Calcul Stochastique Avancé

Hervé Guiol
TIMB/TIMC - IMAG

2006

Table des matières

Chapitre 1

Processus Aléatoires, Filtrations et Temps d'arrêts

Contents

1.1 Processus aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en temps continu.

1.1.1 Définitions de base

On considère un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ que l'on appellera *espace des réalisations* (en anglais : *sample space*). Dans ce qui suit on prendra tantôt $\mathbb{T} = [0, T]$ avec $T > 0$ ou $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ que l'on identifiera comme le *temps*.

Un processus aléatoire est une famille $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ appelé *espace d'état*.

Pour tout le cours on prendra $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$.

Il est particulièrement important de garder à l'esprit les trois interprétations équivalentes suivantes :

(1) Vecteur aléatoire :
X est une application *mesurable* de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{T}}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{T}}) := \bigotimes_{t\in\mathbb{T}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Ce qui signifie que pour tout élément $B \in \bigotimes_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on a $X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. La *loi*[1] du processus X est uniquement déterminée par les lois *fini-dimensionnelles* : c'est à dire les lois (jointes) des vecteurs $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$, à valeurs dans $((\mathbb{R}^d)^n, (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^n)$, où $t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$ et $n \geq 1$. Ces lois sont à leur tour déterminées par les

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n),\ A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ t_1, ..., t_n \in \mathbb{T},\ n \geq 1.$$

Nous allons être amené à éclaircir les notions de convergence dans cet espace : i.e. que veut dire X_n *converge* vers X ?

(2) Fonctionnelle :
$X : (\mathbb{T} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ comme fonction du couple $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Afin de pouvoir observer le processus y compris à des temps aléatoires $T(\omega) \in \mathbb{T}$ sous la forme $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ on se doit d'être prudent : en effet l'application : $\omega \mapsto X_T(\omega)$ n'est pas forcément $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mesurable... Pour cette raison on introduit la notion de *mesurabilité conjointe* : on dira que le processus X est (conjointement) *mesurable* si pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble $\{(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$ est dans la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}$. Cette condition entraîne (par composition d'applications mesurables) la mesurabilité de X_T.

(3) Trajectorielle :
à $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $X_.(\omega) : t \mapsto X_t(\omega)$ définit une fonction de $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$. Ainsi chaque réalisation $\omega \in \Omega$ peut être identifiée à $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{T}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{T}}$ sa *trajectoire* associée par le processus X. On sera amené à imposer certaines conditions de régularité sur les trajectoires (ex : continuité, continuité à droite limite à gauche, etc...). Pour cela on se restreindra à des sous-espaces $(H, \mathcal{H})$ de $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{T}}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{T}})$. Mais il y aura un prix conceptuel à payer...

Exercice 1.1 *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$ pour un $p \in \mathbb{R}^{+,*}$.*
(a) Montrer l'inégalité de Markov : pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}(|X|^p);$$

(b) Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $M = \mathbb{E}[\exp(k|X|)] < +\infty$ alors montrer que

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq Me^{-k\lambda}$$

(c) Appliquez ces résultats pour $X = W_t$ où W est un M.B.S. puis pour $X = N_t$ où N est un processus de Poisson de paramètre μ.

1.1.2 Comparaisons de processus

Étant donnés deux processus stochastiques X et Y définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Quand peut on dire $X = Y$?

[1] Attention pas le processus lui même ! Seulement sa loi.

Au sens le plus fort ceci se passe si pour tous $(t,\omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$ on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Lorsque l'on travaille avec un espace de probabilité on peut avoir une définition moins restrictive en faisant rentrer $\mathbb{P}$ en action :

Définition 1.1 *On dira que deux processus X et Y sont* indistinguables *si et seulement si*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}) = 1.$$

Autrement dit les trajectoires de X et Y coincident partout presque sûrement.

Cela reste encore une définition très forte. On peut affaiblir cette notion en

Définition 1.2 *On dira que X est une* modification *(ou une* version*) de Y si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{T}$*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Autrement dit pour tout $t \in \mathbb{T}$ les v.a. X_t est Y_t sont presque sûrement égales.

Clairement si X et Y sont indistinguables alors l'un est une modification de l'autre.

Exercice 1.2 *(i) Trouver un contre exemple montrant que la réciproque est fausse.*
(ii) Montrer que si X est une modification de Y et que de plus les trajectoires de X et de Y sont continues à droite avec probabilité 1 alors X et Y sont indistinguables.

Lorsque X et Y ne sont pas définis sur le même espace de probabilité les définitions antérieures n'ont plus de sens. On doit alors considérer une notion de comparaison plus faible que les précédentes.

Définition 1.3 *On dira que les processus X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définis respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ ont même* lois fini-dimensionelles *si et seulement si pour tous $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ avec $t_i \in \mathbb{T}$ et $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $i \in \{1,...,n\}$ on a*

$$\mathbb{P}(X_{t_i} \in A_i, i \in \{1,...,n\}) = \widetilde{\mathbb{P}}(Y_{t_i} \in A_i, i \in \{1,...,n\}).$$

Cette dernière notion est, bien entendu, toujours utile lorsque les espaces de probabilité coincident. C'est alors une définition évidement plus faible que la modification où l'indistingabilité. Elle reste néanmoins la plus pratique car beaucoup plus simple à vérifier.

Exercice 1.3 *Soit $(\mathbb{R}^{*,+}, \mathcal{B}, d\mu)$ où $d\mu$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{*,+}$ non atomique (i.e. qui ne charge pas les points). Pour tous $t \geq 0$ on définit $X_t(\omega) = \delta_{t,\omega}$ et $Y_t \equiv 0$. Montrer que X et Y ont même loi fini-dimensionnelle et que X est une version de Y.*

1.1.3 Espaces de trajectoires convenant aux processus aléatoires

Dans ce qui suit on prendra $\mathbb{T} = [0,T]$ (dans le cas où $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ la plupart des conclusions restent valables mais sont techniquement plus difficiles à décrire).

Il s'agit ici de trouver un espace fonctionnel suffisamment grand pour décrire et étudier les processus qui peuvent nous intéresser.

Le choix de l'espace global $(\mathbb{R}^d)^{[0,T]} = \{f : [0,T] \to \mathbb{R}^d\}$ est bien trop grand : beaucoup de fonctions de cet espace présentent des pathologies mathématiques entraînant des difficultés techniques de mesurabilité.

Etant donné un espace métrique E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$ on dit qu'une suite de loi de probabilité μ_n sur $(E, \mathcal{E})$ converge faiblement vers μ si pour toute fonction f continue, bornée, on a $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$. Dans ce cas on écrit $\mu_n \Rightarrow \mu$.
Très souvent il est plus pratique d'énoncer un tel résultat avec des fonctions aléatoires plutôt qu'avec leurs lois associées. Ainsi on dira que X_n converge faiblement vers X, que l'on notera $X_n \Rightarrow X$ si et seulement si $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ pour toute fonction f continue, bornée.

Soit Π une famille de mesures de probabilité sur un espace métrique (S, ρ).
On dit que Π est *relativement compacte* si de toute suite μ_n d'élément de Π on peut extraire une sous suite qui converge vers une limite μ (μ pouvant éventuellement être hors de Π).
On dit que Π est tendue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset S$ tel que $\mu(K) \geq 1-\epsilon$ pour tout $\mu \in \Pi$.

Théorème 1.1 (de Prokhorov)
On suppose (S, ρ) complet (les suites de Cauchy convergent) et séparable (il existe un sous ensemble dense dénombrable) alors Π est tendue ssi Π est relativement compacte.

Espace C

L'espace $C = C([0,T], \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est celui qui permet de décrire les processus à trajectoires continues. On muni cet espace de la topologie de la norme sup

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} \|f(t)\|$$

que l'on peut utiliser pour construire la tribu borélienne $\mathcal{C}$ sur laquelle les mesures peuvent être définies. On montre (cf. Durrett ou Billingsley) que $\mathcal{C}$ est engendrée par la famille des événements qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées :

$$\{\omega \in C : \omega(t_i) \in A_i, \ 1 \leq i \leq k\}$$

où $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k \leq T$ et $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
L'espace C muni de la norme précédente est un espace métrique complet séparable.

Exercice 1.4 *Soient $a_n = 2^{-1} - (2n)^{-1}$ et $b_n = 2^{-1} - (4n)^{-1}$ et μ_n la mesure concentrée sur la fonction $f_n(t) = 4n(t - a_n)$ si $t \in [a_n, b_n]$; $f_n(t) = 4n(2^{-1} - t)$ si $t \in [b_n, 2^{-1}]$; $f_n(t) = 0$ sinon.*
(a) Montrer que $f_n(t) \to 0$ mais pas uniformément.
(b) Montrer que μ_n ne converge pas faiblement vers δ_0.

Lorsque l'on s'intéresse à la convergence (faible) des processus dans l'espace C la stratégie à suivre est de montrer la convergence des lois fini-dimentionnelles puis de vérifier le *critère de tension.* C'est le sens du résultat qui suit, le lecteur intéréssé en trouvera une preuve dans dans P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures* Wiley 1999.

Théorème 1.2 *Soient $X, X^1, X^2, ...$ des processus pour lesquels $X, X^k : (\Omega, \mathcal{F}) \to (C, \mathcal{C})$. Alors si pour tous $k \geq 1$, $t_1, ..., t_k$ on a*

$$(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_k}) \Rightarrow_n (X_{t_1}, ..., X_{t_k})$$

où $\Rightarrow$ désigne la convergence en loi et si pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|\leq\delta} |X^n_s - X^n_t| \geq \epsilon \right) = 0$$

alors

$$X^n \Rightarrow_n X.$$

Le résultat qui suit est de première importance. Il nous donne un critère d'existence de processus (à trajectoires) continu(e)s.

Théorème 1.3 *de continuité de Kolmogorov-Čentsov*
Soit X un processus vérifiant : pour tout $T > 0$ il existe des constantes positives α, β, D telles que quels que soient $0 \leq s, t \leq T$ on a

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\alpha\right] \leq D\ |t - s|^{1+\beta}.$$

Alors il existe $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{0\leq t\leq T}$ une version continue de X.
De plus $\tilde{X}$ est localement Hölderienne d'exposant $\gamma \in]0, \beta/\alpha[$.

Problème 1.1. L'objectif est de montrer le résultat précédent.

Questions préliminaires :
(1) Montrer le lemme de Borel-Cantelli : si A_k est une suite d'événements tels que $\sum_k \mathbb{P}(A_k) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\cap_{m=1}^\infty \cup_{k=m}^\infty A_k) = 0$.
En déduire que $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \omega \in$ un nombre fini de $A_n) = 1$.
(2) Montrer que X_n *converge en probabilité vers* X est équivalent à *de toute sous suite de* (X_n) *on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers* X.

Sans perte de généralité on suppose $T = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $D_n = \{\frac{k}{2^n} : k = 0, ..., 2^n\}$ et $D = \cup_n D_n$ l'ensemble des nombres dyadiques de $[0, 1]$. On rappelle que D est dénombrable et dense dans $[0, 1]$.
On définit alors un nouveau processus $(\widetilde{X}_\theta)_{\theta\in D}$ par $\widetilde{X}_\theta = X_\theta$ pour tout $\theta \in D$.

1ère partie. On va montrer qu'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ la trajectoire $\theta \in D \mapsto \widetilde{X}_\theta(\omega)$ est Höldérienne (donc uniformément continue).

On rappelle que par hypothèse $\alpha, \beta > 0$; soit alors $0 < \gamma < \beta/\alpha$
(3) Montrer qu'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et pour tout n suffisamment grand

$$\max_{1\leq k\leq 2^n} |\widetilde{X}_{k/2^n} - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}| < \left(\frac{1}{2^n}\right)^\gamma$$

(Indic : utiliser Chebychev, l'hypothèse et Borel Cantelli).
(4) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et pour tout n suffisamment grand alors $\forall m > n$, $\forall s, t \in D_m$ tels que $0 < t - s < 2^{-n}$ alors $|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}$.
(5) On pose $\delta = 2/(1 - 2^{-\gamma})$. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\forall s, t \in D$ tels que $|t - s|$ est suffisamment petit alors

$$|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \leq \delta |t - s|^{\gamma}$$

2ème partie. On va montrer que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et $\forall t \in [0, 1] \setminus D$ pour toute suite $\theta_n \in D$ convergente vers t alors $\widetilde{X}_{\theta_n}$ converge vers une limite $\widetilde{X}_t$ indépendante du choix de la suite approximante (θ_n).

(6) Soient $\theta_n \in D$ et $t_n \in D$ deux suites convergentes vers t. Montrer que $\forall \omega \in \Omega_0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0(\omega)$ t.q. $n, p > N_0(\omega)$ implique

$$\begin{array}{rcl} |\widetilde{X}_{\theta_n} - \widetilde{X}_{t_n}| & \leq & \varepsilon \\ & \text{et} & \\ |\widetilde{X}_{\theta_n} - \widetilde{X}_{\theta_p}| & \leq & \varepsilon \end{array}$$

et en déduire le résultat.

Pour $\omega \notin \Omega_0$ on pose $\widetilde{X}_t(\omega) = 0$ pour tout t.

3ème partie. On va montrer que $(\widetilde{X}_t)$ est bien une modification de (X_t).

(7) Montrer que $\forall \omega \in \Omega_0$ l'application $t \in [0, 1] \mapsto \widetilde{X}_t(\omega)$ est uniformément continue.
(8) Montrer que pour toute suite $\theta_n \in D$ qui converge vers $t \in [0, 1]$ on a que la suite X_{θ_n} converge en probabilité vers X_t.
(9) Déduire de la deuxième question préliminaire que $X_t = \widetilde{X}_t$ presque sûrement.

Exercice 1.5 *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un processus tel que pour tous $0 \leq s < t$ les v.a. $B_t - B_s$ sont de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.*
1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe $C_n > 0$ telle que

$$\mathbb{E}(|B_t - B_s|^{2n}) = C_n |t - s|^n.$$

2) En déduire qu'il existe un mouvement brownien (W_t) qui est une version de (B_t) et retrouver que W_t est localement Hölderienne d'exposant $\gamma < 1/2$.

Espace D

Comme nous l'avons vu dans le cours d'introduction au calcul stochastique il peut être intéressant de considérer des processus ayant des sauts. Pour cela on introduit les fonctions càd-làg.

Définition 1.4 *On dit que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ est* càd-làg *si (en tout point de $\mathbb{T}$) elle est continue à droite et possède une limite à gauche.*

Si t est un point de discontinuité de f on notera

$$\Delta f(t) = f(t) - \lim_{s \nearrow t} f(t)$$

le saut *de f au point t.*

Remarques importantes :
1) On peut définir une topologie (cf. J. Jacod, A. Shiryaev : *Limit theorems for stochastic processes*. Springer 2002) et une notion de convergence (faible) sur l'espace des fonctions càd-làg. Muni de cette topologie et de sa tribu Borélienne associée cet espace est appelé espace de Skorokhod et est noté par $D(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$. Une variable aléatoire à valeur dans D est appelé un processus càd-làg. Il existe une metrique d pour laquelle l'espace D est séparable et complet.
2) On peut définir parallèlement les fonctions *càg-làd* : c'est à dire, continues à gauche avec limite à droite. La différence entre les deux notions prend tout son sens au niveau pratique. Avec une fonction càd-làg il n'est pas possible d'anticiper sa valeur au temps t au vu de ses valeurs avant cet instant : on peut avoir $f(t) \neq f(t-)$. Ainsi ce type de fonction parait tout à fait adapté à un contexte d'incertitude. Une fonction càg-làd au contraire permet cette anticipation : $f(t) = f(t-)$. Ce genre de fonction pourra alors également nous servir lorsque l'on voudra parler de stratégie : basée sur une certaine histoire on choisit de prendre une décision.

Proposition 1.1 *Une fonction càd-làg sur $\mathbb{T} = [0, T]$ a au plus un nombre dénombrable de discontinuités. En particulier pour tout $\epsilon > 0$ le nombre de sauts sur $\mathbb{T}$ plus grands que ϵ est fini.*

Exercice 1.6 *Montrez la proposition précédente.*

Exemple typique (mais non canonique)
Soient $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et des constantes $\alpha_i,\ i = 0, ..., n-1$ et $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = T$. La fonction suivante est càd-làg

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{I}_{[t_i, t_{i+1}[}(t).$$

1.2 Filtrations

Question : Comment formaliser l'idée intuitive que les événements deviennent de moins en moins incertains au fur et à mesure que l'information augmente avec le temps ?

Les filtrations permettent de définir les notions d'information passée, de prévisibilité et de non anticipation.

1.2.1 Filtration en temps continu

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dans ce qui suit on prend $\mathbb{T} = [0, T]$ avec $T > 0$ ou bien $\mathbb{T} = [0, +\infty[$.

Définition 1.5 *Une* **filtration** *(ou flot d'information)* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *:*

$$\forall s,t \in \mathbb{T}, \quad s<t \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

On dit alors que $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}})$ *est un* **espace probabilisé filtré**.
Dans le cas $\mathbb{T}=[0,+\infty[$ *on note* $\mathcal{F}_\infty=\sigma(\cup_{s\in\mathbb{T}}\mathcal{F}_s)$ *c.à.d. la tribu engendrée par* $\cup_{s\in\mathbb{T}}\mathcal{F}_s$.

Exercice 1.7 *Soit* $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ *une famille de tribus sur* Ω, *où* I *est un ensemble d'indice quelconque.*
Montrer que $\mathcal{H}:=\cap_i\mathcal{H}_i$ *est une tribu.*
Montrer par contre que $\mathcal{H}_i\cup\mathcal{H}_j$ *n'est pas forcément une tribu.*

Définition 1.6 *(Provisoire)*
Soit $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus stochastique sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. *On appelle filtration naturelle relative à* X *la filtration définie par*

$$\mathcal{G}_t^X=\sigma(X_s;\ s\le t,\ s\in\mathbb{T})$$

pour tout $t\in\mathbb{T}$ *; c'est à dire la plus petite sous tribu de* $\mathcal{F}$ *qui rend mesurable toutes les applications* $\omega\mapsto X_s(\omega)$ *pour tout* $s\le t$, $s\in\mathbb{T}$.

On interprète alors $A\in\mathcal{G}_t^X$ comme le fait que jusqu'au temps t un observateur de X sait si A est réalisé ou pas.

Exercice 1.8 *Soit* X *un processus tel que* toutes *ses trajectoires sont càd-làg. Soit* A *l'événement* X est continu sur $[0,t_0[$. *Montrer que* $A\in\mathcal{F}_{t_0}^X$.

Il y a des subtilités inhérentes à la notion de filtration en temps continu.

Définition 1.7 *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une filtration.*
On définit $\mathcal{F}_{t-}=\sigma(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s)$ *la tribu des événements antérieurs à* $t>0$ *et* $\mathcal{F}_{t+}=\cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ *la tribu des événements instantanéments postérieurs à* $t\ge 0$.
On pose $\mathcal{F}_{0-}:=\mathcal{F}_0$. *On dit que* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est continue à droite si* $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ *pour tout* $t\ge 0$.
De façon analogue si $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t-}$ *pour tout* $t\ge 0$ *on dit qu'elle est continue à gauche.*

Remarques : Pour un processus X de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)$
(1) La continuité à gauche de $\mathcal{F}_t^X$ pour un $t_0>0$ fixé s'interprète par : la valeur de X_{t_0} se déduit de l'observation de X_s, $0\le s<t_0$.
(2) La continuité à droite de $\mathcal{F}_t^X$ pour un $t_0>0$ fixé s'interprète par : l'information contenue à t_0+ n'apporte rien par rapport à l'observation de X_s, $0\le s\le t_0$.

Exemple. La filtration naturelle du mouvement Brownien est continue à gauche, mais pas à droite... (voir Karatzas-Shreeve, section 2.7). Pour cette raison on travaillera avec une filtration naturelle "augmentée" (voir un peu plus loin).

D'une façon plus générale on définit :

Définition 1.8 *Soient* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration et* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dira que* X *est* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$***-adapté*** *(ou non anticipant) si* $\forall t \in \mathbb{T}$

$$X_t \text{ est } \mathcal{F}_t \text{ mesurable.}$$

Exemple : Tout processus X est $\mathcal{F}_t^X$ adapté (par rapport à sa filtration naturelle.

Exercice 1.9 *(a) Est-ce que* X *est* $(\sigma(X_t))_{t\geq 0}$*-adapté ?*
(b) Est-ce que X *est* $(\mathcal{F}_{2t}^X)_{t\geq 0}$*-adapté ?*
(c) Est-ce que X *est* $(\mathcal{F}_{t/2}^X)_{t\geq 0}$*-adapté ?*

Définition 1.9 ***Conditions Habituelles****.*
Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dira que* $\mathcal{F}_t$ *satisfait aux conditions habituelles ssi*
(i) $\mathcal{F}_0$ *contient tous les* $\mathbb{P}$*-négligeables de* $\mathcal{F}$.
(ii) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ *ou* $[0, T]$ *alors* $(\mathcal{F}_t)$ *est continue à droite ; c'est à dire*

$$\forall t \in \mathbb{T} \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Propriété 1.1 *Dans les conditions habituelles si* X *est* $\mathcal{F}_t$ *adapté et est une modification de* Y *alors* Y *est aussi* $\mathcal{F}_t$ *adapté.*

Exercice 1.10 *Montrer la propriété.*

Dans tout le ce qui suit nous supposerons TOUJOURS LES CONDITIONS HABITUELLES SATISFAITES.
En conséquence on va modifier légèrement une des définitions précédentes :

Définition 1.10 *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus stochastique sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On appellera* **filtration naturelle** *relative à* X, *notée* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in\mathbb{T}}$, *la filtration définie par*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s;\ s \leq t,\ s \in \mathbb{T}) \bigvee \mathcal{N}$$

pour tout $t \in \mathbb{T}$ *; où* $\mathcal{N}$ *représente tous les* $\mathbb{P}$*-négligeables de* $\mathcal{F}$.
En particulier lorsque $X = W$ *le mouvement Brownien sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *on appelle* **filtration Brownienne** *la filtration* $\mathcal{F}_t^W$.

Théorème 1.4 *La filtration Brownienne est continue (à gauche et à droite).*

Preuve : Karatzas-Shreeve section 2.7.

1.2.2 Processus prévisibles en temps continu

Contexte : $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{T} = [0, T]$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}})$ espace probabilisé filtré où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ vérifie les conditions habituelles.

Un des problème lié au temps continu est de définir une notion analogue à celle de processus prévisible du cas discret : En effet rappelons (cf. cours de PA 2ème année) que si

$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$. Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit $\mathcal{F}_n$ adapté si X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin un processus $(H_n)_{n\geq 0}$ est dit $\mathcal{F}_n$-prévisible si
H_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$.
Pour mieux illustrer la difficulté rappelons nous l'exemple d'une stratégie de jeu. Dans un jeu à plusieurs manches on doit pouvoir parier à n'importe quel instant précédent strictement ($<$) l'issue de la manche mais pas après ($\geq$). Par exemple à la roulette, on a le droit de miser tant que la bille n'est pas arrêtée.
Une façon de garantir que notre pari à bien été fait avant l'instant T (éventuellement aléatoire) de l'issue du jeu est d'exiger que la quantité représentant notre mise à n'importe quel instant t soit continue à gauche. Ceci implique, entre autre, que l'on ne peut réagir instantanément pour prendre avantage des soubresauts (l'issue par exemple) du jeu.
Le processus le plus simple correspondant à cela est du type : pour $s < t$ fixés on pose

$$H_u(\omega) = H_u(s, t, \omega) = Y(\omega)\mathbf{I}_{]s,t]}(u).$$

où Y une v.a. $\mathcal{F}_s$-mesurable. Ainsi H_u est un processus $\mathcal{F}_u$-adapté à trajectoires continues à gauche.
On va ainsi définir

Définition 1.11 *On appelle* tribu prévisible, *par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$, *la plus petite tribu sur* $\mathbb{R}^+, \Omega$, *notée* Π, *engendrée par tous les ensembles de la forme* $]s, t] \times A$ *où* $A \in \mathcal{F}_s$ *avec* $0 \leq s < t \in \mathbb{T}$.

Définition 1.12 *On appelle* tribu optionnelle, *la plus petite tribu sur* $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, *notée* $\mathcal{O}$, *engendrée par tous les ensembles de la forme* $[s, t[\times A$ *où* $A \in \mathcal{F}_s$ *avec* $0 \leq s < t \in \mathbb{T}$.

Définition 1.13 *On dira qu'un processus* $(H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est :*
prévisible *s'il est* Π*-mesurable ;*
optionnel *s'il est* $\mathcal{O}$*-mesurable*

Théorème 1.5 *La tribu* Π *coincide avec la tribu des sous ensembles de* $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ *qui sont engendrés par les processus (applications sur* $\mathbb{R}^+ \times \Omega$*)* $(\mathcal{F}_t)$*-adaptés continus à gauche.*
La tribu $\mathcal{O}$ *coincide avec la tribu des sous ensembles de* $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ *qui sont engendrés par les processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adaptés continus à droite.*

Preuve hors programme (cf. Durrett Ch. 2 Theorem 1.2).

Moralité à retenir :
Si (H_t) *est un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté continu (resp. continu à gauche) alors il est* $(\mathcal{F}_t)$*-prévisible.*

Exemples : Étant continu le mouvement Brownien B_t est $(\mathcal{F}_t^B)$-prévisible. Par contre un processus càd-làg comme le processus de Poisson N_t n'est généralement pas prévisible. En revanche le processus $(N_{t-})_{t\geq 0}$ l'est.

1.3 Temps d'arrêt

1.3.1 Définitions

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}})$ un espace probabilisé filtré dans les conditions habituelles.

