Devoir à la maison de “Processus Stochastiques et Applications Financières”

à rendre pour le 8 décembre 2022

La notation dépendra grandement de la qualité de la rédaction. Les questions étoilées sont plus longues ou plus difficiles.

Problème: Valorisation d’options américaines.

Dans ce problème on cherche à donner, justifier et commenter une formule donnant le prix d’une option dite “américaine”.

Par opposition aux options dites “européennes” vues en cours le fonctionnement d’une option américaine est le suivant (plus de détails sur les notations et hypothèses seront donnés dans la partie II du problème): une échéance N est donnée et on a un “processus pay-off” $G = (G_n)_{0\le n\le N}$. Le détenteur d’une option américaine de pay-off G peut à tout moment de son choix $0 \le \tau \le N$ (en toute généralité cet instant est aléatoire) réclamer la richesse décrite par G et promise par l’option. C’est à dire que s’il décide d’exercer à l’instant τ il recevra la richesse G_τ.

Le problème se compose de deux parties. Dans la première on établit des résultats théoriques qui seront utilisés dans la deuxième. On peut tout à fait traiter la deuxième partie en admettant les résultats théoriques de la première partie (qui sont énoncés sous formes de propositions dans le texte).

***

Partie I: enveloppe de Snell.

Un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est donné, ainsi qu’un horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$ et une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$.

On a un processus adapté et intégrable $Z = (Z_n)_{0\le n\le N}$. Nous allons étudier l’enveloppe de Snell de Z. Il s’agit d’un processus $U = (U_n)_{0\le n\le N}$ défini par

$$\begin{cases} U_N &= Z_N \\ U_n &= \max\big(Z_n,\, \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\big), \quad \forall 0\le n\le N-1. \end{cases}$$

Dans les questions 1) et 2) on cherche à montrer la proposition suivante.

Proposition 1 *Le processus U est la plus petite surmartingale majorant le processus Z (i.e. telle que pour tout $0\le n\le N$ on a $U_n \ge Z_n$ p.s.).*

1) Vérifier que U majore Z et montrer que c’est une surmartingale.

2*) Soit $Y = (Y_n)_{0\le n\le N}$ une surmartingale majorant Z. Montrer que pour tout $0\le n\le N$ on a $Y_n \ge U_n$ et conclure.

Indication: On pourra effectuer une récurrence descendante et remarquer que si $Y_{n-1} \ge Z_{n-1}$ et $Y_{n-1} \ge \mathbb{E}(U_n|\mathcal{F}_{n-1})$ alors $Y_{n-1} \ge \max\big(Z_{n-1},\, \mathbb{E}(U_n|\mathcal{F}_{n-1})\big)$.

On considère maintenant le temps aléatoire

$$\tau_0 = \inf\{0 \le k \le N : U_k = Z_k\}.$$

Dans les questions 3) à 6) on va chercher à prouver le résultat suivant.

Proposition 2 *La variable aléatoire τ_0 est un temps d'arrêt et le processus arrêté $U^{\tau_0} = (U_{n\wedge\tau_0})_{0\le n\le N}$ est une martingale.*

3) Justifier que τ_0 est à valeurs dans $\{0,\dots,N\}$ et montrer que c'est un temps d'arrêt (on n'hésitera pas à utiliser la remarque 4.3.1 du cours).

4) Pourquoi ne peut-on pas utiliser directement le théorème 4.3.1 du cours pour établir la deuxième partie de la proposition 2 ?

5) Justifier que

$$U_{n\wedge\tau_0} = U_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k\le\tau_0}(U_k - U_{k-1}).$$

6*) Soit $0 \le n \le N-1$. Justifier que sur l'évènement $\{n+1 \le \tau_0\}$ on a $U_n > Z_n$ et en déduire que

$$\mathbb{E}\big((U^{\tau_0}_{n+1} - U^{\tau_0}_n)\,|\,\mathcal{F}_n\big) = 0.$$

Conclure.

Pour $0 \le n \le N$ on note $\mathcal{T}_{n,N}$ l'ensemble des temps d'arrêt qui prennent valeurs dans $\{n,\dots,N\}$. Dans les questions 7) à 8) on cherche à montrer le résultat suivant.

Proposition 3 *Le temps d'arrêt τ_0 vérifie*

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}(Z_\tau\,|\,\mathcal{F}_0).$$

7) Justifier que $U_0 = \mathbb{E}(U_{\tau_0}|\mathcal{F}_0)$ et en déduire la première égalité de la proposition 3.

8*) Soit $\tau \in \mathcal{T}_{0,N}$. Montrer que $U_0 \ge \mathbb{E}(Z_\tau\,|\,\mathcal{F}_0)$ et conclure.

Pour la suite du problème on admettra qu'une généralisation immédiate de la proposition 3 est:

$$U_n = \mathbb{E}(Z_{\tau_n}\,|\,\mathcal{F}_n) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}(Z_\tau\,|\,\mathcal{F}_n)$$

où $\tau_n = \inf\{n \le k \le N : U_k = Z_k\}$. On fera référence à ce résultat par "la généralisation de la proposition 3".

***

Partie II: formule de valorisation d'une option américaine et éléments de couverture.

