un "processus de Markov à sauts". En particulier il est Markov homogène (cf définition 2.1.2). On note alors

$$P_t = \big(p_t(x,y)\big)_{(x,y)\in\mathbb{N}^2}$$

où $p_t(x,y) = \mathbb{P}(X_{s+t} = y | X_s = x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ et $t, s \geq 0$.

Par une démonstration analogue à celle de la Proposition 2.2.1 on montre qu'on a les équations de Chapman-Kolmogorov

$$\forall s,t \geq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{N}, \quad p(t+s,x,y) = \sum_{z\in\mathbb{N}} p(t,x,z)p(s,z,y) \quad (3.2.1).$$

Cela permet de montrer la proposition suivante

Proposition (3.2.1)

On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_t & = & QP_t \\ P_0 & = & Id \end{array} \right.$$

Preuve : [Au tableau]

Par analogie avec le cas discret on a

Définition (3.2.1)

Une mesure π est invariante pour X si

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \forall t \geq 0, \quad \sum_{y \in \mathbb{N}} \pi(y) p_t(y,x) = \pi(x),$$

ou, écrit matriciellement, $\pi\, P_t = \pi$.

Théorème (3.2.1, Equations de la balance)

Une mesure π est invariante pour X si et seulement si $\pi Q = 0$.

Elements de démonstration : [au tableau]

Les équations de la balance permettent donc d'identifier une mesure invariante pour X. Il est alors en général facile de construire par normalisation une mesure de probabilités invariante pour X.

L'intérêt réside dans le théorème de convergence suivant, analogue au temps discret.

Théorème (3.2.2)

S'il existe une mesure de probabilités invariante π pour X elle est unique et on a

$$\lim_{t\to\infty} p_t(x,y) = \pi(y), \quad x,y \in \mathbb{N}.$$

Preuve : Grimmet & Stirzaker, "Probability and random processes", Theorem 6.9.21.

3. Application : la file $M/M/1$

Nomenclature : le file $M(\lambda)/M(\mu)/1$ ce la signifie que

i) Les clients arrivent dans le magasin selon des temps de loi exponentielle, avec un taux $\lambda > 0$.

ii) Ils sont servis ("meurent", disparaissent du magasin) selon des temps de loi exponentielle, avec un taux $\mu > 0$.

iii) Il y a un et un seul serveur dans le magasin (il ne prend en charge qu'un client à la fois ; le nombre de clients ne peut donc sauter vers le bas que d'une hauteur 1 à chaque saut).

☛ Le nombre de clients à l'instant $t \geq 0$ dans le magasin c'est X_t où $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est le processus de taux de naissance λ et de taux de mort μ décrit à la section 3.2.

Question : Combien de clients y a-t-il en moyenne en temps long dans le magasin ?

[calculs au tableau]