Définition 1.14 *Un* $(\mathcal{F}_t)$-**temps d'arrêt** *est une variable aléatoire* $\Omega \to [0, +\infty]$ *(resp. dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *si* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$*) telle que*

$$\forall t \in \mathbb{T} \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Une conséquence importante de la continuité à droite de la filtration est que

Proposition 1.2 *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ *ou* $\mathbb{T} = [0, T]$*, on a*
τ *est un temps d'arrêt si et seulement si* $\forall t \in \mathbb{T}$, $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Preuve : Il suffit d'écrire (et d'utiliser la continuité à droite de la filtration)

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n\geq 1} \{\tau \leq t - 1/n\}$$

et

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\tau < t + 1/n\}. \qquad \sharp$$

Proposition 1.3 *(1) Toute constante positive (resp. à valeur dans* $\mathbb{N}$*) est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*-T.A. pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ *ou* $\mathbb{T} = [0, T]$ *(resp.* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$*).*
(2) Soient τ *et* σ *deux* $(\mathcal{F}_t)$*-T.A. et* $a > 1$ *alors les v.a. suivantes sont aussi des* $(\mathcal{F}_t)$*-T.A.*

$$\tau \wedge \sigma, \quad \tau \vee \sigma, \quad \tau + \sigma \quad \text{et} \quad a\tau.$$

(3)

Exercice 1.11 *Montrer la proposition.*

Définition 1.15 *Soit* X *un processus stochastique et* Λ *un borélien de* $\mathbb{R}$*. On définit*

$$T_\Lambda := \inf\{t > 0 : X_t \in \Lambda\}$$

Alors T_Λ *est appelé le temps d'atteinte de* Λ *par* X*.*

Théorème 1.6 *Soient* X *un processus càd-làg* $\mathcal{F}_t$ *adapté,* G *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* F *un fermé de* $\mathbb{R}$ *alors*
(a) T_G *est un* $\mathcal{F}_t$ *temps d'arrêt;*
(b) $T = \inf\{t > 0 : X_t \in F \text{ ou } X_{t-} \in F\}$ *est un temps d'arrêt.*

Exercice 1.12 *Montrer le théorème.*

1.3.2 Evénements antérieurs à un temps d'arrêt

Définition 1.16 *Soit τ un $(\mathcal{F}_t)$-T.A.*
(1) On appelle **tribu des événements antérieurs** *à τ et on note $\mathcal{F}_\tau$ la tribu définie par*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \ : \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \in \mathbb{T}\}.$$

(2) On appelle **filtration arrêtée** *la filtration $(\mathcal{F}_{\tau \wedge t})_{t \in \mathbb{T}}$.*
En particulier on a $\mathcal{F}_{\tau \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Exercice 1.13 *Soient σ et τ deux temps d'arrêts. Montrer que les événement suivants sont dans $\mathcal{F}_\tau$*

$$\{\tau < t\}, \ \{\tau > t\}, \ \{\tau = t\}, \ \{\tau < \sigma\}, \ \{\tau > \sigma\}, \ \{\tau = \sigma\}.$$

La définition de $\mathcal{F}_\tau$ n'est pas très intuitive si ce n'est qu'elle représente bien l'information que l'on à jusqu'au temps T. Ce que confirme le

Théorème 1.7 *Soient τ un temps d'arrêt fini. Alors $\mathcal{F}_\tau$ est la plus petite tribu contenant tous les processus càd-làg échantillonnés au temps τ. C'est à dire*

$$\mathcal{F}_\tau = \sigma\{X_\tau ; X \textit{ processus càd-làg } \mathcal{F}_t \textit{ adapté}\}.$$

Preuve : Soit $\mathcal{G} := \sigma\{X_\tau ; X$ processus càd-làg $\mathcal{F}_t$ adapté$\}$. Prenons $A \in \mathcal{F}_\tau$ et posons

$$X_t := \mathbf{I}_A \mathbf{I}_{t \geq T}.$$

Le processus X_t est càd-làg et $X_T = \mathbf{I}_A$ donc $A \in \mathcal{G}$.
Pour l'inclusion inverse si X est un processus càd-làg adapté alors il suffit de montrer que X_τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable ce qui sera fait dans la proposition 1.5 à suivre. ♯

Proposition 1.4 *Soient τ et σ des $(\mathcal{F}_t)$-T.A.*
(i) τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable ;
(ii) si S est une v.a. $\mathcal{F}_\tau$-mesurable telle que $S \geq \tau$ (resp. $S \geq \tau$ et S à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$). Alors S est un $(\mathcal{F}_t)$-T.A ;
(iii) si $\sigma \leq \tau$ p.s. alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$;
(iv) $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$;
(v) si $\tau_n \downarrow \tau$ sont des temps d'arrêt alors τ est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_\tau = \cap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$;
(vi) si $\tau_n \uparrow \infty$ sont des temps d'arrêt et $\sigma < \infty$ alors $\mathcal{F}_{\tau_n \wedge \sigma} \uparrow \mathcal{F}_\sigma$.

Exercice 1.14 *Montrer la proposition précédente.*

Proposition 1.5 *Soient (X_t) un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté et τ un $(\mathcal{F}_t)$-T.A.* ***fini****. Alors la v.a. X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.*

Preuve : Il suffit de voir que pour tous $t > 0$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On considère $X : (\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $X(t, \omega)$.
On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{\tau \leq t\} & \to & \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ & \omega & \mapsto & (\tau(\omega), \omega) \end{array}$$

Comme X est adapté et càd-làg on a que (sur $\{\tau \leq t\}$) $X_\tau = X \circ \varphi$ est une application mesurable de $(\{\tau \leq t\}, \mathcal{F}_t \cap \{\tau \leq t\})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. ♯

Proposition 1.6 *Soit X un processus optionnel. Alors, vu comme application sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, il est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \bigotimes \mathcal{F}$-mesurable. De plus si T est un temps d'arrêt alors*
(a) $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable ; (b) Le processus arrêté X^T est aussi optionnel.

1.3.3 Intervalles stochastiques

Définition 1.17 *Soient S et T deux temps d'arrêt. On définit l'ensemble aléatoire :*

$$[S,T] := \{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}$$

D'une façon analogue on définit $]S,T[$, $]S,T]$ et $[S,T[$.

Proposition 1.7 *Si S et T sont deux temps d'arrêt et si Y est F_S mesurable alors les quatre processus suivants sont optionnels :*

$$Y\mathbf{1}_{[S,T]},\ Y\mathbf{1}_{]S,T]},\ Y\mathbf{1}_{[S,T[},\ Y\mathbf{1}_{]S,T[}.$$

Tout processus càglàd (donc prévisible) est optionnel.
Si X est càdlàg et adapté alors les processus suivants sont optionnels X_- et ΔX.

Chapitre 2

Martingales

Contents

2.1 Rappels : Espérance conditionnelle

2.1.1 Définitions

– Contexte : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X, Y, Z des vecteurs aléatoires intégrables (c'est à dire $\mathbb{E}\|X\| < \infty$) de $\Omega \to \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1 *Étant donné $\mathcal{H}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ on définit $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$, l'*espérance conditionnelle *de X sachant $\mathcal{H}$ comme l'unique (p.s.) vecteur aléatoire de $\Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant*

1) $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ *est $\mathcal{H}$-mesurable ; et*

$$2) \quad \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{H})\ d\mathbb{P} = \int_A X\ d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{H}$$

$$2) \Leftrightarrow 2') \quad \int_\Omega Z.\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\ d\mathbb{P} = \int_\Omega Z.X\ d\mathbb{P}, \quad \forall Z, \mathcal{H} - \mathit{mesurable}$$

Commentaires : 2') implique 2) Il suffit de choisir $Z = \mathbf{I}_A$ et on a le résultat.
Pour la réciproque on aura besoin de résultats montrés dans les propriétés à venir. Nous anticipons donc certains éléments de preuve.
On procède en 4 étapes.
Primo pour tout Z fonction élémentaire $Z = \mathbf{I}_B$ avec $B \in \mathcal{F}$ on a directement le résultat par 2) car

$$\int_\Omega \mathbf{I}_B.\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\ d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{H})\ d\mathbb{P} = \int_B X\ d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbf{I}_B.X\ d\mathbb{P}$$

Secondo, par linéarité, on étend ce résultat à toute fonction étagée (combinaison linéaire de fonctions élémentaires).
Tercio pour Z et X v.a. positives. Soit Z_n une suite de fonction étagée telle que $Z_n \uparrow Z$ par le théorème de convergence monotone on obtient

$$\int_\Omega Z.\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\ d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n.\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\ d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n.X\ d\mathbb{P} = \int_\Omega Z.X\ d\mathbb{P}$$

Enfin pour Z et X de signe quelconque on sépare $Z = Z^+ - Z^-$ et $X = X^+ - X^-$ où $Y^+ = \max(Y, 0)$ (partie positive) et $Y^- = \max(-Y, 0)$ (partie négative). Ce qui permet de conclure.
Remarques : 1. Si une v.a. Y vérifiant 1) et 2) alors Y est intégrable. En effet posons $A = \{Y > 0\}$ alors par 1) $A \in \mathcal{F}$ et par 2)

$$\int_A Y\ d\mathbb{P} = \int_A X\ d\mathbb{P} \leq \int_A |X|\ d\mathbb{P}.$$

De même on a

$$\int_{A^c} -Y\ d\mathbb{P} = \int_{A^c} -X\ d\mathbb{P} \leq \int_{A^c} |X|\ d\mathbb{P};$$

on en conclut $\mathbb{E}|Y| \leq \mathbb{E}|X|$.
2. Si Y' vérifie également 1) et 2) alors pour tout $A \in \mathcal{H}$ on a $\int_A Y\ d\mathbb{P} = \int_A Y'\ d\mathbb{P}$. Soit $\varepsilon > 0$ on pose alors $A_\varepsilon = \{Y - Y' \geq \varepsilon\}$ d'où

$$0 = \int_{A_\varepsilon} Y - Y'\ d\mathbb{P} \geq \varepsilon \mathbb{P}(A_\varepsilon);$$

d'où $\mathbb{P}(A_\varepsilon) = 0$. On en conclut que $Y = Y'$ presque sûrement.

- Si X est de carré intégrable alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ représente la meilleure approximation de X au sens des moindre carrés par une v.a. de carré intégrable $\mathcal{H}$-mesurable. En particulier on a $\|\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\|_{L^2} \leq \|X\|_{L^2}$.
- Si $\mathcal{H} = \sigma(Y)$ (la tribu engendrée par Y) alors on note $\mathbb{E}(X|Y)$ au lieu de $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$;
- Il existe φ une application mesurable telle que $\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$, et on note $\mathbb{E}(X|Y = y) = \varphi(y)$;
- $\mathbb{P}(A|\mathcal{H}) := \mathbb{E}(\mathbf{I}_A|\mathcal{H})$.

2.1.2 Propriétés

Les (in)égalités suivantes entre v.a. s'entendent presque sûrement.

- $\mathbb{E}(1|\mathcal{H}) = 1$
- Linéarité : $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{H}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$;
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) = \mathbb{E}(X)$;
- Si Y est $\mathcal{H}$-mesurable alors $\mathbb{E}(Y.X|\mathcal{H}) = Y.\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$;
- Si X est indépendant de $\mathcal{H}$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$;

Cette propriété à pour conséquence (combinée avec le théorème de Fubini) le résultat suivant qui nous sera utile. Pour une preuve de ce résultat on pourra se reporter à la Proposition 2.5, Chapitre 8 du livre de Lamberton-Lapeyre.

Proposition 2.1 *Soit X une v.a. $\mathcal{H}$-mesurable à valeurs dans un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ et soit Y une v.a. indépendante de $\mathcal{H}$ à valeurs dans un espace mesuré $(G, \mathcal{G})$. Alors pour toute fonction F borélienne, positive (ou bornée) sur $(E \times G, \mathcal{E} \otimes \mathcal{G})$ la fonction f définie par :*

$$f(x) = \mathbb{E}(F(x, Y))$$

est borélienne sur $(E, \mathcal{E})$ et on a presque sûrement

$$\mathbb{E}(F(X, Y)|\mathcal{H}) = f(X).$$

Remarque : Dans ces conditions on peut donc calculer $\mathbb{E}(F(X, Y)$ comme si X était une constante.

- Positivité : Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \geq 0$;
- Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ sont deux sous tribus de $\mathcal{F}$ alors
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G});$$
- Inégalité de Jensen : Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et si $\varphi(X)$ est intégrable alors
$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{H}).$$

Preuve : Comme φ est convexe alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe λ_a tel que pour tout x

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + \lambda_a(x - a)$$

Posons $a = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ et $x = X$ on a

$$\varphi(X) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) + \lambda_a(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{H}))$$

On prend alors l'espérance conditionnelle des deux membres pour obtenir

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{H}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})).$$

2.1.3 Théorèmes de passage à la limite

- Convergence monotone : Si $X_n \nearrow X$ et $\exists Z$ t.q. $X_n \geq Z$ $\forall n$, Z intégrable ; alors
$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$
- Fatou : Si pour tout n on a $X_n \geq Z$ avec Z intégrable alors
$$\mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{H}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) \leq \limsup \mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) \leq \mathbb{E}(\limsup X_n|\mathcal{H}).$$
- Convergence dominée : Si $X_n \to X$ et si $\exists Z$ intrégrable tel que pour tout n on a $|X_n| \leq Z$ alors
$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{H}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

2.2 Martingales à temps discret

2.2.1 Définitions

Définition 2.2 *Un processus $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ à valeur réelles, adapté et intégrable est :*
- *Une **martingale** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$;*
- *une **surmartingale** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n$;*
- *une **sousmartingale** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n$.*

Ces définitions s'étendent aux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, c.à.d. chaque composante doit être respectivement une martingale, surmartingale, sousmartingale réelle.

Exemples : Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrables. On considère la marche aléatoire partant de l'origine : $M_0 = 0$ et $M_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que M_n est une
- martingale si $\mathbb{E}(X_1) = 0$;
- une surmartingale si $\mathbb{E}(X_1) < 0$;
- une sousmartingale si $\mathbb{E}(X_1) > 0$.

2.2.2 Propriétés élémentaires

Exercices de manipulation de l'espérance conditionnelle :
- (M_n) est une martingale si et seulement si
$$\mathbb{E}(M_{n+j}|\mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall j \geq 0;$$
- si (M_n) est une martingale alors on a pour tout $n \geq 0$
$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0);$$
- la somme de deux martingales est une martingale ;
- on a les propriétés analogues pour les surmartingales et sousmartingales ;
- Si (X_n) est une martingale réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe **telle que** $(\varphi(X_n))$ **est intégrable** alors $(\varphi(X_n))$ est une sousmartingale. Même conclusion si (X_n) est une sousmartingale et si φ est supposée de plus non décroissante.
  Cas pariculier important : si (X_n) est une martingale de carré intégrable alors (X_n^2) est une sousmartingale.

2.2.3 Transformée de Martingale

Définition 2.3 *On dit qu'un processus $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **prévisible** (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$) si H_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2.4 *Soit (M_n) une martingale et (H_n) un **processus prévisible** (pour la même filtration). On pose $\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$. On appelle* transformée de la martingale (M_n) par la suite (H_n) *la suite notée $((H \cdot M)_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par*

$$\begin{aligned} (H \cdot M)_0 &= H_0 M_0 \\ (H \cdot M)_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_n \Delta M_n \ \textit{pour } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*$(H \cdot M)$ est quelquefois appelée **intégrale stochastique discrète** du processus (H_n) par la martingale (M_n).*

Théorème 2.1

- ***Si** $|H_n|$ **est borné** $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(H \cdot M)_n$ est une martingale.*
- *Un processus adapté, **intégrable** (M_n) à valeurs réelles est une martingale si et seulement si pour tout processus prévisible **borné** (H_n) et pour tout N on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

Remarquer que la condition de bornitude de H_n est essentielle pour que $(H \cdot M)_n$ soit intégrable.
Si M_n est une surmartingale (resp. sousmartingale) alors à condition de supposer en plus $H_n \geq 0$ on a un résultat similaire : $(H.M)_n$ est une surmartingale (resp. sousmartingale).

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la v.a. $(H \cdot M)_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, car somme de v.a. $\mathcal{F}_n$ mesurables. De plus $(H \cdot M)_n$ est intégrable car somme finie de quantités intégrables. Enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H \cdot M)_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= (H \cdot M)_n + \mathbb{E}(H_{n+1} \Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\
&= (H \cdot M)_n + H_{n+1} \mathbb{E}(\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\
&= (H \cdot M)_n
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$.
Pour le deuxième point si (M_n) est une martingale alors par le point précédent $(H \cdot M)_n$ est une martingale et par conséquent

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_N) = \mathbb{E}((H \cdot M)_0) = \mathbb{E}(H_0 M_0).$$

Par ailleurs $(H \cdot M)_N = H_0 M_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n$ d'où le résultat cherché.
Réciproquement si pour toute suite prévisible bornée (H_n) on a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute v.a. Z, $\mathcal{F}_n$-mesurable, on définit $(H_k^{n,Z})_{k \geq 0}$ par $H_k^{n,Z} = 0$ pour $k \neq n+1$ et $H_{n+1}^{n,Z} = Z$. La suite $(H_k^{n,Z})_{k \geq 0}$ est une prévisible et on a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} H_k^{n,Z} \Delta M_k\right) = \mathbb{E}(Z(M_{n+1} - M_n)) = 0.$$

D'où $\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(M_n))$ pour toute Z v.a. $\mathcal{F}_n$-mesurable. Ce qui permet de conclure.
Remarque : La philosophie de ce résultat est de première importance : **il n'existe pas de stratégie honnête permettant de "gagner" dans un jeu défavorable (surmatingale) ou simplement équitable (martingale)**.

Martingale du joueur (Casanova 1725-1798).
On joue successivement à *pile ou face* avec une pièce bien équilibrée. Á chaque tour on mise une quantité d'argent sur l'apparition de *face*. On perd la mise si *pile* apparaît sinon on gagne l'équivalent de la mise. On emploi alors la stratégie suivante : on commence par

miser k unités monétaire. Si l'on perd on mise alors $2k$ au tour suivant et ainsi de suite jusqu'a ce que l'on gagne (ce qui ne saurait tarder puisque la pièce est honnête). Lorsque l'on a gagné on arrête le jeu.
Modélisation : Soit (X_n) une suite de v.a. représentant les résultats des lancés successifs : $+1$ si *face* et -1 si *pile*, la suite est i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. On considère alors $M_n = X_1 + ... + X_n$ le nombre de succès moins le nombre d'échecs en n parties. On a déjà vu que M_n est une martingale (marche aléatoire symétrique). On définit alors *la stratégie* (H_n) par $H_1 = k$ et

$$H_{n+1} = \begin{cases} 2H_n & \text{si } X_n = -1 \\ 0 & \text{si } X_n = 1. \end{cases}$$

La transformée $(H \cdot M)_n$ représente alors le gain du joueur au temps n. Comme M_n est une martingale le théorème ci-dessus nous dit que $(H \cdot M)_n$ est aussi une martingale. Par consequent $\mathbb{E}((H \cdot M)_n) = \mathbb{E}((H \cdot M)_0) = 0$; c'est à dire qu'en moyenne on ne gagne rien. Pourtant si on appelle N le temps ou l'on gagne pour la première fois on a :

$$\text{Gain} = -k - 2k - ... - 2^{N-1}k + 2^N k = k.$$

Donc on repartirait en ayant gagné k ! Casanova a été, comme il le raconte dans ses mémoires, victime de cette interprétation douteuse... Nous y reviendrons.

2.2.4 Théorèmes d'arrêts

– Contexte : $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{\mathbb{N}}, \mathbb{P}$ un espace de probabilité, filtré.

On rappelle qu'une v.a. τ, à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un *temps d'arrêt* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Exemples : Dans le contexte de la martingale du joueur $N = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$, l'instant du premier gain, est un $(\mathcal{F}_n)$-T.A. En effet

$$\{N \leq n\} = \{X_1 = 1\} \cup \{X_1 = -1, X_2 = 1\} \cup ... \cup \{X_1 = -1, ..., X_{n-1} = -1, X_n = 1\}$$

qui est une réunion d'événements contenus dans $\mathcal{F}_n$.
On montre (exercice) que τ_n définie par $\tau_1 = N$ et $\tau_{n+1} = \inf\{n > \tau_n : X_n = 1\}$ est une suite de $\mathcal{F}_n$-T.A.
Par contre $T = \sup\{n \leq N : X_n = 1\}$ l'instant du dernier gain avant N n'en n'est pas un T.A. En effet $\{T \leq n\}$ dépend de ce qui s'est passé après n...

Définition 2.5 *Étant donné un processus $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ de v.a. adaptées et τ un temps d'arrêt, on appelle* processus arrêté *à l'instant τ la suite définie par*

$$X_n^\tau(.) = X_{\tau(.) \wedge n}(.) = X_n(.) \mathbf{1}_{\{n < \tau(.)\}} + X_{\tau(.)}(.) \mathbf{1}_{\{n \geq \tau(.)\}}.$$

Propriété 2.1 *Soit (M_n) une martingale et τ un temps d'arrêt, alors la martingale arrêtée (M_n^τ) est une martingale. On à les mêmes résultats pour les surmartingales et les sousmartingales.*

Preuve : C'est un corollaire du théorème antérieur. En effet, posons $H_n = \mathbf{I}_{\{\tau \geq n\}}$. C'est une suite prévisible car $\{\tau \geq n\} = \{\tau \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ et elle est évidemment bornée. Donc $(H \cdot M)_n$ est une martingale. De plus

$$(H \cdot M)_n = H_0 M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (M_n - M_{n-1}) = M_{\tau \wedge n}$$

car si $\tau \geq n$ alors tous les $H_k = 1$ pour $k = 1, ..., n$. Et si $\tau = \ell < n$ alors $H_k = 0$ pour $k > \ell$ et $H_k = 1$ pour $k \leq \ell$.

Théorème 2.2 *Échange optionnel.*
Soit (X_n) et (Y_n) deux $\mathcal{F}_n$-martingales et T un $\mathcal{F}_n$-temps d'arrêt, tel que $X_T = Y_T$ sur l'événement $T < \infty$. Alors le processus

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{si } n < T \\ Y_n & \text{si } n \geq T \end{cases}$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

Preuve : On a

$$Z_n = X_n \mathbf{I}_{\{T>n\}} + Y_n \mathbf{I}_{\{T \leq n\}}$$

Donc Z_n est $\mathcal{F}_n$-adaptée car $\{T > n\}^c = \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et intégrable car $\mathbb{E}|Z_n| \leq \mathbb{E}|X_n| + \mathbb{E}|Y_n| < \infty$.
Par la propriété de martingale de X_n et Y_n on a

$$\begin{aligned} Z_n &= \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\mathbf{I}_{\{T>n\}} + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)\mathbf{I}_{\{T\leq n\}} \\ &= \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{I}_{\{T>n\}} + Y_{n+1}\mathbf{I}_{\{T\leq n\}}|\mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

Or $\mathbf{I}_{\{T>n\}} = \mathbf{I}_{\{T>n+1\}} + \mathbf{I}_{\{T=n+1\}}$ et $\mathbf{I}_{\{T\leq n\}} = \mathbf{I}_{\{T\leq n+1\}} - \mathbf{I}_{\{T=n+1\}}$ d'où

$$\begin{aligned} Z_n &= \mathbb{E}(Z_{n+1} + X_{n+1}\mathbf{I}_{\{T=n+1\}} - Y_{n+1}\mathbf{I}_{\{T=n+1\}}|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}((X_{n+1} - Y_{n+1})\mathbf{I}_{\{T=n+1\}}|\mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

Or par hypothèse $X_T = Y_T$ sur $\{T < \infty\}$ donc le dernier terme dans le membre de droite est nul. D'où $Z_n = \mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

Théorème 2.3 *Échantillonnage optionnel.*
Étant donnés (X_n) une $\mathcal{F}_n$-martingale (resp. sous-martingale, resp. sur-martingale) et $T_1 \leq T_2 \leq ...$ une suite de $\mathcal{F}_n$-temps d'arrêts tels que $P(T_j \leq k_j) = 1$ où k_j est une suite de nombres finis ; alors le processus $Z_n = X_{T_n}$ est une martingale (resp. sous-martingale, resp. sur-martingale) pour la filtration $\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{T_n}$.

Preuve : C'est une application itérée du théorème suivant.

Théorème 2.4 *Échantillonnage optionnel de Doob.*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)$-martingale (resp. sous-martingale, resp. sur-martingale), σ et τ deux $(\mathcal{F}_n)$ T.A. tels que
(i) $\sigma \leq \tau$ presque sûrement et

*(ii) τ est **borné** :* i.e. *il existe une constante $k < \infty$ telle que $\tau \leq k \quad \mathbb{P}-p.s.$*
Alors $\mathbb{P}$-presque sûrement

$$\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$$

(resp. $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma$, resp. $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma$).
En particulier $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_\sigma) = \mathbb{E}(X_0)$ (resp. $\geq$, resp. $\leq$).

Preuve : On commence par montrer l'égalité finale $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_\sigma)$. On définit Y_n par $Y_0 = 0$ et $Y_n = X_{\tau\wedge n} - X_{\sigma\wedge n}$. On remarque

$$X_{\tau\wedge n} = X_{\tau\wedge(n-1)} + \mathbf{I}_{\tau\geq n}(X_n - X_{n-1})$$

Donc on peut écrire

$$Y_n = X_{\tau\wedge(n-1)} - X_{\sigma\wedge(n-1)} + (\mathbf{I}_{\tau\geq n} - \mathbf{I}_{\sigma\geq n})(X_n - X_{n-1})$$

Or $\{\tau \geq n\} = \{\tau \leq n-1\}^c$ et $\{\sigma \geq n\}$ sont dans $\mathcal{F}_{n-1}$ donc

$$\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + \mathbf{I}_{\tau\geq n}\mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})$$

et comme X_n est une martingale

$$\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1}$$

et Y_n est aussi une martingale. Donc $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_0)$.
En particulier pour $n = k$ qui borne τ et σ on a $Y_k = X_\tau - X_\sigma$ et comme $Y_0 = 0$ on a

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_\sigma). \tag{2.1}$$

Il reste à montrer que $\forall B \in \mathcal{F}_\sigma$ on a

$$\mathbb{E}(\mathbf{I}_B X_\tau) = \mathbb{E}(\mathbf{I}_B X_\sigma)$$

Posons $\sigma_B = \sigma\mathbf{I}_B + k\mathbf{I}_{B^c}$ et $\tau_B = \tau\mathbf{I}_B + k\mathbf{I}_{B^c}$ alors pour tout $j \geq k$ l'événement $\{\sigma_B \leq j\} = \Omega \in \mathcal{F}_j$ et pour $j < k$ on a $\{\sigma_B \leq j\} = B \cap \{\sigma \leq j\} \in \mathcal{F}_j$ par définition de $\mathcal{F}_\sigma$. On vient de montrer que σ_B est un $\mathcal{F}_n$ temps d'arrêt. Il en est de même pour τ_B. Donc par (2.1) on en déduit $\mathbb{E}(X_{\tau_B}) = \mathbb{E}(X_{\sigma_B})$. D'où

$$\mathbb{E}(X_{\tau_B}\mathbf{I}_B) + \mathbb{E}(X_{\tau_B}\mathbf{I}_{B^c}) = \mathbb{E}(X_{\sigma_B}\mathbf{I}_B) + \mathbb{E}(X_{\sigma_B}\mathbf{I}_{B^c}).$$

Or
- sur B^c on a $X_{\tau_B} = X_{\sigma_B} = X_k$ et
- sur B on a $X_{\tau_B} = X_\tau$ ainsi que $X_{\sigma_B} = X_\sigma$

d'où

$$\mathbb{E}(X_\tau\mathbf{I}_B) = \mathbb{E}(X_\sigma\mathbf{I}_B).$$

2.2.5 Inégalités de Doob

Théorème 2.5 *Inégalités de Doob.*
Soient (X_n) une sous-martingale et $m \in \mathbb{N}$. On note $X_n^+ = \varphi(X_n)$ où φ est la fonction convexe non décroissante $\varphi(x) = x \vee 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\lambda\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq m} X_k \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X_m \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq m} X_k \geq \lambda\}}) \leq \mathbb{E}(X_m^+)$$

Preuve : On pose $A = \max_{0 \leq k \leq m} X_k \geq \lambda$ et on définit $M = \inf\{k : X_k \geq \lambda \text{ ou } k = m\}$. On remarque que sur A on a $X_M \geq \lambda$ d'où

$$\lambda \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}(X_M \mathbf{1}_A)$$

par ailleurs par la propriété de sous martingale et le Théorème 2.11 on a $\mathbb{E}(X_M) \leq \mathbb{E}(X_m)$ et comme $X_m = X_M$ sur A^c on en déduit

$$\mathbb{E}(X_M \mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(X_m \mathbf{1}_A).$$

Ce qui conclut la première inégalité. La seconde est alors triviale.