On se place dans cette deuxième partie dans le cadre du modèle CRR vu en cours, et vu en TD à plusieurs reprises. On rappelle certaines notations.

Un horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On note r le rendement sans risque sur une période de temps et $S^0_n = (1+r)^n$ le prix à l'instant n de l'actif sans risque.

Le prix à l'instant n de l'actif risqué est noté S_n. La dynamique du processus $S = (S_n)_{0\le n\le N}$ est construite de la façon suivante.

On a $-1 < a < b$. On suppose $a < r < b$. On définit $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sur $(\Omega,\mathcal{F})$ on a une probabilité historique $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. On a une suite i.i.d. $(T_n)_{n=1}^N$ définie sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$ (on a $T_n(\omega) = \omega_n$ pour tout $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_N) \in \Omega$). On note $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ et

$$\forall 1 \le n \le N, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(T_i,\, 1 \le i \le n).$$

La valeur initiale S_0 est déterministe et supposée connue. Puis on a

$$\forall 0 \leq n < N, \quad S_{n+1} = S_n T_{n+1}.$$

On rappelle qu'on emploie le tilde pour dénoter les valeurs actualisées des quantités en jeu. Par exemple on note $\tilde{S}_n = S_n / S_n^0$ pour tout $0 \leq n \leq N$.

Enfin on notera $\mathbb{P}^*$ la mesure de probabilités risque-neutre mise en évidence en cours et en TD dans le modèle CRR satisfaisant les conditions énoncées ci-dessus.

Un processus adapté $G = (G_n)_{0 \leq n \leq N}$ à valeurs réelles est donné. Une option américaine définie par G est un contrat passé à l'instant $n = 0$ entre l'acheteur et le vendeur de l'option, qui donne à l'acheteur la possibilité d'empocher la richesse G_n s'il décide d'exercer l'option à l'instant $0 \leq n \leq N$. Il y a bien sûr au plus un instant d'exercice sur la durée de vie de l'option (i.e. sur l'intervalle $[\![0, N]\!]$): s'il y en a un l'option est clôturée à cet instant d'exercice, mais il se peut aussi qu'il n'y en ait pas (dans ce cas l'option se termine à l'échéance N, sans qu'il y ait eu exercice).

Par exemple si $G_n = (K - S_n)_+$ l'option est un "Put américain" (si l'acheteur exerce en N cela lui rapporte la même chose que le Put européen vu en cours; mais il peut décider d'exercer à un moment plus avantageux...).

On va chercher à donner la valeur X_n en $0 \leq n \leq N$ d'une option américaine décrite par G, en s'appuyant sur les résultats de la première partie. En particulier on aura une formule pour X_0 le prix de vente "juste" d'une telle option américaine. Pour l'instant on considère que X_n est la richesse "juste" que doit posséder le vendeur de l'option à l'instant $0 \leq n \leq N$ pour être certain de pouvoir honorer le contrat à tout instant $n \leq k \leq N$.

9) Expliquer pourquoi $X_N = G_N$.

10) De quelle richesse faut-il disposer à l'instant $N - 1$ pour être certain d'avoir à sa disposition la richesse X_N à l'instant N ?

11) Expliquer pourquoi il faut que $X_{N-1} \geq G_{N-1}$.

12*) Finalement, en raisonnant de proche en proche, montrer que le processus X est défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_N & = & G_N \\ X_n & = & \max\Big(G_n,\, S_n^0 \mathbb{E}^*\big(\frac{X_{n+1}}{S_{n+1}^0} | \mathcal{F}_n\big) \Big), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1. \end{array} \right.$$

13) Montrer que $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est l'enveloppe de Snell de $\tilde{G} = (\tilde{G}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Dans les questions 14) à 17) on cherche à se convaincre que le vendeur peut, partant de X_0, se constituer une richesse au moins égale à G_n à tout instant $0 \leq n \leq N$, et que X_n est le juste prix de l'option.

14) Montrer qu'il existe une martingale M et un processus prévisible croissant A partant de zéro tels que

$$\tilde{X}_n = M_n - A_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

15*) Montrer qu'il existe une stratégie autofinancée $H = (H^0, H^1)$ telle que

$$\tilde{V}_n(H) = M_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

16*) En déduire qu'en investissant X_0 dans une telle stratégie autofinancée le vendeur est certain d'avoir à sa disposition une richesse au moins égale à G_n à tout instant $0 \leq n \leq N$.

17) Qu'est-ce qui nous incite à penser que X_n est le juste prix à l'instant n de l'option américaine ?

Pour finir le problème on s'interroge sur l'instant auquel il est opportun pour le détenteur de l'option américaine de l'exercer.

18) Montrer que pour tout $0 \leq n \leq N$ on a

$$X_n = S_n^0 \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^*\big(\frac{G_\tau}{S_\tau^0} \,|\, \mathcal{F}_n\big)$$

où $\mathcal{T}_{n,N}$ est l'ensemble des temps d'arrêt qui prennent valeurs dans $\{n, \ldots, N\}$.

19) Montrer que

$$X_0 = \mathbb{E}^*\Big[\frac{G_{\tau_0}}{(1+r)^{\tau_0}}\Big]$$

où $\tau_0 = \inf\{0 \leq k \leq N : \ X_k = G_k\}$. Quel est à votre avis le temps d'exercice optimal ?