Corollaire 2.1 *Soit (M_n) une martingale et $m \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq m} |M_k| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(|M_m|)}{\lambda}$$

Preuve : On applique l'inégalité maximale de Doob à la sousmartingale $|M_n|$ (image d'une martingale par la fonction convexe $x \mapsto |x|$.

Corollaire 2.2 *Inégalité de Doob-Kolmogorov.*
Soit (M_n) une martingale de carré intégrable et $m \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq m} |M_k| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(M_m^2)}{\lambda^2}$$

Preuve : On applique l'inégalité maximale de Doob à la sousmartingale M_n^2 (image d'une martingale par la fonction convexe $x \mapsto x^2$.

Corollaire 2.3 *Inégalité de Kolmogorov.*
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de carré intégrable. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq m} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_m)}{\lambda^2}.$$

Preuve : On applique l'inégalité de Doob-Kolmogorov à la martingale $(S_n - \mathbb{E}(S_n))$.

Théorème 2.6 *Inégalités maximales dans L^p de Doob.*
Soit (M_n) une martingale telle que il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}(|M_n|^p) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$
(a) La v.a. $\max_{0 \leq k \leq m} |M_k|$ est dans L^p (c'est à dire $\mathbb{E}(|\max_{0 \leq k \leq m} |M_k||^p) < \infty$.
(b) De plus

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leq k \leq m} |M_k|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_m|^p).$$

"Preuve" : Pour tout $m \geq 1$ on a $\max_{0 \leq k \leq m} |M_k| \leq \sum_{k=1}^m |M_k| \in L^p$ d'où la partie (a). La preuve de (b) utilise l'inégalité maximale, le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder. On se reportera au Chapitre 4 du livre de Durrett pour plus de détails.

2.2.6 Convergences

Dans cette partie nous ne donnerons pas d'élément de preuve. Le lecteur pourra trouver les démonstrations au chapitre 4 du livre de R. Durrett, *Probability : Theory and Examples.*

Théorème 2.7 *Convergence p.s. des Martingales.*
Soit X_n *une sousmartingale telle que* $\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$ *; où* $x^+ = max(x, 0)$*. Alors* X_n *converge presque sûrement vers une limite* X *telle que* $\mathbb{E}|X| < \infty$*.*

Corollaire 2.4 *Si* $X_n \geq 0$ *est une surmartingale alors presque sûrement on a* $X_n \to X$ *et* $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X_0)$*.*

(Contre) Exemple : Considérons S_n la marche aléatoire symétrique pour laquelle $S_0 = 1$ et $S_n = S_{n-1} + X_n$ où les X_i sont i.i.d. équidistribués sur $\{-1, 1\}$. Soit $N = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$. On pose $M_n = S_{N \wedge n}$ donc M_n est une martingale positive. D'après le corollaire précédent on a que M_n converge presque sûrement vers une limite M qui doit être $M \equiv 0$. Comme $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = 1$ pour tout n et comme $M_\infty = 0$ il ne peut y avoir convergence dans L^1.

Théorème 2.8 *Convergence* L^p*,* $p > 1$ *des Martingales.*
Soit X_n *une martingale telle que* $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ *; où* $p > 1$*. Alors* X_n *converge presque sûrement et dans* L^p *vers une limite* X*.*

Définition 2.6 *On dit qu'une collection* $(X_i)_{i \in I}$ *de v.a. est uniformément intégrable si*

$$\lim_{M \to \infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}\left(|X_i| \mathbf{1}_{|X_i| > M}\right) = 0.$$

Si $(X_i)_{i \in I}$ *est uniformément et si on choisit* M *tel que le* $\sup < 1$ *alors*

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \leq M + 1 < \infty.$$

Exemples : S'il existe Y telle que $\mathbb{E}(Y) < \infty$ telle que $|X_i| \leq Y$ pour tout $i \in I$ alors $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable.
Par contre la marche aléatoire simple symétrique $(S_n)_{n \geq 0}$, avec $S_0 = 0$ n'est pas uniformément intégrable puisque dès que $2n > M$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|S_{2n}| \mathbf{1}_{|S_{2n}| > M}\right) &= \sum_{k \geq (M+1)/2}^{n} 2k(\mathbb{P}(S_{2n} = -2k) + \mathbb{P}(S_{2n} = 2k)) \\ &= 2 \sum_{k \geq (M+1)/2}^{n} 2k \binom{2n}{n+k} 2^{-2n} \end{aligned}$$

or cette dernière série n'est pas uniformément bornée en n (en fait on a $\sup_n \mathbb{E}\left(|S_{2n}| \mathbf{1}_{|S_{2n}| > M}\right) = +\infty$).

Théorème 2.9 *Si* $X_n \to X$ *en probabilité alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*
(a) $\{X_n : n \geq 0\}$ *est uniformément intégrable ;*
(b) $X_n \to X$ *dans* L^1 *;*
(c) $\mathbb{E}|X_n| \to \mathbb{E}|X| < \infty$*.*

Théorème 2.10 *Convergence L^1 des Martingales.*
Soit X_n une martingale les propriétés suivantes sont équivalentes ;
(a) $\{X_n : n \geq 0\}$ est uniformément intégrable ;
(b) $X_n \to X$ p.s. et dans L^1 ;
(c) $X_n \to X$ dans L^1 ;
(d) Il existe X avec $\mathbb{E}|X| < \infty$ telle que $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$. On dit alors que la martingale est régulière *et que X* réduit *la martingale.*

Définition 2.7 *Soit X_n une martingale régulière de limite X_∞. On dit alors que la martingale est* fermée *: dans le sens où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est une martingale.*

Dans ce cas les hypothèses du théorème d'échantillonnage optionnel de Doob se simplifient grandement

Théorème 2.11 *Soient $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ (avec $\mathbb{E}|X| < \infty$) une martingale régulière, τ, σ_1, σ_2 des temps d'arrêts. Alors*
(a) X_τ est intégrable et $X_\tau = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\tau)$;
(b) si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ alors $\mathbb{E}(X_{\sigma_2}|\mathcal{F}_{\sigma_1}) = X_{\sigma_1}$.

2.2.7 Décomposition de Doob

Théorème 2.12 *Toute surmartingale (U_n) peut être écrite de façon unique suivant sa* décomposition de Doob *:*

$$U_n = M_n - A_n$$

où (M_n) est une martingale et (A_n) un processus croissant, prévisible et tel que $A_0 = 0$.

Preuve : Pour $n = 0$ on prend $M_0 = U_0$. Pour $n \geq 0$ on doit avoir

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n).$$

D'où en conditionnant par $\mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) - U_n = -(A_{n+1} - A_n)$$

et en reversant ceci dans la première équation

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n).$$

Ainsi (M_n) et (A_n) sont univoquement déterminés. On constate que (M_n) est une martingale et que (A_n) est prévisible et croissant par la propriété de surmartingale de (U_n).

Exemples : 1) **Marche aléatoire avec dérive négative.** On suppose $\mathbb{E}(X_1) = x < 0$, on a vu que $S_n = X_1 + ... + X_n$ est une surmartingale. On peut écrire $S_n = M_n - A_n$ avec

$$A_{n+1} - A_n = -\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) + S_n = -x;$$

d'où $A_n = -nx$ et

$$M_{n+1} - M_n = S_{n+1} - \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_{n+1} - x.$$

D'où $M_n = S_n - nx$.
2) **Martingale de carré intégrable.** On a vu que si (M_n) est une martingale de carré intégrable alors (M_n^2) est une sousmartingale. Donc $(-M_n^2)$ est une surmartingale et l'on peut appliquer la décomposition de Doob pour écrire

$$M_n^2 = N_n + A_n$$

où (N_n) est une martingale et (A_n) un processus croissant prévisible. On note $\langle M \rangle_n = A_n$.
Cas particulier : si on prend $M_0 = 0$ et $M_n = X_1 + ... + X_n$ où les X_i sont i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On a

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_{n+1} - \langle M \rangle_n &= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - M_n^2 \\
&= \mathbb{E}((M_n + X_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n) - M_n^2 \\
&= \mathbb{E}(M_n^2 | \mathcal{F}_n) + 2M_n \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - M_n^2 \\
&= M_n^2 + 2M_n \mathbb{E}(X_{n+1}) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2) - M_n^2 \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}^2) \\
&= 1/2 + 1/2 = 1.
\end{aligned}$$

D'où $\langle M \rangle_n = n$. En particulier on a $M_n^2 - \langle M \rangle_n = M_n^2 - n$ est une martingale.

2.3 Martingales à temps continu

Contexte : $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $[0, T]$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ espace probabilisé filtré, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ vérifie les conditions habituelles.

2.3.1 Définitions

Définition 2.8 *Un processus $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ à valeurs réelles,* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-adapté *et* intégrable *est :*
- *Une* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-martingale *si pour tout $s < t \in \mathbb{T}$ on a $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$;*
- *une* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-surmartingale *si pour tout $s < t \in \mathbb{T}$ on a $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$;*
- *une* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-sousmartingale *si pour tout $s < t \in \mathbb{T}$ on a $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$.*

Ces définitions s'étendent aux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, c.à.d. chaque composante doit être respectivement une $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-martingale, surmartingale, sousmartingale réelle.

Remarque : Si $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une martingale alors $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Théorème 2.13 *Soit X un processus et φ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}|\varphi(X_t)| < \infty$ pour tous t.*
(a) Si X une martingale alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale ;
(b) si X est une sousmartingale et φ est croissante (au sens large) alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale.

2.3.2 Exemples

Le Brownien

Proposition 2.2 *Le Mouvement Brownien Standard* (B_t) *est une* $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in\mathbb{T}}$*-martingale (à trajectoire) continue.*

Preuve : On note $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$. Il suffit voir que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_{t+s}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t|\mathcal{F}_t) \\ &= B_t + \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) \\ &= B_t.\end{aligned}$$

Proposition 2.3 *Soit* (B_t) *un M.B.S. les processus suivants sont des* $(\mathcal{F}_t^B)$*-martingales :*
(i) $M_t = B_t^2 - t$ *;*
(ii) Pour θ *fixé* $N_t = N_t(\theta) := \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$.

Preuve : On note $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$. Les processus (M_t) et (N_t) sont bien évidemment adaptés et intégrables.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{t+s} - M_t|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(B_{t+s}^2 - (t+s) - B_t^2 + t|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}((B_{t+s} - B_t)^2 + 2B_t(B_{t+s} - B_t)|\mathcal{F}_t) - s \\ &= \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t)^2) + 2B_t\mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) - s \\ &= s + 0 - s = 0\end{aligned}$$

Remarque : on rappêlle que la décomposition de Doob de la sous martingale (B_t^2) donne $B_t^2 = M_t + \langle B\rangle_t = M_t + t$, c'est à dire $\langle B\rangle_t = t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_{t+s} - N_t|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(\exp(\theta B_{t+s} - \theta^2(t+s)/2) - \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)(\exp(\theta(B_{t+s} - B_t) - \theta^2 s/2) - 1)|\mathcal{F}_t) \\ &= N_t e^{-\theta^2 s/2}\mathbb{E}(\exp(\theta(B_{t+s} - B_t))|\mathcal{F}_t) - N_t \\ &= N_t - N_t = 0.\end{aligned}$$

Le résultat qui suit est profond. Nous en reportons la preuve à une autre partie du cours.

Théorème 2.14 *(Théorème de Lévy)*
Soit (X_t) *un processus réel centré, à trajectoires continues,* $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que*
(i) (X_t) *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale ;*
(ii) $(X_t^2 - t)$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*
Alors (X_t) *est un M.B.S.*

Processus de Poisson

Définition 2.9 *Soit* $(T_n)_{n\geq 0}$ *une suite croissante de v.a. positives avec* $T_0 = 0$*. Le processus* $N = (N_t)_{0\leq t\leq\infty}$ *définit par*

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}$$

à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ *est appelé le* processus de comptage *associé à la suite* (T_n).

On pose $T_\infty = \sup_n T_n$ on rappelle que si $T_\infty = +\infty$ p.s. alors N est un processus de comptage non explosif. On rappelle que pour tous $0 \leq s < t < \infty$ on a

$$N_t - N_s = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{s<T_n\leq t\}}.$$

Théorème 2.15 *Un processus de comptage N est adapté si et seulement si la suite associée (T_n) est constituée de temps d'arrêts.*

Preuve : Si les T_n sont des T.A. alors pour tout n

$$\{N_t = n\} = \{\omega : T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)\} \in \mathcal{F}_t$$

donc $N_t \in \mathcal{F}_t$ donc N est adapté.
Réciproquement si N est adapté alors pour tout t

$$\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \in \mathcal{F}_t$$

donc T_n est un temps d'arrêt.

Observez qu'un processus de comptage sans explosion a ses trajectoires càd-làg.

Définition 2.10 *Un processus de comptage adapté N est un processus de Poisson si*
(a) il est à accroissements stationnaires ;
(b) il est à accroissements indépendants.

Théorème 2.16 *Soit N un processus de Poisson, alors il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}.$$

Le paramètre λ est appelé intensité du processus.

Théorème 2.17 *Soit N un processus de Poisson d'intensité λ. Alors*

$$N_t - \lambda t \text{ et } (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$$

sont des martingales.

Preuve : Exercice.

2.3.3 Propriétés

On a des résultats tout à fait similaires au cas discret.

Inégalités

Théorème 2.18 *Inégalités maximales de Doob*
Soient M_t une martingale continue alors pout tout $T > 0$

- *Soient (X_t) une sousmartingale continue et $T > 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a*
$$\mathbb{P}(\max_{0\le t\le T} X_t \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_T^+)$$
- *Soient $T > 0$ et M_t une martingale continue telle qu'il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}(|M_T|^p) < +\infty$. Alors*
a) La v.a. $\max_{0\le t\le T} |M_t|$ est dans L^p.
b) De plus
$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{0\le t\le T} |M_t|\right)^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_T|^p).$$

Preuve : Pour le premier point soient $n \in \mathbb{N}$ et $N = \lfloor T2^n \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ indique la partie entière de x. On pose $t_i^n = i/2^n$ pour tout $i = 1, ..., N$; et $t_{N+1}^n = T$. Alors $(X_{t_i^n})_{1\le i\le N+1}$ est une $(\mathcal{F}_{t_i^n})_{1\le i\le N+1}$-sousmartingale (à temps discret). Donc par l'inégalité maximale de Doob on a
$$\mathbb{P}(\max_{1\le i\le N+1} X_{t_i^n} \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_T^+).$$
On pose $A_n = \{\max_{1\le i\le N+1} X_{t_i^n} \ge \lambda\}$; on observe que A_n est une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements. D'autre par grâce à la continuité des trajectoires on a
$$\bigcup_{n\ge 1} A_n = \lim_n A_n = \{\max_{0\le t\le T} X_t \ge \lambda\}$$
d'où le résultat de par la propriété de continuité de la probabilité ($\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$).

Pour le deuxième point on montre de la même manière en utilisant le Théorème discret que
$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{1\le i\le N+1} |M_{t_i^n}|\right)^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_T|^p).$$
On pose $Y_n = \left(\max_{1\le i\le N+1} |M_{t_i^n}|\right)^p$, la suite Y_n est croissante et positive et converge presque sûrement (continuité des trajectoires) vers $(\max_{0\le t\le T} |M_t|)^p$ donc par convergence monotone on a
$$\mathbb{E}(Y_n) \to \mathbb{E}((\max_{0\le t\le T} |M_t|)^p).$$
Pour le mouvement Brownien W_t on a quelques résultats plus précis (vus dans le cours de 2ème année).

Proposition 2.4 *Principe de symétrie.*
a) Pour tout $y \ge 0$ et tout $x \le y$ on a
$$\mathbb{P}(\max_{0\le t\le T} W_t \ge y) = \mathbb{P}(|W_T| \ge y)$$
Autrement dit les v.a. $\max_{0\le t\le T} W_t$ et $|W_T|$ ont même loi ;
b) La loi conditionnelle de $\max_{0\le t\le T} W_t$ sachant W_T est donné pour $y \ge \max(x, 0)$ par
$$\mathbb{P}\left(\max_{0\le t\le T} W_t \ge y | W_T = x\right) = \exp\left(-2\frac{y(y-x)}{T}\right)$$

Convergences

Définition 2.11 *Une martingale X est dite fermée par une v.a. Y si $\mathbb{E}|Y| < \infty$ et $X_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$*

La v.a. Y n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.19 *Soit X une surmartingale. Alors la fonction $t \to \mathbb{E}(X_t)$ est continue à droite si et seulement si il existe une unique version Y de X qui soit càd-làg.*

Corollaire 2.5 *Si $X = (X_t)$ est une martingale alors il existe une unique version Y de X qui est càd-làg.*

Par la suite on supposera toujours nos martingales au moins càd-làg.

Théorème 2.20 *Soit X une martingale continue à droite telle que $\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Alors la v.a. $Y = \lim_t X_t$ existe p.s. et $\mathbb{E}|Y| < \infty$. De plus si Z est une v.a. qui ferme X alors Y ferme également X et $Y = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$.*

Théorème 2.21 *Soit X une martingale continue à droite. Alors X est uniformément intégrable si et seulement si $Y = \lim_t X_t$ existe p.s., $\mathbb{E}|Y| < \infty$ et Y ferme X.*
Dans ce cas la convergence a également lieu dans L^1.

Théorèmes d'arrêts

Théorème 2.22 *(Echantillonnage optionnel des martingales càd)*
Soit (X_t) une surmartingale continue à droite et soient σ et τ deux T.A. presque sûrement bornées tels que $\sigma \leq \tau$ ps.
Alors X_τ et X_σ sont intégrables et

$$\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma;$$

en particulier $\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_\sigma) \leq \mathbb{E}(X_0)$ (on a égalité s'il s'agit de martingales).

Proposition 2.5 *Soient $a < 0 < b$ et B_t un MBS. On note $T_y = \inf\{t > 0 : B_t = y\}$ le temps d'atteinte de $y \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}$$

Preuve : On pose $T = T_a \wedge T_b$ on peut montrer que $T < +\infty$ p.s. Comme $T \wedge t$ est un temps d'arrêt borné on a par le théorème précédent $0 = \mathbb{E}(B_0) = \mathbb{E}(B_{T\wedge t})$. On fait alors $t \to \infty$, par le théorème de convergence bornée on en déduit

$$0 = a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_a < T_b))$$

Ce qui implique le résultat.

Théorème 2.23 *(Echantillonnage optionnel des martingales régulières)*
Soit (X_t) une martingale continue à droite fermée par une v.a. X_∞. Soient σ et τ deux T.A. tels que $\sigma \leq \tau$ presque sûrement.
Alors X_τ et X_σ sont intégrables et

$$\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

Définition 2.12 *Soit X un processus et T un temps d'arrêt. On note X^T le processus définit par $X_t^T = X_{t\wedge T} = X_t \mathbf{1}_{\{t<T\}} + X_T \mathbf{1}_{\{t\geq T\}}$ appelé processus arrêté à T.*

Théorème 2.24 *Soit X une martingale uniformément intégrable continue à droite et T un temps d'arrêt. Alors X^T est aussi une martingale uniformément intégrable continue à droite. Il s'agit également d'une $\mathcal{G}_t$-martingale où $\mathcal{G}_t = F_{t\wedge T}$.*

Preuve : X^T est continue à droite. Par le théorème d'échantillonnage des martingale régulières on a

$$\begin{aligned} X_{T\wedge t} &= \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_{t\wedge T}) \\ &= \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{T<t\}} + X_T \mathbf{1}_{\{T\geq t\}}|\mathcal{F}_{t\wedge T}) \\ &= X_T \mathbf{1}_{\{T<t\}} + \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{T\geq t\}}|\mathcal{F}_{t\wedge T}) \end{aligned}$$

or comme $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable on a que $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_{\{T\geq t\}}$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable donc

$$\begin{aligned} X_{T\wedge t} &= X_T \mathbf{1}_{\{T<t\}} + \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_{\{T\geq t\}} \\ X_t^T &= \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Alors X^T est une $\mathcal{F}_t$ martingale uniformément intégrable par le théorème 2.21.

Corollaire 2.6 *Soit Y une v.a. intégrable et soient S et T des temps d'arrêts. Alors*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{S\wedge T}).$$

Théorème 2.25 *Soit X un processus adapté à trajectoires càd-làg. On suppose $\mathbb{E}|X_T| < \infty$ et $\mathbb{E}(X_T) = 0$ pour tous T.A. (fini ou pas). Alors X est une martingale uniformément intégrable.*

2.4 Martingales locales

Les conditions d'intégrabilité pour les martingales peuvent être assez restrictives. Afin de se donner un peu plus de liberté on introduit une nouvelle notion voisine moins restrictive. Pour motiver ce nouvel investissement, en empiétant quelque peu sur les prochains chapitres, on vera que l'intégrale stochastique, objet central de ce cours, n'est pas toujours une martingale. Mais par contre elle aura les propriétés de martingale locale.

2.4.1 Définition

Définition 2.13 *On dit qu'un processus càd-làg adapté $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une* martingale locale *s'il existe une suite $T_n \uparrow \infty$ de temps d'arrêt tels que pour $X_t^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ soit une martingale uniformément intégrable pour tout n. On dit alors que les T.A. T_n* localisent *ou réduisent X.*

On multiplie par $\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ ce qui permet de prendre des conditions initiales X_0 pas forcément intégrable.
On a les notions équivalentes pour surmartingale locale et sousmartingale locale.

Exemple : Toute martingale càd-làg (M_t) est une martingale locale continue. En effet prenons $T_n \equiv n$. On a clairement $T_n \uparrow \infty$. À n fixé $(M_t^n \mathbf{1}_{\{n>0\}})_{t\in\mathbb{T}}$ est bien une martingale uniformément intégrable : elle est régulière on pose $Y = M_n$ on a pour tout $s \leq n$

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = M_s^n$$

et si $s > n$ on a $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = Y = M_n = M_s^n$.
Remarque : à propos de l'intégrabilité, si X_t est un processus continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté et si T_n est défini par $T_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$ alors pour chaque n fixé $(X_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})$ est uniformément intégrable car borné par n. En effet $\mathbb{E}(|X_t^{T_n}|\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}) = \mathbb{E}(|X_{t\wedge T_n}|\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}) \leq n$. On voit donc que travailler avec des martingales locales continues libère des conditions d'intégration. Par exemple : si (X_t) est une martingale continue et si φ est une fonction convexe continue alors $(\varphi(X_t))$ est une sousmartingale locale.

Définition 2.14 *On dit qu'un temps d'arrêt T réduit ou localise un processus X si X^T est une martingale uniformément intégrable.*

2.4.2 Propriétés

Théorème 2.26 *Soient M, N des martingales locales et S et T des temps d'arrêts*
(a) Si T localise M et $S \leq T$ p.s. alors S réduit M ;
(b) La somme $M + N$ est aussi une martingale locale ;
(c) Si S et T localisent M alors $S \vee T$ réduit aussi M ;
(d) Les processus M^T et $M^T\mathbf{1}_{\{T>0\}}$ sont des martingales locales ;
(e) Soit X un processus càd-làg et $T_n \uparrow +\infty$ une suite croissante de T.A. telle que pour chaque n fixé le processus $X^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ est une martingale locale. Alors X est une martingale locale.

Preuve : Si T localise M alors X^T est une martingale uniformément intégrable et par le théorème 2.24 $(X^T)^S = X^{T\wedge S} = X^S$ est une martingale uniformément intégrable ce qui montre (a).
(b) Soient (T_n) et (S_n) des suites de temps d'arrêt localisantes respectivement pour M et N. Alors $(T_n \wedge S_n)$ est une suite localisante pour $M + N$.
(c) on a $M^{T\vee S} = M^T + M^S - M^{T\wedge S}$ comme $T \wedge S \leq T$ on sait par (a) que $T \wedge S$ localise M. Donc $M^{T\vee S}$ est une martingale uniformément intégrable.
(d) On remarque que si T_n est une suite localisante pour M alors elle l'est également pour M^T et $M^T\mathbf{1}_{\{T>0\}}$ par le théorème 2.23.
(e) cf. P. Protter chapitre 1 section 5.

Corollaire 2.7 *L'ensemble des martingale locale est un espace vectoriel.*

Définition 2.15 *On dira qu'un processus X satisfait localement une propriété $\mathcal{P}$ s'il existe une suite de TA $T_n \uparrow \infty$ ps tels que pour chaque $n \geq 1$ fixé le processus $X^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ a la propriété $\mathcal{P}$.*

Les deux résultats qui suivent sont des conséquences directes du (e) du théorème 2.26.

Théorème 2.27 *Si X est un processus qui est localement une martingale de carré intégrable alors X est une martingale locale.*

Théorème 2.28 *Autre caractérisation des martingales locales.*
Soit M un processus càd-làg adapté et $T_n \uparrow \infty$ ps une suite de T.A. Alors si pour chaque n le processus $M^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ est une martingale alors M est une martingale locale.

Théorème 2.29 *Soit X une (sous, resp. sur) martingale locale telle que $\mathbb{E}(\sup_{s\le t}|X_s|) < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors X est une (sous, resp. sur) martingale. Si de plus $\mathbb{E}(\sup_s |X_s|) < \infty$ alors X est une (sous, resp. sur) martingale uniformément intégrable.*

Preuve : L'hypothèse implique que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ et que X_t est adaptée. Il reste à vérifier que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ pour $t > s$. Pour cela soit T_n une suite localisante de X. On a

$$\mathbb{E}\left(X_t^{T_n}|\mathcal{F}_s\right) \geq X_s^{T_n}.$$

Clairement on a la domination $|X_t^{T_n}| \leq \sup_{0\le s\le t}|X_s|$ donc par convergence dominée pour les espérances conditionnelles on obtient le résultat cherché.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Corollaire 2.8 *Toute martingale locale bornée est une martingale.*

Théorème 2.30 *Si X est une martingale locale continue on peut toujours prendre $T_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$ comme suite localisante ou n'importe quelle suite $T'_n \leq T_n$ telle que $T'_n \uparrow \infty$.*

Preuve : Soient S_n une suite localisante de X et T'_n satisfaisant les conditions de l'énoncé. Si $s < t$ alors si l'on applique le théorème d'arrêt optionnel 2.22 à la martingale $(X_r^{S_n})_{r\geq 0}$ aux temps d'arrêts $\sigma = s \wedge T'_m$ et $\tau = t \wedge T'_m$. On obtient ainsi

$$\mathbb{E}\left(X_\tau^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}}|\mathcal{F}_{\sigma\wedge S_n}\right) = X_\sigma^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}}.$$

On multiplie ceci par $\mathbf{1}_{\{T'_m>0\}}$ qui est $\mathcal{F}_0$-mesurable donc $\mathcal{F}_{\sigma\wedge S_n}$-mesurable pour obtenir

$$\mathbb{E}\left(X_{\tau\wedge S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0,T'_m>0\}}|\mathcal{F}_{\sigma\wedge S_n}\right) = X_{\sigma\wedge S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0,T'_m>0\}}.$$

Quand $n \uparrow \infty$ on a $\mathcal{F}_{\sigma\wedge S_n} \uparrow \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{s\wedge T'_m}$ et pour tout $r \geq 0$

$$X_{r\wedge T'_m\wedge S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0,T'_m>0\}} \to X_{r\wedge T'_m}\mathbf{1}_{\{T'_m>0\}}$$

de plus $|X_{r\wedge T'_m\wedge S_n}|\mathbf{1}_{\{S_n>0,T'_m>0\}} \leq m$ donc par le théorème de convergence dominée pour l'espérance conditionnelle on obtient

$$\mathbb{E}(X_t^{T'_m}\mathbf{1}_{\{T'_m>0\}}|\mathcal{F}_{s\wedge T'_m}) = X_s^{T'_m}\mathbf{1}_{\{T'_m>0\}}$$

ce qui est le résultat cherché.

Théorème 2.31 *Convergence des martingales locales.*
Si X_t est une martingale locale sur $[0,\tau[$ et si

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s<\tau}|X_s|\right) < \infty$$

alors avec probabilité 1, $X_\tau = \lim_{t\uparrow\tau} X_t$ et $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_\tau)$.

Preuve admise (Référence, Durrett Chap. 2, Théorème 2.7).

Théorème 2.32 *Toute martingale locale (X_t) non négative et telle que $\mathbb{E}(X_0) < \infty$ est une surmartingale.*

Preuve : Soit T_n une suite localisante de X. La propriété de martingale implique que si $A \in \mathcal{F}_0$ alors

$$\mathbb{E}(X_t^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n>0\}\cap A}) = \mathbb{E}(X_0^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n>0\}\cap A}) = \mathbb{E}(X_0 \mathbf{1}_{\{T_n>0\}\cap A}).$$

En prenant la limite et en utilisant Fatou et le théorème de convergence dominée on obtient

$$\mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_A) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_t^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n>0\}\cap A}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_0 \mathbf{1}_{\{T_n>0\}\cap A}) = \mathbb{E}(X_0 \mathbf{1}_A).$$

À présent prenons $A = \Omega$ d'où $\mathbb{E}(X_t) \leq \mathbb{E}(X_0) < \infty$. Comme l'inégalité ci dessus vaut pour tout $A \in \mathcal{F}_0$ on en déduit que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_0) \leq X_0$.
Pour conclure on utilise le Lemme suivant que l'on admettra

Lemme 2.1 *Soit X une martingale (resp. sousmartingale, surmartingale) locale et T un temps d'arrêt fini. Alors $Y_t = X_{T+t}$ est une $(\mathcal{F}_{T+t})_{s\geq 0}$-martingale (resp. sousmartingale, surmartingale) locale.*

On utilise donc le lemme avec $T = s$, ce qui implique que $Y_t = X_{s+t}$ est une surmartingale locale à laquelle on peut

Chapitre 3

Intégrale de Stieltjes et Intégrale d'Itô

Contents

3.1 Intégrale de Stieltjes

3.1.1 Processus à variation finie

On commence par donner quelques définitions générales.

Définition 3.1 *Soit X un processus càd-làg, on définit la* variation *de $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sur l'intervalle $[a, b]$ par*

$$V_{[a,b]}(X)(\omega) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)| \ : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < ... < t_n = b\right\}.$$

On dit que X est à variation finie *si $V_I(X) < \infty$ p.s. pour tout sous intervalle compact I de $\mathbb{R}^+$.*
Pour $I = [0, t]$ on notera V_t au lieu de $V_{[0,t]}$.

Définition 3.2 *Soit (Δ_n) une suite de* subdivisions *de $[0, t]$ c'est à dire $\Delta_n = (t_0^n = 0 < t_1^n < t_2^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$. On définit le* pas *de Δ_n par $|\Delta_n| = \sup_{i\in\{1,..,k(n)\}} |t_i^n - t_{i-1}^n|$.*

Remarques :
1) Un résultat "classique" d'analyse réelle établie qu'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à variation finie sur tout intervalle $[0,t]$ si et seulement si f est la différence de deux fonctions monotone : i.e. $f = g - h$ où g et h sont deux fonctions croissantes (au sens large).
2) On observe que $V_0(X) = 0$.
3) On suppose $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$ et $X_t(\omega)$ un processus càd-làg à variation finie. On pose alors

$$V_t^{\Delta_n}(X)(\omega) = \sum_{i=1}^{k(n)} |X_{t_i^n}(\omega) - X_{t_{i-1}^n}(\omega)|.$$

Alors $V_t^{\Delta_n}(X) \uparrow V_t(X)$ p.s. quand $n \to \infty$. En particulier la limite ne dépend pas de la suite de subdivisions choisie.
On pourra donc prendre

$$V_t(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} |X_{kt/2^n} - X_{(k-1)t/2^n}|.$$

Exemples :
1) Si X_t est un processus croissant (ou décroissant) alors pour presque tout ω on peut écrire $X_t(\omega) = g_\omega(t) = g(t)$ où g est une fonction monotone en t. Pour toute suite de subdivisions $\Delta_n = (t_0^n = 0 < t_1^n < t_2^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ de $[0,t]$ de pas on a

$$V_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} |g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)| = |g(t) - g(0)| = |X_t - X_0|.$$

Donc $V_t(X) = |X_t - X_0| < \infty$ et X_t est à variation finie.
En particulier si X est un processus de Poisson d'intensité λ. On a pour tout $t > 0$ fixé $V_t(X) = X_t$ où X_t est une v.a. de Poisson de paramètre λt.
2) Si X_s est p.s. continûment derivable sur $[0,t]$: i.e. $X_s(\omega) = f_\omega(s) = f(s)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$ on a alors

$$\begin{aligned} V_t^{\Delta_n}(X) &= \textstyle\sum_{i=1}^{k(n)} |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k(n)} |\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} f'(s)\, ds| \\ &\le \max_{s\in[0,t]} |f'(s)| t. \end{aligned}$$

On en déduit X est à variation finie.

Lemme 3.1 *(a) Le processus $V(X) = (V_t(X))$ est un processus croissant, donc à variation finie et $V(V(X)) = V(X)$;*
(b) Si X est un processus continu (p.s.) et à variation finie alors $t \mapsto V_t(X)$ est continue.

Preuve : L'application $t \mapsto V_t(X)$ est croissante par définition et les propriétés énoncées dans (a) sont immédiates.
Pour montrer la continuité il suffit de montrer qu'il ne peut y avoir de saut.
On suppose par l'absurde qu'il existe t et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall s, u$ tels que $s < t < u$ on a $V_u(X) - V_s(X) > \varepsilon$. On remarque que $V_u(X) - V_s(X)$ représente la variation de X sur $[s, u]$.

Fixons $s_0 < t < u_0$. Soit $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $|r-t| < \delta_\varepsilon$ implique $|X_t - X_r| < \varepsilon/3$. L'existence d'un tel δ_ε résulte de la continuité de (X_t).
On va définir par récurrence une suite décroissante d'intervalles emboîtés $[s_n, u_n]$, avec $s_n < t < u_n$: on suppose $[s_n, u_n]$ défini jusqu'à $n \geq 0$. On prend alors une subdivision Δ_n de $[s_n, u_n]$ ne contenant pas t, de pas $|\Delta_n| < \delta_\varepsilon$ et de variation $V_{u_n}^{\Delta_n}(X) - V_{s_n}^{\Delta_n}(X) > 2\varepsilon/3$. On choisit alors s_{n+1} le plus grand point de la subdivision $< t$ et u_{n+1} le plus petit point de la subdivision $> t$. Par construction on voit que la variation de X sur $[s_n, u_n]$ privé de $[s_{n+1}, u_{n+1}]$ est toujours $> \varepsilon/3$. Ce qui implique que la variation totale sur $[s_0, u_0]$ doit être infinie ce qui contredit l'hypothèse X à variation finie. $\sharp$

Théorème 3.1 *Toute martingale locale continue X_t à variation finie est constante égale à X_0.*

Preuve : En soustrayant X_0 on peut se ramener au cas $X_0 = 0$ et montrer que X est identiquement nulle.
Soit $t > 0$ et $V_t(X)$ la variation de X sur $[0, t]$. De part le Lemme 3.1 on sait que l'application $s \mapsto V_s(X)$ est continue.
Soit $0 < K < \infty$, on définit le temps d'arrêt $S = S_K := \inf\{s \geq 0 : V_s(X) \geq K\}$.
On a

$$s \leq S \;\Rightarrow\; |X_s| \leq K \tag{3.1}$$

ce qui implique que le processus arrêté $M_s = X_s^S = X_{s\wedge S}$ est borné par K.
De plus $M = (M_s)_{s\geq 0}$ est une martingale locale par le (d) du Théorème 4.1 du Chapitre 2.
Donc M est une martingale locale bornée, c'est donc une martingale de par le Corollaire 4.2 chapitre 2.
Pour $s < u$ on remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((M_u - M_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}(M_u^2|\mathcal{F}_s) - 2M_s\mathbb{E}(M_u|\mathcal{F}_s) + M_s^2 \\ &= \mathbb{E}(M_u^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2 \\ &= \mathbb{E}(M_u^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s)\end{aligned} \tag{3.2}$$

cette équation est très souvent appelée *orthogonalité des accroissements de martingale.*
À présent soit $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ une subdivision de $[0, t]$ de pas $|\Delta_n| = \sup_i |t_i^n - t_{i-1}^n|$, on a par l'orthogonalité des accroissements de martingale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} M_{t_i^n}^2 - M_{t_{i-1}^n}^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right)\end{aligned}$$

De plus comme $\sum a_i^2 \leq \sup_j |a_j| (\sum |a_i|)$ on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t^2) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_i |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}| \sum_{i=1}^{k(n)} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}|\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{1\leq i\leq k(n)} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}| V_{t\wedge S}(X)\right).\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant due aux faits :
i) $M_{t_j^n} = M_S$ dès que $t_j^n \geq S$ et

ii) $V_{t\wedge S}(X) \geq V_{t\wedge S}^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} |M_{t_i^n \wedge S} - M_{t_{i-1}^n \wedge S}|$.
Or par définition on a $V_{t\wedge S}(X) \leq K$ d'où pour tout n

$$\mathbb{E}(M_t^2) \leq K\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq i\leq k(n)} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}|\right).$$

En utilisant la continuité de (X_s) sur $[0,t]$ cette dernière expression implique $\mathbb{E}(M_t^2) = 0$.
En effet :
la continuité de (X_s) implique que si l'on prend des raffinements de la subdivision Δ_n de pas $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$ on obtient $\sup_{1\leq i\leq k(n)} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}| \to 0$ quand $n \to \infty$. D'autre part comme $\sup_{1\leq i\leq k(n)} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}| \leq 2K$ pour tout n, on conclut par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{1\leq i\leq k(n)} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}|\right) = 0.$$

Ceci montre donc que $M_t = 0$ avec probabilité 1.
Nous avons montré ceci pour un t arbitraire fixé on peut donc conclure

$$\mathbb{P}(M_t = 0, \forall t \in \mathbb{Q}^+) = 1$$

et par continuité on en déduit $\mathbb{P}(M_t = 0, \forall t \geq 0) = 1$. Enfin $K > 0$ étant arbitraire on en déduit $\mathbb{P}(X_t = 0, \forall t \geq 0) = 1$. $\sharp$

3.1.2 Intégrale de Stieltjes

Définitions

Soit X un processus croissant (au sens large). Soit ω une trajectoire de X continue à droite et croissante (au sens large). Ceci induit une mesure positive $\mu_X(\omega, ds)$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu_X(\omega, [a,b[) = X_b(\omega) - X_a(\omega)$ pour tous $a \leq b$. Plus généralement si f est une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^+$ alors

$$\int_0^t f(s)\ dX_s(\omega) := \int_0^t f(s)\mu_X(\omega, ds)$$

est bien définie pour tout $t > 0$.
De même si $H_s = H(s,\omega)$ est un processus mesurable on peut définir ω par ω l'intégrale

$$(H\cdot X)_t(\omega) := \int_0^t H(s,\omega)\ dX_s(\omega).$$

En procédant de façon analogue si X est un processus à variation finie on a une mesure induite $\mu_X(\omega, ds)$ (qui est cette fois une *mesure signée* : la mesure peut être négative) et l'on peut définir

$$(H\cdot X)_t(\omega) := \int_0^t H(s,\omega)\ dX_s(\omega).$$

pour tout H bornée mesurable.
Notation Etant donné un processus à variation fini X et H un processus mesurable tel que presque sûrement

$$\int_0^t H(s,\omega)\ dX_s(\omega)$$

existe et soit fini pour tout $t > 0$. On notera $H \cdot X$, ou de façon équivalente $\int H\ dX$, le processus $((H \cdot X)_t)_{t \geq 0} = (\int_0^t H\ dX)_{t \geq 0}$ que l'appellera **intégrale de Stieltjes** de H par X.

Théorème 3.2 *(a) Soient X et Y deux processus adapté croissants tels que $Y - X$ soit aussi un processus croissant. Alors il existe un processus mesurable adapté H tel que $0 \leq H \leq 1$ et $X = H \cdot Y = \int H\ dY$.*
(b) Soit X un processus adapté à variation finie. Alors il existe un processus mesurable adapté H tel que $-1 \leq H \leq 1$ et $V(X) = H \cdot X = \int H\ dX$ et $X = H \cdot V(X) = \int H\ dV(X)$.

Preuve : Admise (cf Protter)
Exemples : (1) On a vu que si $N = (N_t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ alors $V(N) = (V_t(N)) = (N_t)$ et donc on voit que

$$V(N) = \int 1\ dN \text{ et } N = \int 1\ dV(N).$$

(2) Soit M un autre processus de Poisson d'intensité μ indépendant de N alors le processus $Y = M + N$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$. De par le (a) du théorème précédent il existe $0 \leq H \leq 1$ mesurable adapté tel que

$$N = \int Hd(M + N).$$

On rappelle que le prototype d'un processus prévisible en temps continu est un processus adapté càg-lad. Bien évidement tout processus continu adapté est prévisible. Le théorème suivant est un résultat d'analyse classique.

Théorème 3.3 *Soient $H = (H_t)$ un processus prévisible et $X = (X_t)$ un processus à variation finie. L'*intégrale de Stieltjes *de H par rapport à X sur l'intervalle $[0, t]$ est la limite*

$$\int_0^t H_s\ dX_s := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} H(s_i^n) \left(X(t_i^n) - X(t_{i-1}^n) \right)$$

où $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)=t}^n)$ est une suite de subdivisions de $[0, t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et pour tous $n \geq 1$ et $i = 1, ..., k(n)$, $s_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$.

Remarque Importante : Le Brownien $B = (B_t)$ étant une martingale continue (prévisible) et non constante on déduit du Théorème 3.1 qu'il n'est pas à variation finie. De fait on ne peut pas définir $\int H\ dB$ comme une intégrale de Stieltjes.

Formules de changement de variables et d'IPP

On montre à partir du théorème précédent que

Théorème 3.4 *Soit X un processus à variation finie à trajectoires continues (p.s.).*
(a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f(X) = (f(X_t))_{t \geq 0}$ est un processus à variation finie et on a

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\ dX_s.$$

(b) si de plus H est un processus à variation finie à trajectoires continues (p.s.) alors

$$\int_0^t H_s \, dX_s = H_t X_t - H_0 X_0 - \int_0^t X_s \, dH_s.$$

Preuve : Exercice.

Remarques :
(1) une application directe du (a) du théorème précédent montre que si g est une fonction continue alors

$$\int_{X_0}^{X_t} g(u) \, du = \int_0^t g(X_s) \, dX_s$$

ce qui justifie le nom de formule du changement de variables.
(2) On verra dans la suite du cours que pour X à variation finie et f de classe $\mathcal{C}^1$ on a

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \sum_{0<s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta(X_s)].$$

Exemple

Soit N un processus de Poisson de paramètre λ on a vu que le processus $M_t = N_t - \lambda t$ que l'on appelle **Processus de Poisson compensé** est une martingale càd-làg. De plus pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2^n} |M_{kt/2^n} - M_{(k-1)t/2^n}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \left(|N_{kt/2^n} - N_{(k-1)t/2^n}| + \lambda |kt/2^n - (k-1)t/2^n| \right) = N_t + \lambda t
\end{aligned}$$

Donc M est aussi à variation finie. Soit H un processus mesurable alors on a

$$\int_0^t H_s \, dM_s = \int_0^t H_s \, dN_s - \lambda \int_0^t H_s \, ds = \sum_{n=1}^{\infty} H_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} - \lambda \int_0^t H_s \, ds$$

où T_n représente le temps du $n$ème saut du Processus de Poisson.
Si on suppose de plus H prévisible, adapté et borné. Alors $\int H \, dM$ est aussi un processus adapté intégrable et pour tout $0 \leq s < t < \infty$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\int_0^t H_u \, dM_u - \int_0^s H_u \, dM_u | \mathcal{F}_s \right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\int_s^t H_u \, dM_u | \mathcal{F}_s \right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} H(t_{i-1}^n) \left(M(t_i^n) - M(t_{i-1}^n) \right) | \mathcal{F}_s \right)
\end{aligned}$$

et par convergence dominée

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E}\left(H(t_{i-1}^n)\left(M(t_i^n) - M(t_{i-1}^n)\right)|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(H(t_{i-1}^n)\left(M(t_i^n) - M(t_{i-1}^n)\right)|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\right)|\mathcal{F}_s\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que $\int H\, dM$ est une martingale.
L'hypothèse H prévisible est cruciale : supposons $H_t = \mathbf{1}_{[0,T_1[}(t)$ alors H est un processus càd-làg adapté et son intégrale de Stieltjes par M est

$$\int_0^t H_s\, dM_s = \sum_{n=1}^{\infty} H_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}} - \lambda \int_0^t H_s\, ds = -\lambda(t \wedge T_1)$$

qui n'est pas une martingale !

3.2 Variation et covariation quadratique des processus continus

3.2.1 Définitions

Le résultat suivant est une généralisation de la décomposition de Doob abordée au chapitre précédent.

Théorème 3.5 *Décomposition de Doob-Meyer*
Soit (X_t) une martingale locale continue. On définit sa variation quadratique $\langle X\rangle_t$ *comme l'unique processus croissant prévisible tel que $\langle X\rangle_0 = 0$ et $(X_t^2 - \langle X\rangle_t)$ est une martingale locale continue.*

Preuve admise (référence Durrett Ch. 2 Theorem 3.1).

Exemple : Pour le Brownien, on a déjà vu que $B_t^2 - t$ est une martingale. Comme $A_t = t$ est croissant et prévisible avec $A_0 = 0$ on déduit de la décomposition de Doob-Meyer que $\langle B_t\rangle_t = t$.

Remarque : Le processus $\langle X\rangle_t$ est à variation finie (car croisant).

Le lien entre le nom "variation quadratique" et $\langle X\rangle_t$ est donné par le résultat suivant que nous admettrons (Référence : Durrett Chap.2 Théorème 3.8).

Théorème 3.6 *Soit X_t une martingale locale continue. Pour tout t et toute suite de subdivisions $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ de $[0,t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, on pose*

$$Q_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2.$$

Alors

$$\sup_{s \le t} |Q_s^{\Delta_n}(X) - \langle X \rangle_s| \to 0$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$.

Remarque importante : La variation quadratique d'un processus X continu à variation finie est nulle.
En effet

$$\begin{aligned} Q_t^{\Delta_n}(X) & \le \sup_{1 \le j \le k(n)} \left| X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n} \right| \left(\sum_{i=1}^{k(n)} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}| \right) \\ & = \sup_{1 \le j \le k(n)} \left| X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n} \right| V_t^{\Delta_n}(X); \end{aligned}$$

et de par la continuité de X_t on a $\sup_{1 \le j \le k(n)} \left| X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n} \right| \to 0$ quand $n \to \infty$. D'où le résultat. $\sharp$
On en tire que tout processus X continu ayant une variation quadratique non nulle est à variation infinie. Pour un tel processus on ne peut alors donner un sens à $\int H \, dX$ comme intégrale de Stieltjes.

Exemple : Pour le mouvement Brownien W on a montré (cf. cours de 2A : chapitre 2 section 2.3 du cours de E. Gobet) un résultat plus fort : la convergence presque sûre de $Q_t^{\Delta_n}(W)$ vers t.

Définition 3.3 *Soient X et Y deux martingales locales on définit leur* covariation quadratique, *notée* $(\langle X, Y \rangle_t)$ *par*

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} \left(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t \right)$$

On ne sera pas très surpris d'avoir

Théorème 3.7 *Soit X_t et Y_t deux martingales locales continues. Pour tout t et toute suite de subdivisions $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ de $[0, t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, on pose*

$$Q_t^{\Delta_n}(X, Y) = \sum_{i=1}^{k(n)} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}).$$

Alors

$$\sup_{s \le t} |Q_s^{\Delta_n}(X, Y) - \langle X, Y \rangle_s| \to 0$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$.

Preuve : Il suffit de remarquer que

$$Q_s^{\Delta_n}(X, Y) = \frac{1}{4} (Q_s^{\Delta_n}(X, +Y) - Q_s^{\Delta_n}(X - Y))$$

et d'utiliser le Théorème 3.6. $\sharp$
Remarque importante : Comme auparavant on montre que si X est un processus continu et si Y est à variation finie alors la covariation quadratique de X et Y est nulle.

Théorème 3.8 *Soient (X_t) et (Y_t) deux martingales locales continues. Alors $\langle X,Y\rangle_t$ est l'unique processus prévisible, à variation finie tel que $\langle X,Y\rangle_0 = 0$ et $(X_tY_t - \langle X,Y\rangle_t)$ est une martingale locale continue.*

Preuve : Par définition : i) $\langle X,Y\rangle_t$ est la différence de deux processus croissants à variation finie ; ii) il hérite du caractère prévisible de $\langle X+Y\rangle_t$ et $\langle X-Y\rangle_t$. En utilisant une fois de plus la définition on obtient que

$$X_tY_t - \langle X,Y\rangle_t = \frac{1}{4}\left[(X_t+Y_t)^2 - \langle X+Y\rangle_t - \left\{(X_t-Y_t)^2 - \langle X-Y\rangle_t\right\}\right]$$

est une martingale locale (somme de martingales locales). Pour l'unicité on remarque que si A_t et A'_t vérifient la propriété ci dessus alors $A_t - A'_t = (X_tY_t - A'_t) - (X_tY_t - A_t)$ est une martingale locale continue, prévisible et à variation finie et donc par le Théorème 3.1 elle est constante égale à $A_0 - A'_0 = 0 - 0 = 0$. $\sharp$

3.2.2 Propriétés

Soient X, Y et Z des martingale locales continues. Les propriétés suivantes sont laissées à titre d'exercice

- $\langle X,Y\rangle_t = \langle Y,X\rangle_t$.
- $\langle X+Y,Z\rangle_t = \langle X,Z\rangle_t + \langle Y,Z\rangle_t$.
- $\langle X-X_0,Y\rangle_t = \langle X,Y\rangle_t$.
- Si $a,b\in\mathbb{R}$ alors $\langle aX,bY\rangle_t = ab\langle X,Y\rangle_t$.
- Si T est un T.A. alors $\langle X^T,Y^T\rangle_t = \langle X^T,Y\rangle_t = \langle X,Y\rangle_{T\wedge t}$

On admettra le résultat suivant

Proposition 3.1 *Soient $S\le T$ deux temps d'arrêt. Alors $\langle X\rangle_S = \langle X\rangle_T$ si et seulement si X est constant sur $[S,T]$.*

3.3 Intégrale d'Itô

Le but de cette section est de construire une généralisation de l'intégrale de Stieltjes permettant d'intégrer par rapport a un processus continu qui n'est pas à variation finie. On va procédé par étapes successives : définir une intégrale stochastique par rapport à une martingale bornée, puis passer aux martingales locales. Dans le chapitre qui suit nous étendrons cette construction aux semimartingales : objet le plus naturel de l'intégration stochastique.

3.3.1 Intégration par des martingales bornées

Dans cette partie il s'agit de construire un nouvel objet mathématique permettant d'intégrer des processus prévisibles par rapport a une martingale continue bornée.

Comme dans le cas de l'intégrale de Lebesgue il s'agit d'une "montée en puissance". On commence par intégrer les fonction les plus simples puis on passe aux limites pour obtenir le cas général.

Intégration des processus prévisibles élémentaires

Définition 3.4 *On appelle* processus prévisible élémentaire (H_t) *un processus de la forme*

$$H_t(\omega) = Y(\omega)\mathbf{I}_{]a,b]}(t)$$

où Y est $\mathcal{F}_a$-mesurable.
On définit Π_0 *comme l'*ensemble des processus prévisibles élémentaires.

Définition 3.5 *Soit $H = (H_t)$ un processus de Π_0. On définit l'*intégrale stochastique *de H par rapport au processus continu X sur $[0, +\infty[$, notée $(H \cdot X)$ ou $\int H\ dX$ par*

$$\int H_s\ dX_s := Y(\omega)(X_b(\omega) - X_a(\omega))$$

L'intégrale stochastique $(H \cdot X)_t$ sur $[0, t]$ est alors définie par

$$(H \cdot X)_t \equiv \int_0^t H_s\ dX_s = \int H_s \mathbf{I}_{[0,t]}(s)\ dX_s.$$

Remarques :
(1) L'intégrale stochastique est un processus aléatoire.
(2) De part la continuité de X, l'application $t \mapsto (H \cdot X)_t$ est continue.
(3) Si on prend $H \equiv 1$ on obtient pour tout t

$$(1 \cdot X)_t \equiv \int_0^t 1\ dX_s = X_t - X_0.$$

Théorème 3.9 *Si X est une martingale continue et $H \in b\Pi_0 = \{H \in \Pi_0 : H \text{ est borné}\}$, alors $(H \cdot X)_t$ est une martingale continue.*

Preuve : Nous avons déjà vu la continuité au cours des remarques précédentes. Je laisse l'intégrabilité et l'adaptabilité comme exercice. Soit donc $H_s = C\mathbf{I}_{]a,b]}(s)$ avec $0 \leq a < b$ et C une v.a. $\mathcal{F}_a$-mesurable. On va commencer par montrer que si $t = b$ alors pour tout $a \leq s < b$

$$\mathbb{E}((H \cdot X)_b | \mathcal{F}_s) = (H \cdot X)_s.$$

En effet $\mathbb{E}((H \cdot X)_b | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(C(X_b - X_a)|\mathcal{F}_s) = C\mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_s) - CX_a = C(X_s - X_a) = (H \cdot X)_s$.
Si $s < a$ alors $(H \cdot X)_s = 0 = (H \cdot X)_a$ et on a $\mathbb{E}((H \cdot X)_b|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((H \cdot X)_b|\mathcal{F}_a)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((H \cdot X)_a|\mathcal{F}_s) = 0 = (H \cdot X)_s$.
Si $t > s > b$ alors C, X_b et X_a sont $\mathcal{F}_s$-mesurables et comme $(H \cdot X)_t = (H \cdot X)_s = (H \cdot X)_b$ on a donc $\mathbb{E}((H \cdot X)_t|\mathcal{F}_s) = C(X_b - X_a) = (H \cdot X)_s$.
Si $t > b \geq s$ alors $\mathbb{E}((H \cdot X)_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((H \cdot X)_b|\mathcal{F}_s) = (H \cdot X)_s$ d'après les deux premières étapes.
Enfin si $b \geq t > s$ alors $\mathbb{E}((H \cdot X)_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((H \cdot X)_b|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((H \cdot X)_b|\mathcal{F}_s) = (H \cdot X)_s$ d'après les deux premières étapes.

Exemple : C'est le cas avec B_t : si $H \in b\Pi_0$ alors $(H \cdot B)_t := \int_0^t H_s\ dB_s$ est une martingale continue.

Intégration des processus prévisibles simples

Définition 3.6 *On dit qu'un processus* (H_t) *est* prévisible simple *si l'on peut l'écrire comme une somme finie de processus prévisibles élémentaires :*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(\omega)\mathbf{I}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \tag{3.3}$$

où $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_m$ *et* Y_i *est* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*-mesurable.*
On définit alors Π_1 *comme l'*ensemble des processus prévisibles simples.

Définition 3.7 *Soit* $H = (H_t)$ *un processus de* Π_1 *de représentation (3.3). On définit l'intégrale stochastique de* H *par rapport au processus continu* X *sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$\int H_s \, dX_s := \sum_{i=1}^{m} Y_i(\omega)(X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega))$$

L'intégrale stochastique $(H \cdot X)_t$ *sur* $[0, t]$ *est alors définie par*

$$(H \cdot X)_t \equiv \int_0^t H_s \, dX_s = \int H_s \mathbf{I}_{[0,t]}(s) \, dX_s.$$

Remarque importante : La représentation (3.3) de $H \in \Pi_1$ n'est pas unique : on peut par exemple considérer une subdivision plus fine pour représenter H. Cependant il est fondamental de noter que la valeur (aléatoire) de l'intégrale stochastique ne dépend pas de la représentation choisie.

Théorème 3.10 *Soient* X *et* Y *des martingales continues et* $H, K \in \Pi_1$ *alors pour tout* $t \geq 0$

$$((H + K) \cdot X)_t = (H \cdot X)_t + (K \cdot X)_t$$
$$(H \cdot (X + Y))_t = (H \cdot X)_t + (H \cdot Y)_t$$

Preuve : vue en cours.

Remarque : En conséquence $(.\cdot X)_t$ est linéaire : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a $((aH+bK)\cdot X)_t = a(H \cdot X)_t + b(K \cdot X)_t$.

En utilisant le Théorème 3.9 et le fait qu'une somme finie de martingales locales continues est une martingale locale continue on obtient facilement le

Théorème 3.11 *Soit* X *une martingale continue et* $H \in b\Pi_1 = \{H \in \Pi_1 : H \text{ borné}\}$*, alors* $(H \cdot X)_t$ *est une martingale continue.*

Théorème 3.12 *Soient* X *et* Y *des martingales continues bornées et* $H, K \in b\Pi_1$ *alors*

$$\langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s \, d\langle X, Y \rangle_s.$$

Par conséquent $\mathbb{E}((H \cdot X)_t(K \cdot Y)_t) = \mathbb{E} \int_0^t H_s K_s \, d\langle X, Y \rangle_s$ *et*

$$\mathbb{E}\left((H \cdot X)_t^2\right) = \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 \, d\langle X \rangle_s \tag{3.4}$$

Remarques :
(1) Bien noter que les intégrales par rapport à $\langle X,Y\rangle_s$ et $\langle X\rangle_s$ sont des intégrales de Stieltjes "classiques". Ceci en vertu du fait que $s \mapsto \langle X,Y\rangle_s$ est localement à variation bornée.
(2) La relation (3.4) à des répercussions importantes au niveau de la construction générale de l'intégrale stochastique. En particulier on en tire (dans les conditions du Théorème 3.12) que la martingale $(H\cdot X)_t$ est de carré intégrable.
(3) La première partie du Théorème 3.10 montre que l'intégrale stochastique est linéaire. En conséquence de la remarque précédente si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue bornée on vient de définir un *opérateur linéaire*

$$(.\cdot X)_. : b\Pi_1 \to \mathcal{M}^2,$$

où $\mathcal{M}^2$ est l'espace des martingales $\mathcal{F}_t$-adaptées de carré intégrable.

Preuve du Théorème 3.12
Il suffit de montrer que

$$Z_t = (H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t - \int_0^t H_sK_s\ d\langle X,Y\rangle_s$$

est une martingale et on conclut par le Théorème 3.8.
On commence par remarquer que

$$((H^1+H^2)\cdot X)_t(K\cdot Y)_t = (H^1\cdot X)_t(K\cdot Y)_t + (H^2\cdot X)_t(K\cdot Y)_t$$

et

$$\int_0^t (H^1_s+H^2_s)K_s\ d\langle X,Y\rangle_s = \int_0^t H^1_sK_s\ d\langle X,Y\rangle_s + \int_0^t H^2_sK_s\ d\langle X,Y\rangle_s.$$

Ces deux identités montrent que si le résultat vaut pour (H^1,K) et (H^2,K) alors il vaut pour (H^1+H^2,K) ; et si le résultat vaut pour (H,K^1) et (H,K^2) alors il vaut pour (H,K^1+k^2).
Il suffit donc de montrer le résultat pour $H = C\mathbf{I}_{]a,b]}$ et $K = D\mathbf{I}_{]c,d]}$. Enfin il suffira d'analyser les cas suivant (i) $b\le c$ et (ii) $a=c, b=d$.
Cas (i) Dans ce cas on a $\int_0^t H_sK_s\ d\langle X,Y\rangle_s \equiv 0$ et on doit m.q. $(H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t$ est une martingale. C'est en effet le cas car si on pose $J = C(X_b-X_a)D\mathbf{I}_{]c,d]}$ alors on a $(H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t = (J\cdot Y)_t$ qui est une intégrale stochastique d'un processus simple, donc une martingale.
cas (ii) Dans ce cas on a

$$Z_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s\le a \\ CD\left[(X_s-X_a)(Y_s-Y_a) - (\langle X,Y\rangle_s - \langle X,Y\rangle_a)\right] & \text{si } a\le s\le b \\ CD\left[(X_b-X_a)(Y_b-Y_a) - (\langle X,Y\rangle_b - \langle X,Y\rangle_a)\right] & \text{si } b\le s. \end{cases}$$

Donc il suffit (pourquoi ? exercice) de vérifier la propriété de Martingale pour $a\le s\le t\le b$. Pour cela on remarque que

$$Z_t - Z_s = CD\left[X_tY_t - X_sY_s - X_a(Y_t-Y_s) - Y_a(X_t-X_s) - (\langle X,Y\rangle_t - \langle X,Y\rangle_s)\right]$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_s$ et en remarquant que X_a, Y_a sont $\mathcal{F}_s$-mesurables et $\mathbb{E}(X_t-X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y_t-Y_s|\mathcal{F}_s) = 0$ on a

$$\mathbb{E}(Z_t-Z_s|\mathcal{F}_s) = CD\mathbb{E}\left(X_tY_t - \langle X,Y\rangle_t - (\,X_sY_s - \langle X,Y\rangle_s\,)|\mathcal{F}_s\right) = 0$$

Ce qui termine la preuve. $\sharp$

Intégration des processus prévisibles de carrés intégrables

Dans cette partie on considère X une martingale continue bornée.

Définition 3.8 *On note $\Pi_2(X)$ l'ensemble des processus prévisibles H vérifiant*

$$\|H\|_X^2 := \mathbb{E}\left(\int H_s^2 \, d\langle X\rangle_s\right) < \infty.$$

Remarque : $\|H\|_X$ est une norme sur $b\Pi_1$. L'application linéaire $H \mapsto \int H_s \, dX_s$ de $b\Pi_1$ dans $\mathcal{M}^2$ induit une norme sur l'espace des intégrales stochastiques simples.

Théorème 3.13 *Isométrie d'Itô.*
Soit X une martingale bornée et $H \in b\Pi_1$ alors

$$\|(H \cdot X)\|_2^2 := \sup_t \mathbb{E}\left((H \cdot X)_t^2\right) = \|H\|_X^2$$

Preuve : On a (en utilisant que $\langle X\rangle_t$ est un processus croissant)

$$\|H\|_X^2 = \mathbb{E}\left(\int H_s^2 \, d\langle X\rangle_s\right) = \sup_t \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 \, d\langle X\rangle_s\right).$$

Et de par (3.4) on obtient

$$\|H\|_X^2 = \sup_t \mathbb{E}\left((H \cdot X)_t^2\right) = \|(H \cdot X)\|_2^2.$$

Ce qui conclut la preuve. $\sharp$

On ne fera qu'esquisser les grandes lignes de l'extension de l'intégrale stochastique de $b\Pi_1$ à $\Pi_2(X)$. Pour les détails nous renvoyons au livre de Durrett.

Construction de l'intégrale des processus de $\Pi_2(X)$

Première étape : on montre que $b\Pi_1$ est dense dans $\Pi_2(X)$. C'est à dire que pour tout processus H de Π_2 il existe une suite de processus simples (H^n) de $b\Pi_1$ telle que $\|H^n - H\|_X \to 0$.
Idée de la preuve : Supposons que l'on travaille à horizon fini : sur $[0, T]$.
(a) On commence par supposer H continu et borné. Il suffit alors de prendre

$$H_t^n := H_0 \mathbf{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1} 2^n H_{(k-1)T/2^n} \mathbf{I}_{](k-1)T/2^n, kT/2^n]}(t)$$

et on obtient $H_t^n \to H_t$ sur $[0, T]$ par convergence dominée.
(b) Pour H bornée. On pose $G_t := \int_0^t H_s \, d\langle X\rangle_s$, on pose $\varepsilon_m = 1/m$. Pour m suffisamment grand le processus définit par

$$\tilde{H}_t^m := \frac{G_t - G_{t-\varepsilon_m}}{\varepsilon_m}$$

est continu, borné et $\mathcal{F}_t$-adapté. De plus pour presque tout (t,ω) on a $\lim_{m\to\infty} \tilde{H}_t^m(\omega) = H_t(\omega)$. Par convergence dominée on obtient

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\tilde{H}_t^m - H_t)^2 \, d\langle X\rangle_s\right) = 0$$

et par (a) on peut choisir des suites $H^{n,m}$ de processus simples telles que $H^{n,m} \to \tilde{H}^m$ pour $n \to \infty$ de façon a ce que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (H_t^{n,n} - H_t)^2 \, d\langle X\rangle_s\right) = 0.$$

(c) Pour un $H \in \Pi_2(X)$ on pose

$$\widetilde{H}_t^m = H_t \mathbf{I}_{|X_t|\le m}.$$

Pour tout $m \geq 1$ le processus $\widetilde{H}_t^m$ est borné et on a $|\widetilde{H}_t^m| \leq |H_t|$ donc par convergence dominée on a

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\widetilde{H}_t^m - H_t)^2 \, d\langle X\rangle_s\right) = 0$$

On conclut comme précédemment en utilisant (b) et un argument diagonal.

Deuxième étape : comme (H^n) est convergente, elle est de Cauchy. C'est à dire $\|H^n - H^m\|_X \to 0$ quand $m,n \to \infty$. Par l'isométrie d'Itô on en déduit que $(H^n \cdot X)$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2$.

Troisième étape : $\mathcal{M}^2$ est un espace complet donc la suite de Cauchy $(H^n \cdot X)$ converge dans $\mathcal{M}^2$ vers une limite $I((H^n), H, X)$. Il n'est pas du tout immédiat que la limite ainsi obtenue soit continue et indépendante de l'approximation H^n choisie.

Quatrième étape : on montre que la limite ne dépend du choix de la suite (H^n) approchant H et qu'elle est (à trajectoires) continue. La limite est donc unique, on la note $(H \cdot X)$ ou $\int H_s \, dX_s$ et on l'appelle intégrale d'Itô du processus H par la martingale X.

On admettra donc les deux résultat suivants : (Théorèmes 4.3a et 4.3.b Chapitre 2 du livre de Durrett).

Théorème 3.14 *Soient X une martingale continue bornée et $H \in \Pi_2(X)$ alors $((H \cdot X)_t) \in \mathcal{M}^2$ et est continue. De plus on a*

$$\|(H \cdot X)\|_2 = \|H\|_X$$

En particulier $\mathbb{E}((H \cdot X)_t) = 0$.

Théorème 3.15 *Soient X une martingale continue bornée et $H, K \in \Pi_2(X)$ alors $H + K \in \Pi_2(X)$ et*

$$((H + K) \cdot X)_t = (H \cdot X)_t + (K \cdot X)_t$$

3.3.2 Inégalité de Kunita-Watanabe

On admettra le résultat suivant (référence Durrett Chap. 2 Théorème 5.1)

Théorème 3.16 *Inégalité de Kunita-Watanabe*
Soient X et Y deux martingales locales et H et K deux processus mesurables alors avec probabilité 1 on a

$$\left(\int_0^\infty |H_sK_s|\ dV_s(\langle X,Y\rangle)\right)^2 \leq \int_0^\infty H_s^2\ d\langle X\rangle_s \times \int_0^\infty K_s^2\ d\langle Y\rangle_s.$$

Remarque : Si $X_t = Y_t = B_t$ alors $d\langle X\rangle_s = ds$ et $dV_s(\langle X,Y\rangle) = s$ et on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 3.17 *Soit $H \in \Pi_2(X) \cap \Pi_2(Y)$ alors $H \in \Pi_2(X+Y)$ et*

$$(H\cdot(X+Y))_t = (H\cdot X)_t + (H\cdot Y)_t.$$

Preuve : On remarque que

$$\langle X+Y\rangle_t = \langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t + 2\langle X,Y\rangle_t.$$

Par l'inégalité de Kunita-Watanabe on a

$$V_t(\langle X,Y\rangle) \leq (\langle X\rangle_t\langle Y\rangle_t)^{1/2} \leq (\langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t)/2$$

car $2ab \leq a^2+b^2$. D'où

$$\langle X+Y\rangle_t \leq 2\left(\langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t\right). \tag{3.5}$$

On rappelle que $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. On en déduit que $H \in \Pi_2(X+Y)$.
Il reste à présent à montrer la formule. Il existe $H^n \in b\Pi_1$ telles que $\|H^n - H\|_Z \to 0$ pour $Z = X, Y, X+Y$ et

$$(H^n\cdot(X+Y))_t = (H^n\cdot X)_t + (H^n\cdot Y)_t.$$

Enfin quand $n\to\infty$ on a $(H^n\cdot Z)_t \to (H\cdot Z)_t$. Ce qui permet de conclure. ♯

Théorème 3.18 *Soient X et Y des martingales continues et bornées, $H \in \Pi_2(X)$ et $K \in \Pi_2(Y)$ alors*

$$\langle H\cdot X, K\cdot Y\rangle_t = \int_0^t H_sK_s\ d\langle X,Y\rangle_s.$$

Preuve : référence Durrett Chap. 2 Théorème 5.4.

Remarque : on en déduit $\mathbb{E}\langle(H\cdot X)\rangle_t = \mathbb{E}\int_0^t H_s^2\ ds$.

3.3.3 Intégration par martingale locale continue

On considère donc X une martingale locale continue.

Définition 3.9 *Soit* $\Pi_3(X)$ *la classe des processus* H *vérifiant avec probabilité 1*

$$\int_0^t H_s^2 \, d\langle X\rangle_s < \infty \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Théorème 3.19 *Soient* X *une martingale continue bornée et* $H, K \in \Pi_2(X)$ *tels que* $H_s = K_s$ *pour* $s \leq T$ *un T.A. Alors* $(H \cdot X)_s = (K \cdot X)_s$ *pour* $s \leq T$.

Preuve : On écrit $H_s = H_s^1 + H_s^2$ et $K_s = K_s^1 + K_s^2$ où

$$H_s^1 = K_s^1 = H_s \mathbf{I}_{[0,T]}(s) = K_s \mathbf{I}_{[0,T]}(s).$$

On a $(H^1 \cdot X)_t = (K^1 \cdot X)_t$ pour tout t.
Pour tout $s \in [0, T]$ on a $H_s^2 = K_s^2 = 0$ donc par le Théorème 3.18 on a

$$\langle (H^2 \cdot X)\rangle_s = \langle (K^2 \cdot X)\rangle_s = 0.$$

Donc par la Proposition 3.1 on a que $(H^2 \cdot X)$ et $(K^2 \cdot X)$ sont constant sur $[0, T]$ d'où $(H^2 \cdot X)_t = (K^2 \cdot X)_t = 0$ pout tout $t \in [0, T]$. On conclut alors par le Théorème 3.15 sur la distributivité. ♯

Intégrale stochastique des éléments de $\Pi_3(X)$

Soit S_n une suite de T.A. vérifiant

$$S_n \leq T_n = \inf\left\{ t \geq 0 : |X_t| > n \text{ ou } \int_0^t H_s^2 \, d\langle X\rangle_s > n \right\}$$

et $S_n \uparrow \infty$. On pose $H_s^n = H_s \mathbf{I}_{[0,S_n]}(s)$ et on définit $(H \cdot X)_t = (H^n \cdot X)_t$ pour tout $t \leq S_n$.

Définition 3.10 *Le processus* $(H \cdot X)_t$ *est alors appelé intégrale stochastique de* H *par la martingale locale* X.

On observe que par le Théorème 3.19 si $m \leq n$ on a $(H^m \cdot X)_t = (H^n \cdot X)_t$ pour tout $t \in [0, S_m]$. Donc $(H \cdot X)_t$ est bien définit pour tout $t \leq S_n$.
On doit enfin montrer que la définition de $(H \cdot X)_t$ ne dépend pas du choix de S_n. Soit donc $R_n \leq T_n$ avec $R_n \uparrow \infty$. On pose $Q_n = R_n \wedge S_n$, par le Théorème 3.19 on a pour tout $s \in [0, Q_n]$

$$(H^{R_n} \cdot X)_s = (H^{S_n} \cdot X)_s.$$

Comme $Q_n \uparrow \infty$ il s'en suit que $(H \cdot X)_t$ est indépendante de la suite de T.A. choisie. ♯

L'unicité et le Théorème 3.19 impliquent :

Théorème 3.20 *Soit* X *une martingale locale continue et* $H \in \Pi_3(X)$. *On définit* $(\hat{H}_s^T)$ *par* $\hat{H}_s^T = 0$ *si* $s > T$ *et* $\hat{H}_s^T = H_s^T = H_s$ *pour* $s \leq T$ *alors*

$$(\widehat{H}^T \cdot X) = (H \cdot X)^T = (H \cdot X^T) = (\widehat{H}^T \cdot X^T)$$

Interprétation : Si l'on pose que l'intégrant est nul après le temps T ou si l'on arrête la martingale au temps T ou les deux, ceci revient à arrêter l'intégrale au temps T.

Théorème 3.21 *Soit X une martingale locale continue et $H \in \Pi_3(X)$ alors $(H \cdot X)_t$ est une martingale locale.*

Preuve : On arrête aux temps T_n définis comme ci dessus. Il suffit alors de montrer que si $Y = X^{T_n}$ est une martingale continue bornée et $K = H^{T_n} \in \Pi_2(Y)$ alors $(K \cdot Y)_t$ est une martingale continue ce qui est vrai de par le Théorème 3.14. ♯

Remarque Importante : on ne peut pas avoir mieux. Si M est une martingale continue et si $H \in \Pi_3(M)$ alors $(H \cdot M)_t$ n'est pas une martingale (même si si $M = W$ le MBS). En revanche il s'agit quand même d'une martingale locale.

Théorème 3.22 *Soient X et Y deux martingales locales continues et $H, K \in \Pi_3(X)$ alors $H + K \in \Pi_3(X)$ et*

$$((H+K)\cdot X)_t = (H \cdot X)_t + (K \cdot X)_t.$$

Soit $L \in \Pi_3(X) \cap \Pi_3(Y)$ alors $L \in \Pi_3(X+Y)$ et

$$(L \cdot (X+Y))_t = (L \cdot X)_t + (L \cdot Y)_t.$$

Preuve : Pour montrer la première formule on observe que par Kunita-Watanabe on a

$$\int (H_s + K_s)^2 \, d\langle X\rangle_s \leq \int H_s^2 \, d\langle X\rangle_s + \int K_s^2 \, d\langle X\rangle_s + 2\left(\int H_s^2 \, d\langle X\rangle_s\right)^{1/2} \left(\int K_s^2 \, d\langle X\rangle_s\right)^{1/2} < \infty$$

Donc $H + K \in \Pi_3(X)$. En arrêtant aux T.A,

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0 : |X_t| > n \text{ ou } \int_0^t H^2 \, d\langle X\rangle_s > n \text{ ou } \int_0^t K^2 \, d\langle X\rangle_s > n\right\}$$

on se réduit au cas traité par le Théorème 3.15.
Pour l'autre formule on a déjà montré (3.5)

$$\langle X+Y\rangle_t \leq 2\left(\langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t\right).$$

Ce qui implique $L \in \Pi_3(X+Y)$ et en arrêtant aux T.A.

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0 : |X_t| > n \text{ ou } |Y_t| > n \text{ ou } \int_0^t L^2 \, d\langle X+Y\rangle_s > n\right\}$$

on se réduit au cas couvert par le Théorème 3.17. ♯

En utilisant les mêmes arguments de localisation on obtient le

Théorème 3.23 *Soient X et Y des martingales locales continues, $H \in \Pi_3(X)$ et $K \in \Pi_3(Y)$ alors*

$$\langle (H \cdot X), (K \cdot Y) \rangle_t = \int_0^t H_s K_s \, d\langle X, Y \rangle_s.$$

Exemples :
(1) Variation quadratique si $X = Y$ et $H = K$

$$\langle (H \cdot X) \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle X \rangle_s.$$

Et de part la décomposition de Doob-Meyer $(H \cdot B)_t^2 - \int_0^t H_s^2 \, ds$ est une martingale locale.
(2) Cas du Brownnien : on prend $X_t = B_t$ on a

$$\langle (H \cdot B) \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds.$$

En fait sous une hypothèse un peut plus restrictive ($H \in \Pi_2(X)$) on a beaucoup mieux :

Théorème 3.24 *(Isométrie d'Ito)*
Soient X une martingale locale et $H \in \Pi_2(X)$ alors $(H \cdot X) \in \mathcal{M}_2$ et $\|(H \cdot X)\|_2 = \|H\|_X$.

Remarque : Sous l'hypothèse plus générale $H \in \Pi_3(X)$ on n'a pas d'Isométrie d'Itô (ni d'inégalité de Doob) même si X est une martingale (comme le Brownien par exemple).
Preuve : Comme dans la définition de l'intégrale stochastique par une martingale locale on pose $T_n = \inf\{t : |X_t| > n \text{ ou } \int_0^t H_t^2 \, d\langle X \rangle_t > n\}$.
Pour tout n, $Y_t = X_t^{T_n}$ est une martingale bornée donc par le Théorème 3.14 (et le Théorème 3.20) $(\widehat{H}^{T_n} \cdot X^{T_n})_t = (H \cdot X^{T_n})_t = (\widehat{H}^{T_n} \cdot X)_t = (H \cdot X)_t^{T_n}$ est une martingale continue de $\mathcal{M}_2$, et on a

$$\|(H \cdot X)^{T_n}\|_2^2 = \|\widehat{H}^{T_n}\|_X^2 = \mathbb{E} \int (\widehat{H}_s^{T_n})^2 \, d\langle X \rangle_s = \mathbb{E} \int_0^{T_n} H_t^2 \, d\langle X \rangle_t \tag{3.6}$$

et

$$\mathbb{E} \int_0^{T_n} H_t^2 \, d\langle X \rangle_t = \mathbb{E}(\langle (H \cdot X) \rangle_{T_n}) = \mathbb{E}((H \cdot X)_{T_n}^2).$$

Par l'inégalité maximale de Doob on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T_n} (H \cdot X)_t^2 \right) \le 4\mathbb{E}\left((H \cdot X)_{T_n}^2 \right) = 4\mathbb{E} \int_0^{T_n} H_t^2 \, d\langle X \rangle_t$$

Par convergence monotone on obtient

$$\|(H \cdot X)\|_2^2 := \mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t} (H \cdot X)_t^2 \right) \le 4\mathbb{E} \int_0^\infty H_t^2 \, d\langle X \rangle_t < \infty$$

car $H \in \Pi_2(X)$.
Comme

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le s \le t} |(H \cdot X)_s| \right) \le \mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t} (H \cdot X)_t^2 \right) < \infty$$

on conclut par le Théorème 4.4 Chapitre 2 que $(H \cdot X)_t$ est une martingale, et par ce qui précède celle-ci est de carré intégrable.
Enfin en prenant les limites monotones dans (3.6) quand $n \to \infty$ on obtient

$$\|(H \cdot X)\|_2^2 = \|H\|_X^2.$$

Exemple : Pour $X_t = B_t$ et $H \in \Pi_2(B)$ on a $(H \cdot B)_t$ est une martingale de carré intégrable.

Chapitre 4

Calcul d'Itô

Contents

4.1 Formule d'Itô homogène

On commence par montrer un résultat d'approximation lorsque le processus à intégré est continu.

Théorème 4.1 *Soient X une martingale locale continue, (H_t) un processus continu et $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ une subdivision de $[0,t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$. Alors*

$$\sum_{i=0}^{k(n)-1} H_{t_i^n}(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)) \to \int_0^t H \; dX$$

en probabilité quand $n \to \infty$.

Preuve : Soit $M > 0$ fixé et $T = T_M = \inf\{s \geq 0 : s > M \text{ ou } \langle X\rangle_s > M \text{ ou } |H|_s > M\}$. Par le Théorème 4.5 chapitre 2 on peut peut localiser X, et supposer sans perte de généralité que $\langle X\rangle_s \leq M$. De même en posant $H_s = H_T$ pour $s > T$ on peut supposer également $|H_s| \leq M$ pour tout s.
On définit la suite $H_s^n = H_{t_i^n}$ pour tout $s \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ et $H_s^n = H_t$ pour $s > t$. De part la continuité de $s \mapsto H_s$ sur $[0, t]$ on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\geq 0} |H_s^n - H_s| = 0.$$

De plus

$$\|H^n - H\|_X^2 = \mathbb{E}\int (H_s^n - H_s)^2 \, d\langle X\rangle_s \leq M\mathbb{E}((\sup_{s\geq 0} |H_s^n - H_s|)^2)$$

donc (par convergence dominée) $\|H^n - H\|_X^2 \to 0$ ce qui implique par l'isométrie d'Itô que $\| \int H^n \, dX) - \int H \, dX\|_2^2 \to 0$ d'où le résultat. $\sharp$

Théorème 4.2 *Formule d'Itô.*
Soient (X_t) une martingale locale continue et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors avec probabilité 1 on a $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + (f'(X)\cdot X)_t + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) \, d\langle X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X) \, dX + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) \, d\langle X\rangle_s. \end{aligned}$$

En particulier toutes les intégrales ci-dessus sont définies.
Notation différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \, d\langle X\rangle_t$$

Remarque : Rappelons que si A_t est un processus continu à variation finie et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s) \, dA_s.$$

Notez bien que l'intégrale est de Stieltjes.

Exemples simples : Pour f de classe $\mathcal{C}^2$
1) Si $X_t = h(t)$ avec h de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ on retrouve la formule classique

$$f(h(t)) = f(h(0)) + \int_0^t f'(h(s))h'(s) \, ds$$

car $dh(s) = h'(s)ds$ et $\langle X\rangle_s = 0$.
2) Si $X_t = B_t$ le M.B.S. on a

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) \, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) \, ds$$

car $B_0 = 0$ et $d\langle B\rangle_t = dt$.
Preuve : En quatre étapes la dernière étape, plus technique, ne sera qu'esquissée.
Étape 1 : Localisation. En arrêtant aux temps

$$T_M = \inf\{t \geq 0 : |X_t| > M \text{ ou } \langle X\rangle_t > M\}$$

il suffit de montrer le résultat pour le cas borné : $|X_t| \leq M$ et $\langle X\rangle_t \leq M$.

Étape 2 : Formule de Taylor. On sait que pour tout $a < b$ in existe $c_{a,b} \in [a, b]$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(c_{a,b}).$$

Soit $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ une subdivision de $[0, t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$. En appliquant la formule de Taylor aux sommes télescopiques suivantes on obtient

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=0}^{k(n)-1} f(X_{t_{i+1}^n}) - f(X_{t_i^n}) \\ &= \sum_{i=0}^{k(n)-1} f'(X_{t_i^n}) \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) && (4.1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k(n)-1} f''(c_{X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n}}) \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 && (4.2) \end{aligned}$$

Nous avons donc pour tout $n \geq 1$

$$f(X_t) - f(X_0) = I_n + V_n \tag{4.3}$$

où I_n représente le terme (4.1) et V_n le terme (4.2).
Étape 3 : Convergence de I_n vers $(f'(X) \cdot X)_t$.
C'est une conséquence du théorème précédent en utilisant que, par hypothèse, $t \mapsto f'(X_t)$ est continu.

Étape 4 : Convergence de V_n vers $\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$.
On définit $G_s^n = f''(c_{X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n}})$ pour $s \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ et $G_s^n = f''(X_t)$ dès que $s \geq t$ et on pose

$$A_s^n = \sum_{t_{i+1}^n \leq s} \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2$$

ce qui par construction implique

$$\sum_{i=0}^{k(n)-1} f''(c_{X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n}}) \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 = \int_0^t G_s^n \, dA_s^n$$

où cette dernière intégrale est de Stieltjes.
L'application f étant de classe $\mathcal{C}^2$ cela implique la continuité uniforme de f'' sur $[0, t]$ et donc on a $G_s^n \to f''(X_{s\wedge t})$ quand $n \to \infty$ uniformément en s.

D'autre part on sait (Théorème 2.2 Chapitre 3) que $A_s^n \to \langle X \rangle_s$ en probabilité quand $n \to \infty$. On peut alors montrer que

$$\int_0^t G_s^n \, dA_s^n \to \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X \rangle_s$$

en probabilité.
Conclusion : Comme $I_n \to (f'(X) \cdot X)_t$ en probabilité, il existe une sous suite $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que $I_{n_k} \to (f'(X) \cdot X)_t$ p.s. quand $k \to \infty$.
De plus pour cette sous suite on a $V_{n_k} \to \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X \rangle_s$ en probabilité quand $k \to \infty$. Donc il existe une sous suite $(k_m)_{m \geq 1}$ telle que $V_{n_{k_m}} \to \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X \rangle_s$ p.s. quand $m \to \infty$.
Donc $I_{n_{k_m}} + V_{n_{k_m}}$ converge p.s. vers la bonne limite quand $m \to \infty$. On tire donc de (4.3) que pour tout t fixé, avec probabilité 1 on a

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \, d\langle X \rangle_s.$$

Comme chaque membre de l'égalité précédente est une fonction continue de t on en tire qu'avec probabilité 1 on a pour tout $t \geq 0$ le résultat recherché. $\sharp$

4.2 Intégration par des semimartingales

Nous allons à présent étendre l'intégration stochastique aux semi-martingales. Deux raisons de faire ceci :
(i) Si X est une martingale locale continue et f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la formule d'Itô montre que $f(X_t)$ est une semimartingale mais pas en général une martingale locale (sauf si $f'' \equiv 0$). On peut par contre montrer que si X est une semimartingale continue et f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $f(X_t)$ est une semimartingale continue.
(ii) Il est facile d'étendre l'intégration par des martingales locales aux semimartingales pourvu que l'on remplace la classe des éléments intégrables $\Pi_3(X)$ par une classe plus petite ne dépendant pas de X.

4.2.1 Définitions

Définition 4.1 *On dit qu'un processus adapté continu X est une* semimartingale continue *si X_t peut s'écrire sous la forme $X_0 + M_t + A_t$, où $M_0 = A_0 = 0$, M_t est une martingale locale continue et A_t est un processus continu adapté à variation finie.*

Exemples :
1) Toute martingale locale continue est une semimartingale continue.
2) De par la décomposition de Doob-Meyer, si X est une martingale locale continue alors X^2 est une semimartingale continue.
3) Le mouvement Brownien est une semimartingale.
4) Si X est une martingale locale continue et si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la formule d'Itô implique que $f(X)$ est une semimartingale.
Plus généralement

Définition 4.2 *On dit qu'un processus adapté, càd-làg X est une* semi-martingale *si X_t peut s'écrire sous la forme $X_0 + M_t + A_t$, où $M_0 = A_0 = 0$, M_t est une martingale locale et A_t est un processus adapté à variation finie.*

Exemple : Processus de Lévy

Définition 4.3 *Un processus X adapté tel que $X_0 = 0$ est un processus de Lévy si*
(i) X est à accroissements indépendants du passé : i.e. $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $0 \leq s < t < \infty$;
(ii) X est à accroissements stationnaires ;
(iii) X_t est continue en probabilité.

Le mouvement Brownien et le processus de Poisson sont des processus de Lévy ;
Etant donné un processus de Lévy il en existe une version càd-làg qui est aussi un processus de Lévy.
Un résultat très important montre que :
Tout processus de Lévy peux s'écrire $X_t = Y_t + Z_t$ où Y et Z sont deux processus de Lévy, Y est une martingale à sauts bornés, $Y_t \in L^p$ pour tout $p \geq 1$ et Z est à trajectoires à variation finie. Il s'agit donc d'une semimartingale.

Exemple : Le processus $X_t = W_t + N_t$ où W est un MBS et N est un processus de Poisson, est un processus de Lévy.

Théorème 4.3 *Soit X une semimartingale continue. Si les processus (continus) M_t et A_t sont choisit tels que $M_t = A_0 = 0$ alors la décomposition $X_t = X_0 + M_t + A_t$ est unique.*

Preuve : Sans perte de généralité on peut supposer $X_0 = 0$. Supposons $X_t = M_t + A_t = M'_t + A'_t$. On en tire que $M'_t - M_t = A_t - A'_t$ est une martingale locale continue à variation finie donc constante (par le Théorème 1.1 Chapitre 3) et donc identiquement nulle.♯

En fait on a un résultat très général cf. Protter Chapitre III.

Théorème 4.4 *Soit X un processus adapté càd-làg. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) X est une semimartingale ;
(b) Etant donné $\varepsilon > 0$, X_t peut s'écrire sous la forme $X_0 + M_t + A_t$, où $M_0 = A_0 = 0$, M_t est une martingale locale dont les sauts sont bornés par ε et A_t est un processus à variation finie ;
(c) X_t peut s'écrire sous la forme $X_0 + M_t + A_t$, où $M_0 = A_0 = 0$, M_t est une martingale locale localement de carré intégrable et A_t est un processus à variation finie ;
(d) Si pour tout $T > 0$ et toute suite H^n de processus simples prévisibles de limite H simple prévisible : i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega} |H^n_t(\omega) - H_t(\omega)| = 0$$

on a que

$$\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t H^n \, dX - \int_0^t H \, dX| \to 0$$

en probabilité quand $n \to \infty$.

4.2.2 Intégration par des semi-martingales continues

Définition 4.4 *On note $lb\Pi$ l'ensemble des processus prévisibles localement bornés : i.e. les processus prévisibles H tels qu'il existe une suite de temps d'arrêts $T_n \uparrow \infty$ telle que $|H_s| \leq n$ pour $s \leq T_n$.*

Lemme 4.1 *Soit $X_t = M_t + A_t$ une semi-martingale continue. On a*

$$lb\Pi \subset \Pi_3(M).$$

Preuve : Soit $H \in lb\Pi$. On remarque que

$$\int_0^{T_n} H_s^2 \, d\langle M\rangle_s \leq n^2 \langle M\rangle_{T_n} < \infty$$

et comme $T_n \uparrow \infty$, on a $H \in \Pi_3(M)$. ♯

Remarque : Pour tout $H \in lb\Pi$ on peut définir $\int_0^t H_s \, dA_s$ comme une intégrale de Stieltjes. Comme $H \in \Pi_3(M)$ l'intégrale stochastique $\int H dM$ est également bien définie. D'où la

Définition 4.5 *On définit l'*intégrale stochastique *de $H \in lb\Pi$ par la semi-martingale $X_t = M_t + A_t$ par la somme*

$$\int_0^t H \, dX = \int_0^t H \, dM + \int_0^t H_s \, dA_s.$$

On obtient ainsi sans effort le

Théorème 4.5 *Soit X une semi-martingale continue et $H \in lb\Pi$, alors $\int_0^t H \, dX$ est une semi-martingale continue.*

De même on montre très facilement

Théorème 4.6 Distributivité
Soient X et Y deux semi-martingales continues et $H, K \in lb\Pi$. Alors

$$\begin{array}{ll} \int_0^t (H+K) \, dX & = \int_0^t H \, dX + \int_0^t K \, dX \\ \int_0^t H \, d(X+Y) & = \int_0^t H \, dX + \int_0^t H \, dY \end{array}$$

Théorème 4.7 Associativité
Soient X une semi-martingale (resp. martingale locale) continue, $H, K \in lb\Pi$ (resp. $K \in \Pi_3(Y), H \in \Pi_3(K \cdot X)$). Alors

$$\int H \, d\left(\int K \, dX\right) = \int HK \, dX.$$

"Preuve" : En utilisant les notations différentielles

$$d(H \cdot Y)_t = H_t dY_t.$$

On pose $Y_t = (K \cdot X)_t$ d'où $dY_t = K_t dX_t$ ce qui donne

$$d(H \cdot (K \cdot X))_t = H_t d(K \cdot X)_t = H_t K_t dX_t = d((HK) \cdot X)_t.$$

Ceci n'est pas une preuve rigoureuse. La preuve procède par étapes successives comme la construction de l'intégrale (cf. Durrett chap. 2). Nous l'admettrons.

4.2.3 Intégration générale

Les résultats qui suivent sont extraits de la section 4 du chapitre II de Protter.

Définition 4.6 *On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des processus (adaptés) càd-làg ; $\mathbb{L}$ l'ensemble des processus càg-làd ; b$\mathbb{L}$ l'ensemble des processus (adapté) càg-làd à trajectoires bornées ; enfin soit $\mathbb{S}$ l'ensemble des processus simples H de représentation*

$$H = H_0\{\mathbf{0}\} + \sum_{i=1}^{n} H_i \mathbf{1}_{]T_i,T_{i+1}]}$$

où $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$ et $0 = T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_{n+1} < \infty$ sont des temps d'arrêts.

Définition 4.7 *On dira qu'une suite de processus (H^n) converge* uniformément sur les compact en probabilité *(que l'on abrégera en **ucp**) si pour tous $t > 0$ on a que*

$$\sup_{0\leq s\leq t} |H_s^n - H_s| \to 0$$

en probabilité.

Théorème 4.8 *L'ensemble des processus prévisibles simples $\mathbb{S}$ est dense dans $\mathbb{L}$ pour la topologie ucp.*

Définition 4.8 *Soit $H \in \Pi_1$ et X un processus càd-làg on définit l'application linéaire $J_X : \mathbb{S} \to \mathbb{D}$ par :*

$$J_X(H) = H_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(X(T_{i+1}) - X(T_i)).$$

L'application $J_X(H)$ est alors appelée intégrale stochastique de H par le processus X.

Théorème 4.9 *Soit X une semimartingale. L'application $J_X : \mathbb{S} \to \mathbb{D}$ est continue pour la topologie ucp.*

De par la densité de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{L}$ on peut étendre par continuité l'application J_X en une application de $\mathbb{L} \to \mathbb{D}$. Cette application est à nouveau appelée intégrale stochastique et on la note

$$J_X(H) = H \cdot X = \int H \, dX$$

Théorème 4.10 *Le processus de saut $\Delta(\int H \, dX)_s$ est indistinguable du processus $H_s(\Delta X_s)$.*

Théorème 4.11 Distributivité
Soient X et Y deux semimartingales et $H, K \in \mathbb{L}$. Alors

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t (H+K)\, dX &= \textstyle\int_0^t H \, dX + \int_0^t K \, dX \\ \textstyle\int_0^t H \, d(X+Y) &= \textstyle\int_0^t H \, dX + \int_0^t H \, dY \end{aligned}$$

Théorème 4.12 *Soit X une semimartingale et $H, K \in \mathbb{L}$. Alors le processus $\int H \, dX$ est une semimartingale et on a*

$$\int H \, d\left(\int K \, dX\right) = \int (HK) \, dX.$$

Théorème 4.13 *Soit X une martingale locale, localement de carré intégrable, et soit $H \in \mathbb{L}$. Alors le processus $\int H \, dX$ est aussi une martingale locale, localement de carré intégrable.*

4.2.4 Covariation quadratique des semi-martingales

Définition 4.9 *Soient X et Y deux semi-martingales continues de décomposition $X = M + A$ et $Y = N + B$. On définit la* covariance quadratique *de X et Y par*

$$\langle X, Y\rangle_t = \langle M, N\rangle_t.$$

Plus généralement on définit

Définition 4.10 *Soient X et Y deux semi-martingales. On définit la* variation quadratique *de X comme le processus $[X,X] = ([X,X]_t)_{t\geq 0}$ définit par*

$$[X,X] = X^2 - 2\int X_-\, dX$$

où $X_{0-} = 0$;
de même on définit la covariance quadratique *de X et Y, aussi appelé le crochet de X, Y par*

$$[X,Y] = XY - \int X_-\, dY - \int Y_-\, dX.$$

On a alors l'**identité de polarisation** :

$$[X,Y] = \frac{1}{2}\left([X+Y, X+Y] - [X,X] - [Y,Y]\right)$$

Exemple : Soit N_t un processus de Poisson alors

$$[N,N]_t = N_t^2 - 2\int_0^t N_{s-}\, dN_s$$

or

$$\int_0^t N_{s-}\, dN_s = \sum_{n=1}^{\infty} N_{T_n -}\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}} = \frac{N_t(N_t-1)}{2}$$

d'où

$$[N,N]_t = N_t.$$

On rappelle que $M_t = N_t - \lambda t$ est une martingale et

Définition 4.11 *On appelle* partition aléatoire σ *une suite finie de temps d'arrêts tels que $0 = T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_k < \infty$. On dira qu'une suite $\sigma_n = \{0 = T_0^n \leq T_1^n \leq ... \leq T_{k(n)}^n\}$ de partition aléatoires* ***tend vers l'identité*** *si*

(i) $\limsup_k T_k^n = \infty$ *p.s.*

(ii) $\sup_k |T_{k+1}^n - T_{k+1}^n|$ *converge p.s. vers* 0.

Théorème 4.14 *la variation quadratique de X est un processus càd-làg de plus on a*
(i) $[X,X]_0 = X_0^2$ *et* $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$
(ii) Si σ_n est une suite de partition aléatoire tendant vers l'identité alors

$$X_0^2 + \sum_{i=1}^{k(n)} (X(T_i^n) - X(T_{i-1}^n))^2 \to [X,X]$$

en convergence ucp ;
(iii) Si T est un temps d'arrêt alors $[X^T, X] = [X, X^T] = [X^T, X^T] = [X,X]^T$.

Corollaire 4.1 *Le crochet $[X,Y]$ de deux semimartingales est bilinéaire et à variation finie (sur tout compact) et est également une semimartingale.*

Corollaire 4.2 *Intégration par partie.*
Soient X et Y deux semimartingales. Alors le processus XY est une semimartingale et on a

$$XY = \int X_- \, dY + \int Y_- \, dX. + [X,Y]$$

avec la convention $X_{0-} = Y_{0-} = 0$.

Théorème 4.15 *Le crochet $[X,Y]$ de deux semimartingales vérifie*
(i) $[X,Y]_0 = X_0 Y_0$ et $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$
(ii) Si σ_n est une suite de partition aléatoire tendant vers l'identité alors

$$X_0 Y_0 + \sum_{i=1}^{k(n)} (X(T_i^n) - X(T_{i-1}^n))(Y(T_i^n) - Y(T_{i-1}^n)) \to [X,Y]$$

en convergence ucp ;
(iii) Si T est un temps d'arrêt alors $[X^T, Y] = [X, Y^T] = [X^T, Y^T] = [X,Y]^T$.

Théorème 4.16 *Inégalité de Kunita-Watanabe.*
Soient X et Y deux semimartingales et H et K deux processus mesurable. Alors presque sûrement

$$\left(\int_0^\infty |H_s||K_s| \, d[X,Y]_s \right)^2 \leq \int_0^\infty H_s^2 \, d[X,X]_s \times \int_0^\infty K_s^2 \, d[Y,Y]_s.$$

Définition 4.12 *Soit X une semimartingale on note $[X,X]^c$ la partie continue de la trajectoire de $[X,X]$. Ainsi on a*

$$[X,X]_t = [X,X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2$$

on a $[X,X]_0^c = 0$.

Remarque Importante : Si X est une semimartingale continue alors $[X,X]_t = [X,X]_t^c = \langle X \rangle_t$

Théorème 4.17 *Soient $X = M + A$ et $Y = N + B$ deux semi-martingales continues. Pour tout t et toute suite de subdivisions $\Delta_n = (0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k(n)}^n = t)$ de $[0,t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, on pose*

$$Q_t^{\Delta_n}(X,Y) = \sum_{i=1}^{k(n)} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}).$$

Alors

$$Q_t^{\Delta_n}(X,Y) \to \langle M,N \rangle_t$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$.

Preuve : On a

$$Q_t^{\Delta_n}(X,Y) = Q_t^{\Delta_n}(M,N) + Q_t^{\Delta_n}(A,N) + Q_t^{\Delta_n}(M,B) \to \langle M,N \rangle_t$$

ce qui conclut la preuve. ♯

Théorème 4.18 *Soient X^i, $i = 1, ..., m$ et Y^j, $j = 1, .., .n$ des semi-martingales continues $H^i, K^j \in lb\Pi$, $X = \sum_{i=1}^m \int H^i \, dX^i$ et $Y = \sum_{j=1}^n \int K^j \, dY^j$. Alors*

$$\langle X,Y \rangle_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^t H_s^i K_s^j \, d\langle X^i, Y^j \rangle_s.$$

Preuve : Soient M^i et N^j respectivement les parties martingales locales de X^i et Y^j. On pose $M = \sum_{i=1}^m \int H^i \; dM^i$ et $N = \sum_{j=1}^n \int K^j \; dN^j$. De par notre définition on a $\langle X, Y\rangle_t = \langle M, N\rangle_t$ donc par le Théorème 3.15 chapitre 3 on a $\langle X^i, Y^j\rangle_t = \langle M^i, N^j\rangle_t$ et on peut conclure. $\sharp$

4.3 Processus d'Itô

4.3.1 Définitions

Définition 4.13 *Soit* $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ *un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien de dimension* $d \in \mathbb{N}^*$.
(1) On dit que (X_t) *est un* $\mathcal{F}_t$-processus d'Itô *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *si pour tout* $t \geq 0$ *il peut s'écrire*

$$X_t = X_0 + \int_0^t L_s \; ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^j \; dB_s^j \tag{4.4}$$

où X_0 *v.a.* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* L_t *et* $H_t = (H_t^1, ..., H_t^d)$ *sont prévisibles et tels que* $\forall t \geq 0,\ i = 1, ..., d$

$$\int_0^t |L_s| \; ds < \infty, \qquad \int_0^t (H_s^i)^2 \; ds < \infty.$$

Notation différentielle :

$$dX_t = L_t \; ds + \sum_{j=1}^d H_s^j \; dB_s^j.$$

(2) Un processus d'Itô *de dimension n est un processus vectoriel* $X(t) = (X_t^1, ..., X_t^n)$ *où chaque composante est un processus d'Itô réel.*

Exemples : Les processus suivants sont des processus d'Itô
(1) $X_t = h(t)$, h dérivable

$$X_t = h(o) + \int_0^t h'(s) \; ds + \int_0^t 0 \; dB_s.$$

(2) $X_t = B_t$, Brownien

$$B_t = 0 + \int_0^t 0 \; ds + \int_0^t 1 \; dB_s.$$

(3) La variation quadratique d'un processus d'Itô est un processus d'Itô

$$\langle X\rangle_t = 0 + \int_0^t \sum_{i=1}^d (H_s^i)^2 \; ds + \int_0^t 0 \; dB_s.$$

Propriété 4.1 *Soit* X_t *un processus d'Itô à valeurs réelles de représentation (4.4). Alors*
(1) X_t *est une semi-martingale.*
(2) Si Y_t *est un processus d'Itô à valeurs réelles de représentation* $Y_t = Y_0 + \int_0^t J_s \; ds + \sum_{j=1}^{d'} (K^j \cdot B^j)_t$ *alors*

$$\langle X, Y\rangle_t = \sum_{i=1}^{d \wedge d'} \int_0^t H_s^i K_s^i \; ds.$$

(3) Formule d'Itô : soit f de classe $\mathcal{C}^2$ on a

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \left(f'(X_s)L_s + \frac{1}{2} f''(X_s) \sum_{i=1}^{d} (H_s^i)^2 \right) \, ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f'(X_s) H_s^j \; dB_s^j.$$

4.3.2 Représentation des martingales browniennes

Toute l'importance des processus d'Itô rejailli dans les résultats suivants.

Définition 4.14 *On appelle* martingale (locale) brownienne *une martingale (locale) adaptée à la filtration brownienne.*

On admet le résultat suivant.

Théorème 4.19 *Soit X_t une martingale locale brownienne.*
Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est continue. De plus il existe un unique processus $H_t = (H_t^1, ..., H_t^d)$ vérifiant $H^i \in \Pi_2(B^i)$ tel que

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t H_s \; dB_s \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H_s^j \; dB_s^j. \end{aligned}$$

Corollaire 4.3 *Toute martingale locale brownienne peut être représentée comme un processus d'Itô.*

4.4 Formules d'Itô générales

4.4.1 Formule d'Itô pour semimartingales continues

Théorème 4.20 Formule d'Itô
Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $0 \leq c \leq d$. Si $X_t^1, ..., X_t^d$ sont des semi-martingales continues et $X_t^{c+1}, ..., X_t^d$ sont localement à variations bornées alors avec probabilité 1 pour tout $t \geq 0$

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i f(X_s) \; dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq c} \int_0^t D_{ij} f(X_s) \; d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

dès que les dérivées partielles $D_i f$ et $D_{ij} f$ existent et sont continues.
Notation différentielle :

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^{d} D_i f(X_s) \; dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq c} D_{ij} f(X_s) \; d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

Application aux processus d'Itô

On commence par une remarque :
Remarque Importante : Si B_t^1 et B_t^2 sont deux M.B.S. indépendants alors $B_t^1 B_t^2$ est une martingale et en conséquence $\langle B^1, B^2\rangle_t = 0$ pour tout $t \geq 0$.
En effet pour tous $0 \leq s < t$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t^1 B_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t^1 - B_s^1)(B_t^2 - B_s^2)) + B_s^1\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s) + B_s^2\mathbb{E}(B_t^1|\mathcal{F}_s) - B_s^1 B_s^2 \\ &= \mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1)\mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2) + B_s^1 B_s^2 + B_s^2 B_s^1 - B_s^1 B_s^2 \\ &= B_s^1 B_s^2.\end{aligned}$$

L'intégrabilité et l'adaptabilités sont immédiates. D'où le résultat.

À présent considérons $X_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ un processus d'Itô dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i = 1, ..., n$

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t L_s^i \, ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{i,k} \, dB_s^k$$

où $(B_t^1, ..., B_t^d)$ est un mouvement Brownien de dimension d commençant à l'origine, et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. Par la formule d'Itô on a avec probabilité 1 pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) \, ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, ..., X_s^n) \, dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, ..., X_s^n) \, d\langle X^i, X^j\rangle_s\end{aligned}$$

Or $dX_s^i = L_s^i \, ds + \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} \, dB_s^k$ et

$$\begin{aligned}\langle X^i, Y^j\rangle_t &= \sum_{k=1}^d \sum_{\ell=1}^d \int_0^t H_s^{i,k} H_s^{j,\ell} \, d\langle B^k, B^\ell\rangle_s \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{i,k} H_s^{j,k} \, ds\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \sum_{i=1}^n L_s^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} H_s^{j,k} \right) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} \, dB_s^k\end{aligned}$$

Ou en notation différentielle

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \sum_{i=1}^n L_t^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \sum_{k=1}^d H_t^{i,k} H_t^{j,k} \right) dt$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t) \sum_{k=1}^{d} H_t^{i,k} \; dB_t^k$$

Fonction du Brownien

Un cas particulier de l'exemple précédent ($n = 1$, $L \equiv 0$) pour le processus d'Itô

$$B_t = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t dB_s^i$$

autrement dit B_t est un mouvement Brownien de dimension d. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ (on considère le cas homogène). En notant $\nabla f = (\partial_{x_1} f, ..., \partial_{x_d} f)$ son gradient et $\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i x_i} f$ son Laplacien la formule d'Itô s'écrit

$$f(B_t) - f(B_0) = \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s) \; ds + \int_0^t \nabla f(B_s).dB_s$$

4.4.2 Intégration par partie des semimartingales continues

Théorème 4.21 Intégration par parties
Soient X et Y deux semi-martingales continues ; alors avec probabilité 1 pour tout $t \geq 0$

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t Y_s \; dX_s + \int_0^t X_s \; dY_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Notation différentielle :

$$d(X_t Y_t) = Y_s \; dX_s + X_s \; dY_s + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Preuve : On pose $Z_t = (X_t, Y_t)$ et on considère la fonction $f(x, y) = xy$. Calculons les dérivées partielles $f_x(xy) = y$, $f_y(xy) = yx$, $f_{x,y}(x, y) = f_{y,x}(x, y) = 1$ les autres sont nulles. La formule d'tô donne

$$f(Z_t) = X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s \; sX_s + \int_0^t X_s \; dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t d\langle Y, X \rangle_s.$$

4.5 Formule d'Itô pour une semimartingale

Pour les preuves on se réfèrera au livre de Protter Section 7 chapitre II.

Théorème 4.22 *Soit X une semimartingale et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors $f(X)$ est aussi une semimartingale et on a presque sûrement*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) \quad &= \textstyle\int_{0+}^t f'(X_{s-}) \; dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X_{s-}) \; d[X, X]_s^c \\ &+ \textstyle\sum_{0 < s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s) \end{aligned}$$

Théorème 4.23 *Soit $X = (X^1, ..., X^d)$ une semimartingale de dimension d et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $f(X)$ est aussi une semimartingale et on a presque sûrement*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) \quad &= \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{0+}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) \; dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_{0+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) \; d[X^i, X^j]_s^c \\ &+ \textstyle\sum_{0 < s \leq t} \Big(f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) \Delta X_s^i \Big) \end{aligned}$$

4.6 Application de la formule d'Itô

4.6.1 Calcul d'une intégrale stochastique

Considérons $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$ la formule d'Itô donne

$$B_t^2 = 0 + \int_0^t 2B_s \, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2 \, ds = 2\int_0^t B_s \, dB_s + t.$$

D'où

$$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}.$$

4.6.2 Solution d'une equation différentielle stochastique

On s'intéresse ici à l'équation du prix de l'actif risqué à la base du modèle de Black et Scholes.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \qquad (4.5) \\ S_0 &= x_0 > 0. \end{aligned}$$

On cherche une solution de (4.5) c'est à dire un processus adapté vérifiant

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s \, ds + \int_0^t \sigma S_s \, dB_s.$$

On voit qu'il s'agit d'une semi-martingale, on verra qu'il s'agit aussi d'un processus d'Itô.

Recherche d'une solution

On va rechercher formellement une solution :
on pose $Y_t = \log(S_t)$ et on considère $f(x) = \log(x)$. Même si f ne satisfait pas aux hypothèses de la formule d'Itô on va l'utiliser pour "deviner" la solution. On vérifira par la suite qu'il s'agit bien d'une solution.
On a $f'(x) = x^{-1}$ et $f''(x) = -x^{-2}$. Par Itô on trouve

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t S_s^{-1} \, dS_s - \frac{1}{2}\int_0^t S_s^{-2} \, d\langle S\rangle_s.$$

Par une propriété des semi-martingales on déduit

$$d\langle S\rangle_s = \sigma^2 S_s^2 ds$$

et en utilisant que S_t doit vérifier (4.5) on obtient

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \, ds + \int_0^t \sigma \, dB_s \\ &= \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t. \end{aligned}$$

D'où

$$S_t = x_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right]. \qquad (4.6)$$

Vérification

On va à présent vérifier que (4.6) est bien une solution de (4.5).
On pose $f(t,x) = x_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right]$. Ainsi $S_t = f(t, B_t)$. La fonction f est suffisamment différentiable on a $f_t(t,x) = (\mu - \sigma^2/2)f(t,x)$, $f_x(t,x) = \sigma f(t,x)$ et $f_{xx}(t,x) = \sigma^2 f(t,x)$. Les autres dérivées partielle ne sont pas importantes pour la formule. On applique Itô

$$S_t = f(t, B_t) = S_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_s\, ds + \int_0^t \sigma S_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s\, d\langle B\rangle_s$$

d'où l'équation cherchée.

Exercice : On aurait pu (le faire) montrer cela en considérant $S_t = g(Z_t)$ où $g(z) = x_0 e^z$ et le processus d'Itô $Z_t = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t$.

Unicité

Supposons que Y_t soit une autre solution de (4.5). Pour $t \geq 0$ on définit $Z_t = S_t^{-1}$. Par Itô (exercice) on a

$$dZ_t = (\sigma^2 - \mu)Z_t\, dt - \sigma Z_t\, dB_t.$$

D'autre part en utilisant la formule d'IPP on a

$$\begin{aligned}
Z_tY_t - Z_0Y_0 &= \int_0^t Z_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dZ_s + \langle Z, Y\rangle_t \\
&= \int_0^t Z_s \mu Y_s\, ds + \int_0^t Z_s \sigma Y_s\, dB_s \\
&\quad + \int_0^t Y_s(\sigma^2 - \mu)Z_s\, ds - \int_0^t Y_s \sigma Z_s\, dB_s - \sigma^2 Z_t Y_t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $Z_tY_t = Z_0Y_0 = x_0^{-1}x_0 = 1$ ce qui permet de conclure.

Chapitre 5

Théorèmes de Girsanov

Contents

5.1 Notions de théorie de la mesure

5.1.1 Mesures équivalentes

On notera $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ l'espérance prise par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Théorème 5.1 *Décomposition de Lebesgue.*
Soient $\mathbb{P}$ et $\widetilde{\mathbb{P}}$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors $\widetilde{\mathbb{P}}$ peut s'écrire $\widetilde{\mathbb{P}}_a + \widetilde{\mathbb{P}}_s$ où
(a) Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\widetilde{\mathbb{P}}_s(A) = 0$ et $\mathbb{P}(A^c) = 0$: on dit alors que $\widetilde{\mathbb{P}}_s$ est singulière par rapport à $\mathbb{P}$;
(b) Il existe $Y \geq 0$ une v.a. telle que pour tout A

$$\widetilde{\mathbb{P}}_a(A) = \int_A Y \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y \mathbf{1}_A).$$

Une telle décomposition est unique.

Preuve : Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des v.a. Z positives telles que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A) \leq \widetilde{\mathbb{P}}(A)$ pour tout A. On remarque que si $Z, Y \in \mathcal{G}$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}((Z \vee Y)\mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_{A\cap\{Z>Y\}}) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y\mathbf{1}_{A\cap\{Z\leq Y\}}) \\ &\leq \widetilde{\mathbb{P}}(A \cap \{Z > Y\}) + \widetilde{\mathbb{P}}(A \cap \{Z \leq Y\}) = \widetilde{\mathbb{P}}(A)\end{aligned}$$

Donc $Z \vee Y \in \mathcal{G}$. On pose $k = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) : Z \in \mathcal{G}\} \leq \widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$. Soient (Z_n) une suite de v.a. dans $\mathcal{G}$ telles que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_n) > k - 1/n$ et on pose $Y_n = Z_1 \vee \cdots \vee Z_n$. Par ce qui précède $Y_n \in \mathcal{G}$ et on note Y la limite de Y_n quand $n \to \infty$. Par convergence monotone on a

$$k \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y_n) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_n) = k.$$

On pose alors $\widetilde{\mathbb{P}}_a(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y\mathbf{1}_A)$ et $\widetilde{\mathbb{P}}_s(A) = \mathbb{P}(A) - \widetilde{\mathbb{P}}_a(A)$.
On va montrer que $\widetilde{\mathbb{P}}_s$ est singulière par rapport à $\mathbb{P}$.
Soit $\epsilon > 0$ et soit la mesure signée $\mu_\epsilon = \widetilde{\mathbb{P}}_s - \epsilon\mathbb{P}$. Le théorème de décomposition de Hahn (cf. Durrett p. 477) implique qu'il existe A_ϵ et B_ϵ tels que (i) $\Omega = A_\epsilon \cup B_\epsilon$; (ii) $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$; (iii) $\forall A \subset A_\epsilon$ mesurable $\mu_\epsilon(A) \geq 0$ et $\forall B \subset B_\epsilon$ mesurable $\mu_\epsilon(B) \leq 0$.
Donc pour tout A, $\epsilon\mathbb{P}(A_\epsilon \cap A) \leq \widetilde{\mathbb{P}}_s(A_\epsilon \cap A)$ et

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}((Y + \epsilon\mathbf{1}_{A_\epsilon})\mathbf{1}_A) = \widetilde{\mathbb{P}}_a(A) + \epsilon\mathbb{P}(A_\epsilon \cap A) \leq \widetilde{\mathbb{P}}(A)$$

Donc $Z_\epsilon = Y + \epsilon\mathbf{1}_{A_\epsilon} \in \mathcal{G}$. Il s'en suit que $\mathbb{P}(A_\epsilon) = 0$ car sinon $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_\epsilon) > k$ ce qui est une contradiction. On pose $C = \cup_n A_{1/n}$ on a $\mathbb{P}(C) = 0$.
Observons que si $\widetilde{\mathbb{P}}_s(C^c) > 0$ on aurait $(\widetilde{\mathbb{P}}_s - \epsilon\mathbb{P})(C^c) > 0$ pour ϵ suffisamment petit mais ceci contredit le fait que $C^c \subset B_\epsilon$. Donc on conclut $\widetilde{\mathbb{P}}_s(C^c) = 0$. ♯

Définition 5.1 *Une mesure de probabilité* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est dite* absolument continue *par rapport à* $\mathbb{P}$ *si* $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) = 0 \ \Rightarrow \ \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$. *Dans ce cas on note* $\widetilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$.
On dit que $\widetilde{\mathbb{P}}$ *et* $\mathbb{P}$ *sont* équivalentes *si* $\widetilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$ *et* $\mathbb{P} \ll \widetilde{\mathbb{P}}$.

Le résultat suivant est un grand "classique".

Théorème 5.2 *de Radon-Nikodym.*
Il y a équivalence entre les proposition suivantes :
(i) $\widetilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$ *;*
(ii) Il existe une unique ($\mathbb{P}$*-p.s.) v.a.* Z *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathbb{P}$*-intégrable, telle que*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A).$$

Dans ce dernier cas Z *est appelée la* dérivé de Radon-Nikodym *de* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *et on la note* $Z = \dfrac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$.

Preuve : Soit $\widetilde{\mathbb{P}}_a + \widetilde{\mathbb{P}}_s$ la décomposition de Lebesgue de $\widetilde{\mathbb{P}}$ par rapport à $\mathbb{P}$. Soit A tel que $\widetilde{\mathbb{P}}_s(A^c) = 0$ et $\mathbb{P}(A) = 0$. Comme $\widetilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$, $0 = \widetilde{\mathbb{P}}(A) \geq \widetilde{\mathbb{P}}_s(A)$ et donc $\widetilde{\mathbb{P}}_s \equiv 0$.
Pour l'unicité : si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$ alors il suffit de prendre

$A_n = \{Z > Y, Z \leq n\}$ on en conclut $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout n donc $\mathbb{P}(Z > Y) = 0$. Inversant les rôles de Z et Y le même argument montre que $\mathbb{P}(Z < Y) = 0$. $\sharp$

Remarque : On a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 1$.

5.1.2 Application aux processus

Définition 5.2 *Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ on dit que deux mesures de probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sont* localement équivalentes *si pour tout $t \geq 0$ leurs restrictions à $\mathcal{F}_t$ notées respectivement $\mathbb{P}_t$ et $\mathbb{Q}_t$ sont équivalentes. On notera alors $\mathbb{P}_t \sim \mathbb{Q}_t$ et $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$.*

Remarques :
1) Si $\mathbb{P}_t$ est la restriction de $\mathbb{P}$ à $\mathcal{F}_t$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ on a $\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{P}(A)$.
2) En échangeant le rôle de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ dans la définition on obtient que $Z_t^{-1} = \frac{d\mathbb{P}_t}{d\mathbb{Q}_t}$.
3) Si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes alors elles sont localement équivalentes. En effet : il existe une v.a. $Z \geq 0$, $\mathbb{P}$-intégrable telle que $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ on a

$$\mathbb{Q}_t(A) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_t}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_A)$$

Donc pour $Z_t := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{F}_t)$ est la densité de Radon-Nykodym de $\mathbb{Q}_t$ par rapport à $\mathbb{P}_t$. En échangeant les rôles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ on en déduit également que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(1/Z|\mathcal{F}_t)$ est la densité de $\mathbb{P}_t$ par rapport à $\mathbb{Q}_t$. D'où $\mathbb{P}_t \sim \mathbb{Q}_t$.
4) Observer également que si $\mathbb{Q} \ll P$ alors il existe une v.a. $Z \geq 0$, $\mathbb{P}$-intégrable, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 1$ telle que $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Et comme précédemment, en posant $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{F}_t)$ (on en prendra la version continue à droite) le processus (Z_t) est alors une $\mathbb{P}$-martingale uniformément intégrable càd-làg : en effet, la seule chose restant à vérifier est

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{F}_s) = Z_s.$$

Plus généralement

Lemme 5.1 *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ localement équivalentes avec $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$. Si Y est une v.a. $\mathcal{F}_s$ mesurable alors pour tout $t \geq s$ on a*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YZ_t)$$

Preuve : Pour $t \geq s$ la v.a. Y et le produit YZ_t sont $\mathcal{F}_t$ mesurables donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YZ_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_t}(YZ_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y).\sharp$$

Corollaire 5.1 *Sous les hypothèses précédentes ;
le processus (Z_t) est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$ uniformément intégrable.*

Preuve : Par définition Z_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable et $\mathbb{P}$-intégrable. De plus pour toute Y v.a. $\mathcal{F}_s$-mesurable on a $\forall t \geq s$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YZ_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YZ_s).$$

C'est à dire $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t|\mathcal{F}_s) = Z_s$. Enfin l'uniforme intégrabilité vient du fait que $Z_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)\sharp$

En fait on a encore mieux :

Lemme 5.2 *Sous les hypothèses précédentes;*
(Y_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (locale) sous $\mathbb{Q}$ si et seulement si (Z_tY_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (locale) sous $\mathbb{P}$.

Preuve : Le résultat reste vrai sans le contenu de la parenthèse.
Soient (Y_t) une martingale sous $\mathbb{Q}$, $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$ alors

$$\int_A Z_tY_t \, d\mathbb{P} = \int_A Z_tY_t \, d\mathbb{P}_t = \int_A Y_t \, d\mathbb{Q}_t = \int_A Y_s \, d\mathbb{Q}_s = \int_A Z_sY_s \, d\mathbb{P}_s = \int_A Z_sY_s \, d\mathbb{P}.$$

donc (Z_tY_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{P}$.
Pour monter cela au niveau local : si (Y_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale sous $\mathbb{Q}$ alors il existe $T_n \uparrow \infty$ localisante telle que pour chaque n, $(Y_t^{T_n})$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{Q}$.
Donc par ce qui précède, pour chaque n, $(Z_tY_t^{T_n})$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{P}$.
Le théorème d'arrêt optionnel Chapitre 2, appliqué à la martingale $X_t := Z_tY_t^{T_n}$ aux temps d'arrêt $S = s \wedge T_n \leq t \wedge T_n = T$ implique que pour chaque n, $(Z_{t\wedge T_n}Y_{t\wedge T_n})$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{P}$. Donc (Z_tY_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale sous $\mathbb{P}$.
Pour la réciproque si l'on échange le rôle de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ on voit que si X_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale (locale) sous $\mathbb{P}$ alors $Z_t^{-1}X_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale (locale) sous $\mathbb{Q}$. Donc en posant $X_t = Z_tY_t$ on obtient le résultat. ♯

En complément

Théorème 5.3 *Si $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ alors si X est une semimartingale sous $\mathbb{P}$ elle est une semimartingale sous $\mathbb{Q}$.*

Preuve : C'est une conséquence du d) du Théorème 2.2 chapitre 4 : ce résultat disait que X *est une semimartingale (pour $\mathbb{P}$)* est équivalent à la propriété que pour tout $T > 0$ et toute suite H^n de processus simples prévisibles de limite H simple prévisible : i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega} |H_t^n(\omega) - H_t(\omega)| = 0$$

on a que

$$\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t H^n \, dX - \int_0^t H \, dX| \to 0$$

en $\mathbb{P}$-probabilité quand $n \to \infty$.
Or si $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ on en déduit que $\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t H^n \, dX - \int_0^t H \, dX| \to 0$ en $\mathbb{Q}$-probabilité quand $n \to \infty$. ♯

5.2 Théorème de Girsanov

Idée de base : En général la/les solution/s d'une équation du type

$$dX_t = b(t, X_t) \, dt + \sigma(t, X_t) \, dB_t$$

ne sont pas des martingales (locales). On a donc intérêt à chercher (s'il en existe) une nouvelle mesure de probabilité sous laquelle cette solution est une martingale.
Intérêt : Pricing.

On va se donner un processus (Z_t) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$, adapté qui (s'il vérifie de bonnes conditions : par exemple être une martingale) nous définira, en tant que dérivée de Radon-Nikodym, une nouvelle famille de probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$.

5.2.1 Martingale exponentielle

Lemme 5.3 *Soit X_t une martingale locale continue et $f(x,y)$ de Classe $\mathcal{C}^{2,1}$. Si*

$$\frac{1}{2}\partial^2_{xx} f + \partial_y f \equiv 0$$

alors $f(X_t, \langle X \rangle_t)$ est une martingale locale.

Preuve : Par Itô on a

$$\begin{aligned} f(X_t, \langle X \rangle_t) - f(X_0, 0) &= \int_0^t \partial_x f(X_s, \langle X \rangle_s)\ dX_s \\ &\quad + \int_0^t \partial_y f(X_s, \langle X \rangle_s)\ d\langle X \rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(X_s, \langle X \rangle_s)\ d\langle X \rangle_s \\ &= \int_0^t \partial_x f(X_s, \langle X \rangle_s)\ dX_s \end{aligned}$$

qui est une intégrale stochastique donc une martingale locale. En effet observer que $s \to \partial_x f(X_s, \langle X \rangle_s) := H_s$ est une fonction continue. Donc elle atteint son maximum M sur le compact $[0,t]$. Par suite

$$\int_0^t H_s^2\ d\langle X \rangle_s \leq M^2\ \langle X \rangle_t < \infty.$$

Donc $H \in \Pi_3(X)$. ♯

Proposition 5.1 *Martingale locale exponentielle.*
Soit X une martingale locale continue alors

$$\mathcal{E}(X)_t := \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t \right)$$

est une martingale locale.

Preuve : Il suffit de remarquer que la fonction $f(x,y) = \exp(x - y/2)$ vérifie $\frac{1}{2}\partial^2_{xx} f + \partial_y f \equiv 0$. Et on conclut par le lemme précédent. ♯

Remarque : Comme $\mathcal{E}(X)_t \geq 0$ on en déduit (par le théorème 4.7 du chapitre 2) que si X est une martingale locale continue telle que $\mathbb{E}(\exp(X_0)) < +\infty$ alors $\mathcal{E}(X)_t$ est une surmartingale.

Sous une hypothèse plus restrictive on a le

Théorème 5.4 *Soit X_t une martingale locale telle que il existe $K > 0$ tel que $\langle X \rangle_t \leq Kt$ et $X_0 = 0$. Alors $\mathcal{E}(X)_t$ est une martingale.*

Preuve : Soit $Z_t = \mathcal{E}(2X)_t$, de par le résultat précédent Z_t est une martingale locale. On remarque alors que

$$\mathcal{E}(X)_t^2 = \exp\left(2X_t - \langle X \rangle_t\right) = Z_t \exp(\langle X \rangle_t).$$

Soit T_n une suite localisante de Z_t, l'inégalité maximale de Doob appliquée à $\mathcal{E}(X)_{t\wedge T_n}$ donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}(X)^2_{s\wedge T_n}\right) \le 4\mathbb{E}(\mathcal{E}(X)^2_{t\wedge T_n}) \le 4e^{Kt}\mathbb{E}(Z_{t\wedge T_n}) = 4e^{Kt}\mathbb{E}(Z_0) = 4e^{Kt}.$$

Par convergence monotone, quand $n\to\infty$ on a par l'inégalité de Jensen

$$4e^{Kt} \ge \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\mathcal{E}(X)^2_s\right) \ge \left(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|\mathcal{E}(X)_{s\wedge T_n}|\right)^2.$$

On conclut de par le Théorème 4.4 du Chapitre 2. ♯

Remarque : De par ce que l'on vient de montrer si X_t est une martingale locale continue telle que $X_0 = 0$ et $\langle X\rangle_t \le Kt$ pour tout t alors $\mathcal{E}(X)_t \in \mathcal{M}^2$.

Le théorème précédent justifie pleinement la

Définition 5.3 *Étant donné $M = (M_t)$, $M_0 = 0$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (locale) continue telle qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{T}$, $\langle M\rangle_t \le Kt \quad \mathbb{P}-p.s.$ On définit $\mathcal{E}(M)$ la* martingale exponentielle *associée a M par*

$$\mathcal{E}(M)_t := \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right).$$

Remarques :
1) Si de plus M_t est une martingale brownienne de représentation $M_t = \int_0^t H_s\, dB_s$ alors

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(\int_0^t H_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\, ds\right).$$

2) On pose $Z_t = \mathcal{E}(M)_t = f(Y_t)$ où $f(x) = e^x$ et $Y_t = M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t$. On a $dY_t = dM_t - \frac{1}{2}d\langle M\rangle_t$ et $\langle Y\rangle_t = \langle M\rangle_t$. En appliquant la formule d'Itô on obtient

$$Z_t = 1 + \int_0^t (Z_s\, dM_s - \frac{1}{2}Z_s\, d\langle M\rangle_s) + \frac{1}{2}\int_0^t Z_s\, d\langle M\rangle_s.$$

Donc $\mathcal{E}(M)$ est solution (dans un autre chapitre on montrera que c'est l'unique solution) de

$$dZ_t = Z_t\, dM_t$$
$$Z_0 = 1.$$

Ce qui justifie le nom de (martingale) exponentielle de M.
3) D'après ce qui précède $\mathcal{E}(M)$ est une martingale et par suite $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_t) = \mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_0) = \mathbb{E}(\exp(M_0)) = 1$ pour tout $t \ge 0$.

On peut à présent montrer le

Théorème 5.5 *de Lévy*
(1) Un processus stochastique X, $X_0 = 0$ est un MBS si et seulement si c'est une martingale locale continue telle que $\langle X\rangle_t = t$.
(2) Si $X = (X^1, ..., X^d)$, $X_0 = 0$ est une martingale locale continue telle que $\langle X^i, X^j\rangle_t = t\mathbf{1}_{\{i=j\}}$; alors X est un MBS de dimension d.

Preuve : On a déjà vu que le M.B.S. B était une martingale (donc une martingale locale) continue telle que $\langle B\rangle_t = t$. Montrons donc la réciproque.
Soit $u \in \mathbb{R}$ et $F(x,t) = \exp(iux + u^2t/2)$. La fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (elle est même $\mathcal{C}^\infty$). Le fait qu'elle soit à valeur dans $\mathbb{C}$ ne nous empêche pas d'utiliser la formûle d'Itô au processus $Z_t = F(X_t, t)$.

$$\begin{aligned} Z_t &= 1 + iu\int_0^t Z_s\, dX_s + \frac{u^2}{2}\int_0^t Z_s\, ds - \frac{u^2}{2}\int_0^t Z_s\, d\langle X\rangle_s \\ &= 1 + iu\int_0^t Z_s\, dX_s \end{aligned}$$

Donc $Z = \mathcal{E}(iuX)$ la martingale exponentielle de iuX. Comme X est continue et $|\langle iuX\rangle_t| = u^2t$ on conclut que $\mathcal{E}(iuX)$ est bien une martingale continue à valeurs dans $\mathbb{C}$. En particulier

$$\mathbb{E}\left[\exp(iu(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s)\right] = \exp\left[-\frac{u^2}{2}(t-s)\right]$$

pour tous $0 \le s < t$ et $u \in \mathbb{R}$. On en déduit que $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$: en effet $\forall Y$ $\mathcal{F}_s$ mesurable et $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp(iu(X_t - X_s) + ivY)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp(iu(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s)\right]\exp(ivY)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{2}(t-s)\right)\mathbb{E}\left[\exp(ivY)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp(iu(X_t - X_s))\right]\mathbb{E}\left[\exp(ivY)\right] \end{aligned}$$

et que $X_t - X_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. Enfin la continuité de X implique que c'est un MBS.
(2) est une simple conséquence de (1). $\sharp$

Plus généralement on montre (cf. Protter Chapitre 2 Section 8)

Théorème 5.6 *Soit X une semimartingale telle que $X_0 = 0$. Alors il existe une unique semimartingale Z solution de $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s$. De plus elle est donnée par*

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t\right)\prod_{0<s\le t}(1+\Delta X_s)\exp\left(-\Delta X_s + \frac{1}{2}(\Delta X_s)^2\right) \\ &= \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t^c\right)\prod_{0<s\le t}(1+\Delta X_s)\exp\left(-\Delta X_s\right) \end{aligned}$$

Définition 5.4 *Soit X, $X_0 = 0$ une semimartingale on appelle exponentielle stochastique (de Doléans-Dade) de X, notée $\mathcal{E}(X)$, l'unique semimartingale Z solution de $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s$.*

Théorème 5.7 *Soient X et Y deux semimartingales telle que $X_0 = Y_0 = 0$. Alors $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X,Y])$.*

Preuve : On pose $U_t = \mathcal{E}(X)_t$ et $V_t = \mathcal{E}(Y)_t$. La formile d'intégration par partie donne

$$U_tV_t - 1 = \int_0^t U_{s^-}\, dV_s + \int_0^t V_{s^-}\, dU_s + [U,V]_t$$

et en utilisant la définition de l'exponentielle stochastique on a

$$= \int_0^t U_{s^-}V_{s^-}\, dY_s + \int_0^t U_{s^-}V_{s^-}\, dX_s + \int_0^t U_{s^-}V_{s^-}\, d[X,Y]_s$$

et donc en posant $Z_t = U_t V_t$ on obtient

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s^-}\ d(X + Y + [X,Y])_s$$

d'où $Z = \mathcal{E}(X + Y + [X,Y])$. ♯

Corollaire 5.2 *Soit X semimartingale telle que $X_0 = 0$. Alors $\mathcal{E}(X)^{-1} = \mathcal{E}(-X + \langle X \rangle)$.*

Preuve : par le résultat précédent $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(-X + [X,X]) = \mathcal{E}(X + (-X + [X,X]) + [X,-X]) = \mathcal{E}(0) = 1$ où on a utiliser que $[-X,[X,X]] = 0$ et $[X,-X] = -[X,X]$. ♯

5.2.2 Mesure martingale

Notre objectif étant d'estimer des prix d'actifs risqués nous nous placerons à horizon fini $T > 0$, c'est à dire on considère seulement la période $[0,T]$.

Définition 5.5 *Soient M, $M_0 = 0$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (locale) continue t.q. $\exists K > 0$ vérifiant $\langle M \rangle_t \leq Kt \quad \forall t \in [0,T]$. Soit $\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}(M)_t)_{t \geq 0}$ sa martingale exponentielle associée sous $\mathbb{P}$. On définit une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}_T$, appelée* mesure martingale *associée à M, sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_T(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_A \mathcal{E}(M)_T)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_T$.

Remarques :

1) $\mathcal{E}(M)_T$ est la dérivée de Radon-Nikodym $\dfrac{d\widetilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}}$ de $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ par rapport à $\mathbb{P}$.
2) Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}_T, \widetilde{\mathbb{P}}_T)$ est un espace de probabilité. On note $\widetilde{\mathbb{E}}_T$ l'espérance sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.
3) Bien noter que si on change d'horizon T alors $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ change. On a cependant une propriété de consistence : pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ avec $t \in [0,T]$ alors

$$\widetilde{\mathbb{P}}_T(A) = \widetilde{\mathbb{P}}_t(A).$$

Cela reste encore vrai pour des T.A. bornés par T : si $\tau \leq T$ et $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors

$$\widetilde{\mathbb{P}}_T(A) = \widetilde{\mathbb{P}}_\tau(A).$$

Des Lemmes 5.1 et 5.2 on tire directement les deux lemmes suivants.

Lemme 5.4 *Si $t \leq T$ et Y est $\mathcal{F}_t$ mesurable alors*

$$\widetilde{\mathbb{E}}_T(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y \mathcal{E}(M)_t).$$

Lemme 5.5 *$X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$-martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ si et seulement si $X\mathcal{E}(M) = (X_t \mathcal{E}(M)_t)_{t \in [0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$-martingale sous $\mathbb{P}$.*

5.2.3 Théorème de Girsanov

On énonce ici ce résultat dans un cadre particulier suffisant pour nos applications.

Théorème 5.8 *de Girsanov.*
Soit M, $M_0 = 0$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (locale) vérifiant $\exists K > 0$ t.q. $\langle M \rangle_t \leq Kt \quad \forall t \in [0, T]$. On note $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ sa mesure martingale. Si $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale sous $\mathbb{P}$ alors $(Y_t - \langle M, Y \rangle_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.

"Preuve" : On pose $A_t := \langle M, Y \rangle_t$ de part le Lemme 5.5 il suffit de voir que $(Y - A)\mathcal{E}(M)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$.
Par IPP on a

$$\begin{aligned} d((Y_t - A_t)\mathcal{E}(M)_t) &= (Y_t - A_t)d\mathcal{E}(M)_t + \mathcal{E}(M)_t(dY_t - dA_t) + d\langle Y - A, \mathcal{E}(M)\rangle_t \\ &= (Y_t - A_t)d\mathcal{E}(M)_t + \mathcal{E}(M)_t dY_t - \mathcal{E}(M)_t dA_t + d\langle Y, \mathcal{E}(M)\rangle_t. \end{aligned}$$

On a déjà vu que $d\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_t \; dM_t$ et par la (stricte) positivité de $\mathcal{E}(M)_t$ ceci implique $dM_t = \mathcal{E}(M)_t^{-1} \; d\mathcal{E}(M)_t$. D'où

$$dA_t = d\langle M, Y \rangle_t = \mathcal{E}(M)_t^{-1} \; d\langle \mathcal{E}(M), Y \rangle_t$$

et

$$d((Y - A)\mathcal{E}(M))_t = (Y_t - A_t) \; d\mathcal{E}(M)_t + \mathcal{E}(M)_t \; dY_t$$

comme $\mathcal{E}(M)_t$ et Y_t sont des martingales sous $\mathbb{P}$ on en déduit que $((Y - A)\mathcal{E}(M))$ est une martingale locale sous $\mathbb{P}$. On peut montrer (on l'admettra) qu'il s'agit bien d'une martingale. $\sharp$

Théorème 5.9 *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesure localement équivalentes. Alors la variation quadratique $\langle X \rangle_t$ et la covariation quadratique $\langle X, Y \rangle_t$ sont les mêmes sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$.*

Preuve : par identité de polarisation la deuxième affirmation est une conséquence de la première. On rappelle (cf problème de révision) que si Δ_n est une suite de partition de $[0, t]$ de pas $|\Delta_n| \to 0$ alors

$$Q_t^n(X) = \sum_{t_i^n \in \Delta^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \to \langle X \rangle_t$$

en $\mathbb{P}$-probabilité pour une semimartingale sous $\mathbb{P}$. Comme la convergence en probabilité n'est pas affectée par un changement de probabilité équivalent on a le résultat. $\sharp$

Théorème 5.10 *Soit X une semimartingale sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ localement équivalentes. Alors pour tout processus $H \in \ell b\Pi$ $(H \cdot X) = \int H \; dX$ l'intégrale stochastique de H par X est la même sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$.*

Preuve : Si H est un processus simple alors on a bien le même résultat. Soient M et N les parties martingales locales respectives sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ et A et B les parties à variation finies respectives sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$. Le résultat précédent implique que $\langle M \rangle = \langle N \rangle$.
On pose $T_n = \inf\{t > 0 : \max(\langle M \rangle_t, V_t(A), V_t(B)) \leq n\}$ où V_t désigne la variation sur

$[0, t]$. Alors si $H \in \ell b\Pi$ et $H_t = 0$ pour $t \geq T_n$ alors il existe une suite de processus simple H^m telle que

$$\max \left(\|H^m - H\|_M, \|H^m - H\|_N, \int |H_s^m - H_s| \; d(V(A) + V(B))_t \right) \to 0$$

Ceci permet de passer à la limite dans l'égalité

$$\int_{\mathbb{P}} H^m \; d(M + A)_t = \int_{\mathbb{Q}} H^m \; d(N + B)_t.$$

Comme n est arbitraire et $T_n \to \infty$ on a le résultat. $\sharp$.

5.2.4 Théorème de Girsanov pour les processus d'Itô

Soit $W_t = (W_t^1, ..., W_t^d)$ un mouvement brownien de dimension d sous $\mathbb{P}$. On notera $\mathcal{F}_t$ sa filtration brownienne associée.
On admettra sans démonstration les résultats qui suivent.

Théorème 5.11 *de Girsanov.*
Soit (X_t) un processus continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et tel que $\int_0^t (X_s^i)^2 \; ds < +\infty \quad \mathbb{P} - p.s. \quad \forall t \geq 0, i = 1, ..., d$. On pose

$$\mathcal{E}(X)_t := \exp \left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^t X_s^i \; dW_s^i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_0^t |X_s^i|^2 \; ds \right).$$

On suppose que $\mathcal{E}(X)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$. Pour tout $T > 0$ fixé on définit la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ sur $\mathcal{F}_T$ par

$$\widetilde{\mathbb{P}}_T(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_A \mathcal{E}(X)_T)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_T$. On définit le processus $\widetilde{W} = (\widetilde{W}^1, ..., \widetilde{W}^d)$ par

$$\widetilde{W}_t^i := W_t^i - \int_0^t X_s^i \; ds$$

pour tous $t \geq 0$ et $1 \leq i \leq d$.
Alors le processus $(\widetilde{W}_t)_{t \in [0,T]}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-Mouvement Brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \widetilde{\mathbb{P}}_T)$.

Théorème 5.12 *Condition de Novikov.*
Pour que $\mathcal{E}(X)$ soit une martingale sous $\mathbb{P}$ il suffit que pour tout $i \in \{1, ..., d\}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t |X_s|^2 \; ds \right) \right) < +\infty.$$

Corollaire 5.3 *du théorème de Girsanov.*
Soient $T > 0$,
- Y_t un processus d'Itô de représentation sous $\mathbb{P}$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s \; ds + \int_0^t H_s \; dW_s$$

avec $\int_0^t |K_s|\ ds < \infty$ *et* $\int_0^t H_i^2(s)\ ds < \infty \quad \mathbb{P}-p.s. \quad \forall t \geq 0, i = 1, ..., d$ *;*
- X_t *un processus de carré intégrable sur* $(0,T)$ *vérifiant* $\mathcal{E}(X)$ *est une martingale sous* $\mathbb{P}$ *;*
- $(\widetilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ *définis comme dans le théorème de Girsanov.*
Alors

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (K_s + H_s.X_s)\ ds + \int_0^t H_s\ d\widetilde{W}_s$$

pour tout $t \in [0,T] \quad \widetilde{\mathbb{P}}_T - p.s.$

5.2.5 Théorème de Girsanov-Meyer pour les semimartingales

Théorème 5.13 *Soient* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *deux mesures de probabilité équivalentes. Soit* $X = M + A$ *une semimartingale telle que* M *est une* $\mathbb{P}$*-martingale locale et* A *un processus à variation finie sous* $\mathbb{P}$*. Alors sous* $\mathbb{Q}$ *la semimartingale* $X = N + C$ *où*

$$N_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s}\ d[Z,M]_s$$

est une $\mathbb{Q}$*-martingale locale,* $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t)$ *et* $C = X - N$ *est un processus à variation finie sous* $\mathbb{Q}$*.*

(cf. Protter Chapitre III section 6).

5.3 Applications

5.3.1 Mouvement brownien

On se propose d'étudier les solutions de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)\ dt + dW_t$$

où $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en t, lipchitzienne en x et W_t est un M.B.S. sous $\mathbb{P}$.
De par le théorème d'Itô (cf. Chapitre 7) on sait qu'il existe une unique solution forte X de cette équation.

N'ayant pas la forme de $b()$ on ne peut tenter de résoudre explicitement cette équation et encore moins affirmer que X_t est une martingale sous $\mathbb{P}$ (ce qui est évidement faux en général).
Cependant on a

$$X_t - X_0 = W_t + \int_0^t b(s, X_s)\ ds = W_t - \int_0^t -b(s, X_s)\ ds.$$

Comme W_t est un M.B.S. sous $\mathbb{P}$ il s'agit également d'une martingale sous $\mathbb{P}$. Le théorème de Girsanov dit que si M est une martingale (sous $\mathbb{P}$) vérifiant de "bonnes conditions" alors $W_t - \langle M, W\rangle_t$ est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.
L'idée qui vient est alors de chercher la "bonne" martingale M vérifiant

$$\langle M, W\rangle_t = \int_0^t -b(s, X_s)\ ds.$$

Ceci à effectivement lieu si $M_t = -\int_0^t b(s,X_s)\ dW_s$ (observer que $M_0 = 0$).
Il faut alors nous assurer que M_t est bien une martingale et qu'il existe $K > 0$ tel que $\langle M\rangle_t \leq Kt$.
Une façon d'assurer ces deux conditions est de supposer b bornée : c.à.d. $\exists K_1 > 0$ t.q. $|b(t,x)| \leq K_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\int_0^t \mathbb{E}|b(s,X_s)|^2\ ds \leq K_1^2 t < \infty$$

ce qui assure $H_s := b(s,X_s) \in \Pi_2(W)$ donc M_t est une martingale et $\langle M\rangle_t \leq K_1^2 t$.
D'où le (i) du résultat suivant.

Proposition 5.2 *Sous les conditions (sur b) et les notations précédentes le processus X_t solution de*

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t,X_t)\ dt + dW_t; \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

vérifie
(i) $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.
(ii) $\langle X\rangle_t = t$ donc $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-M.B.S. sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.

Preuve du (ii) : Par ce qui précède on a

$$X_t = X_t - X_0 = W_t - \langle M, W\rangle_t$$

d'où $\langle X\rangle_t = \langle W\rangle_t = t$. De par le théorème de Lévy on en déduit que X_t est un M.B.S. sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. ♯

Remarque : Une façon équivalente de traduire ce dernier résultat est de conclure que

$$\widetilde{W}_t := W_t + \int_0^t b(s,X_s)\ ds$$

est un M.B.S. sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.

5.3.2 Diffusion non dégénérée

Sans énormément plus d'effort on peut obtenir le résultat suivant dont la preuve (laissée à titre d'exercice) se calque sur celle de la Proposition précédente.

Proposition 5.3 *Soient $b, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en t, lipchitziennes en x et telles que $|b(t,x)| \leq K_1 < \infty$ et $|\sigma(t,x)| \geq K_2$ pour tous (t,x). Soit (X_t) le processus solution de*

$$dX_t = b(t,X_t)\ dt + \sigma(t,X_t)\ dW_t.$$

On pose $M_t := -\displaystyle\int_0^t \frac{b(s,X_s)}{\sigma(s,X_s)}\ dW_s$ et $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ sa mesure martingale. Alors
(i) $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.
(ii) $\langle X\rangle_t = \int_0^t (\sigma(s,X_s))^2\ ds$ (donc $(X_t)_{t\in[0,T]}$ n'est pas un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-M.B.S. sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ en

général).
(iii) Le processus $(\widetilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ *définit par*

$$\widetilde{W}_t := W_t + \int_0^t \frac{b(s,X_s)}{\sigma(s,X_s)}\ ds$$

est un M.B.S. sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$*.*

Remarque importante :
En particulier on a

$$dX_t = \sigma(t,X_t)\ d\widetilde{W}_t.$$

En effet

$$dX_t = b(t,X_t)\ dt + \sigma(t,X_t)\ dW_t = \sigma(t,X_t)\left(\frac{b(t,X_t)}{\sigma(t,X_t)}\ ds + dW_t\right).$$

Chapitre 6

Temps Local, Formule de Tanaka

Contents

6.1 Introduction

Les hypothèses de la formule d'Itô nous contraigne de l'employer pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Dans ce chapitre nous essayons de relaxer cette hypothèse.

6.1.1 Première généralisation

On commence par une extension simple de la formule d'Itô.

Théorème 6.1 *Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^2$ en dehors d'un ensemble de points finis $z_1, ..., z_n$ et de plus que $|g''(x)| \leq M$ pour $x \neq z_i$, $i = 1, ..., n$. Soit B_t un mouvement brownien de dim 1. Alors la formule d'Itô est reste valable :*

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)\, ds$$

où l'on a prolongé $g''(z_i) := g''(z_i-) = \lim_{x \nearrow z_i} g''(x)$.

Preuve : Soit ρ_n une suite de fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $B(0,1/n)$ telles que, $\rho_n(t) \geq 0$ et $\int \rho_n(t)\ dt = 1$ [1]. Alors $g_n := \rho_n * g$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g_n \to g$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. [2]
De plus comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ on a $g'_n = (\rho'_n) * g = \rho_n * (g')$ et par suite $g'_n \to g'$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
Enfin on peut appliquer la formule d'Itô à g_n :

$$g_n(B_t) = g_n(B_0) + \int_0^t g'_n(B_s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''_n(B_s)\ ds. \tag{6.1}$$

De part la continuité de $s \to B_s$ on a sur $[0,t]$

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(B_s) - g(B_s)\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|g'_n(B_s) - g'(B_s)\|_\infty = 0$$

donc $\lim_{n\to\infty} g_n(B_t) = g(B_t)$. D'autre part l'inégalité maximale de Doob implique

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^t g'_n(B_s)\ dB_s - \int_0^t g'(B_s)\ dB_s\right)^2\right] \\ \leq\ & 4\sup_{s\in[0,t]}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t g'_n(B_s)\ dB_s - \int_0^t g'(B_s)\ dB_s\right)^2\right] \end{aligned}$$

et par l'isométrie d'Itô on a

$$= 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(g'_n(B_s) - g'(B_s)\right)^2\ ds\right] \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

On en déduit qu'il existe une sous suite $n_k \nearrow \infty$ telle que

$$\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^t g'_{n_k}(B_s)\ dB_s - \int_0^t g'(B_s)\ dB_s\right)^2 \to 0$$

presque sûrement quand $k \to \infty$.
Pour traiter le dernier terme $K_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t g''_n(B_s)\ ds$ on remarque que (6.1) implique

$$K_t^{n_k} = g_{n_k}(B_t) - g_{n_k}(B_0) - \int_0^t g'_{n_k}(B_s)\ dB_s$$

[1] Une telle suite est appelée suite régularisante. On les appelle aussi parfois fonctions test. On peut prendre par exemple

$$\rho_n(x) = Cn\exp[(n^2x^2-1)^{-1}]\mathbf{1}_{|x|<1/n}$$

où C est une constante de normalisation.

[2] Soit K un compact de $\mathbb{R}$ fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(K,\varepsilon) > 0$ tel que pour tous $x \in K$ et $y \in B(0,\delta)$ on a $|g(x-y) - g(x)| < \varepsilon$. On a

$$g_n(x) - g(x) = \int (g(x-y) - g(x))\rho_n(y)\ dy = \int_{-1/n}^{1/n} (g(x-y) - g(x))\rho_n(y)$$

donc dès que $n > 1/\delta$ on a pour tout $x \in K$

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n(y)\ dy = \varepsilon.$$

ce qui montre le résulta. ♯

et donc par ce qui précède

$$\lim_{k\to\infty} K_t^{n_k} = g(B_t) - g(B_0) - \int_0^t g'(B_s)\, dB_s$$

presque sûrement.
Or en dehors de $z_1, ..., z_n$ on a $g_n''(x) \to g(x)$. Sans perte de généralité on peut supposer $z_1 < z_2 < ... < z_n$. Posons pour tout $\varepsilon > 0$ $I_\varepsilon = \cup_{i=1}^n]z_i - \varepsilon, z_i + \varepsilon[$. On a donc

$$\int_0^t (g_n''(B_s) - g''(B_s))\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon}(B_s)\, ds = 0$$

et de plus

$$\int_0^t (g_n''(B_s) - g''(B_s))\mathbf{1}_{I_\varepsilon}(B_s)\, ds \leq 2M\lambda(s \in [0,t] : B_s \in I_\varepsilon)$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Or

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(s \in [0,t] : B_s \in I_\varepsilon) = 0$$

D'où l'égalité cherchée. $\sharp$

6.1.2 Formule de Tanaka

Supposons à présent que l'on veuille appliquer Itô à $g(B_s) = |B_s|$.
La difficulté ici c'est que $x \mapsto |x|$ n'est même plus de classe $\mathcal{C}^1$. En revanche c'est une fonction convexe, donc Lipchitzienne et sa dérivée à gauche existe et est une fonction càg-làd . On pose donc

$$g_k(x) = -x\mathbf{1}_{]-\infty,-1/k]}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + kx^2\right)\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(x) + x\mathbf{1}_{]1/k,+\infty[}(x)$$

Clairement g_k est de classe $\mathcal{C}^1$

$$g_k'(x) = -\mathbf{1}_{]-\infty,-1/k]}(x) + kx\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(x) + \mathbf{1}_{]1/k,+\infty[}(x)$$

et en dehors des points $-1/k$ et $1/k$ la dérivée seconde

$$g_k''(x) = k\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(x)$$

est bien continue et bornée (par k). Par le résultat précédent on a donc

$$g_k(B_t) = g_k(B_0) + \int_0^t g_k'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_k''(B_s)\, ds \tag{6.2}$$

Observer que $\|g_k(x) - |x|\|_\infty \leq \frac{1}{2k} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Par ailleurs par l'Isométrie d'Itô on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t kB_s\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\, dB_s\right)^2\right] &= \int_0^t k^2\mathbb{E}\left(B_s^2\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\right)\, ds \\
&= k^2\int_0^t\int_{-1/k}^{1/k} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)\, dx\, ds \\
&\leq \frac{2}{k}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} = \frac{2\sqrt{t}}{k\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $x \in [-1/k, 1/k]$. On en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t kB_s \mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\ dB_s\right)^2\right] = 0;$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t g_k'(B_s)\ dB_s = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\ dB_s \quad \text{dans } L^2$$

et

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_0^t g_{k_\ell}'(B_s)\ dB_s = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\ dB_s \quad \text{p.s.}$$

Par (6.2) on a

$$\frac{1}{2}\int_0^t g_k''(B_s)\ ds = g_k(B_t) - g_k(B_0) - \int_0^t g_k'(B_s)\ dB_s$$

La limite en k existe dans L^2 on pose

$$L_t := \lim_{k\to\infty} \int_0^t \frac{k}{2}\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\ ds = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2}\lambda\left(s \in [0,t] : B_s \in \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]\right);$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc quitte à prendre une (sous)sous suite de n_ℓ, disons $n_{\ell_j} \nearrow \infty$ on a presque sûrement

$$L_t = |B_t| - |B_0| - \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\ dB_s.$$

On vient de montrer le

Théorème 6.2 *Formule de Tanaka.*
Soit B_t un mouvement Brownien en dimension 1 alors presque sûrement on a

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\ dB_s + L_t$$

où $L_t := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\lambda\left(s \in [0,t] : B_s \in]-\varepsilon, \varepsilon]\right)$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

6.2 Temps Local

6.2.1 Deuxième généralisation

Nous allons généraliser le résultat précédent. On commence par montrer le

Théorème 6.3 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et X une semimartingale continue. Alors $f(X)$ est une semimartingale et*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + K_t$$

où f' est la dérivée à gauche de f, c'est-à-dire $f'(x) = \lim_{h\searrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ et $K_t = K_t(f, X)$ est un processus continu croissant adapté.

Remarque : La formule est linéaire en f. En effet si f_1 et f_2 sont deux fonction convexe de processus croissants associés $K_t^1 = K_t(f_1, X)$ et $K_t^2 = K_t(f_2, X)$ alors

$$K_t(f_1 + f_2, X) = K_t^1 + K_t^2.$$

Preuve du théorème : Comme f est convexe f' la dérivée à gauche existe en tout point et pour tout $x \in K$ compact $f'(x) \leq c(K) = \max_{s\in K} f'(s)$. La stratégie s'inspire des preuves ci dessus. On sait que $X_t = M_t + A_t$ où M_t est une martingale locale et A_t un processus à variation finie tels que $A_0 = 0$.
Au besoin en utilisant un temps d'arrêt (localisation) on peut sans perte de généralité supposer que $\max(|X_t|, |A_t|, \langle M\rangle_t) \leq C < \infty$.
Soit ρ_n une suite régularisante, on pose $f_n(x) = f * \rho_n(x)$ comme précédemment f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (de plus elle est aussi convexe) donc par Itô on a

$$f_n(X_t) - f_n(X_0) = \int_0^t f_n'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)\, d\langle X\rangle_s. \tag{6.3}$$

De par les propriétés de régularisation et comme on suppose $|X_t| \leq C$ on a que

$$f_n(X_t) \to f(X_t) \text{ uniformément en } t.$$

De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \lim_{h\searrow 0} \int_{-1/n}^{1/n} \frac{f(x-y) - f(x-h-y)}{h} \rho_n(y)\, dy$$

et par convergence dominée on en déduit

$$f_n'(x) = \int_{-1/n}^{1/n} f'(x-y)\rho_n(y)\, dy = f' * \rho_n(x)$$

et donc $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.
On pose $I_t^n = \int_0^t f_n'(X_s)\, dM_s$ et $I_t = \int_0^t f'(X_s)\, dM_s$. Par l'inégalité maximale de Doob dans L^2 et l'Isométrie d'Itô on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_t (I_t^n - I_t)^2\right) &\leq 4 \sup_t \mathbb{E}\left[(I_t^n - I_t)^2\right] \\
&= 4\mathbb{E}\left(\int_0^\infty (f_n'(X_s) - f'(X_s))^2\, d\langle M\rangle_s\right)
\end{aligned}$$

Comme $|X_s| \leq C$ et $\langle M\rangle_s \leq C$ on en déduit que

$$\leq 4C \sup_{x\in[-C,C]} |f_n'(X_s) - f'(X_s)|^2 \to 0$$

quand $n \to \infty$. Donc il existe une sous suite n_k telle que $\sup_t (I_t^{n_k} - I_t)^2 \to 0$ presque sûrement quand $k \to \infty$.
On pose $J_t^n = \int_0^t f_n'(X_s)\, dA_s$ et $J_t = \int_0^t f'(X_s)\, dA_s$. Par convergence dominée on a

$$\sup_t |J_t^n - J_t| \leq \int_0^\infty |f_n'(X_s) - f'(X_s)|\, dA_s \to 0$$

presque sûrement quand $n \to \infty$.
Enfin on pose $K_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$ alors par (6.3) on a

$$K_t^{n_k} = f_{n_k}(X_t) - f_{n_k}(X_0) - \int_0^t f'_{n_k}(X_s)\, dX_s$$

De part ce qui précède le membre de droite converge presque sûrement lorsque $k \to \infty$ vers une limite uniforme en t. Il en est donc de même pour le membre de gauche. Par ailleurs $K_t^{n_k}$ est continu, adapté et croissant donc sa limite uniforme K_t l'est aussi. ♯

6.2.2 Définition et premières propriétés

Définition 6.1 *Soient X une semimartingale et f une fonction convexe alors le processus $K_t = K_t(f, X)$ définit dans le théorème précédent est appelé* processus croissant associé *à f.*
Le processus croissant associé à la fonction $x \mapsto |x-a|$ est appelé temps local en *a et est noté $L_t^a = L^a(X)_t$, quand $a = 0$ on écrit simplement L_t.*

Grâce au Théorème 6.3 on abouti aisément à la généralisation suivante de la formule de Tanaka.

Corollaire 6.1 *Formule de Meyer-Tanaka.*
Soit X une semimartingale continue. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sign}(X_s - a)\, dX_s + L_t^a$$

Le résultat qui suit donne une autre définition du temps local qui sera utile dans le théorème à suivre.

Lemme 6.1 *Le processus croissant associé à la fonction $x \mapsto (x-a)^+$ ou $x \mapsto (x-a)^-$ est $(1/2)L_t^a$.*

Preuve : Les fonctions $x \mapsto (x-a)^+$ et $x \mapsto (x-a)^-$ sont convexes. Soient donc K_t^1 et K_t^2 leur processus croissants associés respectifs. On a $|x-a| = (x-a)^+ + (x-a)^-$ donc $L_t^a = K_t^1 + K_t^2$ (cf. remarque qui suit le Théorème 6.3).
Par ailleurs $g(x) := x - a = (x-a)^+ - (x-a)^-$ est une fonction (convexe) de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc par Itô

$$g(X_t) - g(X_t) = X_t - X_0 = \int_0^t 1\, dX_s$$

donc le processus croissant associé à g est 0. D'où le résultat cherché. ♯

Le résultat qui suit précise le sens des vocables “temps local” pour L_t^a.

Théorème 6.4 *Soit X une semimartingale continue. Le processus $L_t^a = L^a(X)_t$ ne croît que lorsque $X_t = a$; plus précisément pour presque tout ω la mesure sur $\mathbb{R}^+$, $dL_t^a(\omega)$ à pour support $\{s \geq 0 : X_s(\omega) = a\}$.*

Preuve : Comme le processus croissant L_t^a est à trajectoire continue la mesure $dL^a(\omega)$ est une mesure diffuse (c'est à dire ne contient pas d'atome).
Supposons que l'on ait $0 \leq S < T$ des temps d'arrêts tels que $\{(s,\omega) : S(\omega) \leq s < T(\omega)\} \subset \{(s,\omega) : X_s(\omega) < a\}$. Alors $X \leq a$ sur $[S,T]$. En appliquant deux fois le Théorème 6.3 et le Lemme précédents à $f(x) = (x-a)^+$ aux temps S et T on a

$$0 = (X_T - a)^+ - (X_S - a)^+ = \int_S^T \mathbf{1}_{]a,\infty[}(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}(L_T^a - L_S^a)$$

d'où $L_T^a - L_S^a = 0$ c'est à dire $L_T^a = L_S^a$.
Pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$ on définit les temps d'arrêt S_q par

$$S_q(\omega) = \begin{cases} q & \text{si } X_q(\omega) < a \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis on définit

$$T_q(\omega) = \inf\{t > S_q(\omega) : X_t \geq a\}.$$

On a donc $[S_q, T_q[\subset \{X < a\}$ et de plus

$$\mathrm{Int}(\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+}]S_q(\omega), T_q(\omega)[$$

où $\mathrm{Int}(B)$ représente l'intérieur de l'ensemble B.
Par l'analyse qui précède ceci implique que $dL^a(\omega)$ ne charge pas $\mathrm{Int}(\{s > 0 : X_s(\omega) < a\})$.
Or $\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}$ est l'image inverse de l'ouvert $]-\infty, a[$ par une application continue donc est lui même ouvert donc coincide avec son intérieur. Donc $dL^a(\omega)$ ne charge pas $\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}$.
De façon analogue on montre que dL^a ne charge pas $\{s > 0 : X_s > a\}$. Donc son support est contenu dans l'ensemble $\{s \geq 0 : X_s = a\}$. $\sharp$

6.3 Formule de Meyer-Itô

6.3.1 Pour les semimartingales continues

Le résultat suivant est optimal : Cinclar, Jacod, Protter et Sharpe (1980) ont montrer que car si B_t est un mouvement Brownien et si $X_t = f(B_t)$ est une semi martingale alors f doit être la différence de deux fonctions convexes...

Théorème 6.5 *Formule de Meyer-Itô.*
Soit X une semimartingale continue. Soit f la différence de deux fonctions convexes, f' la dérivée à gauche de f et $\mu = f''$ au sens des distributions (μ a pour FDR f'). Alors

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int L_t^a\ \mu(da)$$

où $L_t^a = L^a(X)_t$ est le temps local passé en a par X jusqu'au temps t.

Remarques :
(a) Pour $f(x) = |x|$ on a $f'(x) = \text{sign}(x) = 2\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) - 1$ et donc $\mu(da) = 2\delta_0(da)$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.
(b) Il est remarquable que le processus croissant associé (intégrale du temps local) ne dépend pas de f.
"Preuve" : Comme la formule est linéaire en f on peut supposer sans perte de généralité que f est convexe. En localisant on peut supposer $|X_t|$ et $\langle X \rangle_t$ bornés par une constante C pour tout t.
On pose alors

$$g(x) = \frac{1}{2} \int_{-C}^{C} |x - a| \; \mu(da).$$

Sur $[-C, C]$ on a $(f - g)'' = 0$ donc par suite $f(x) - g(x) = a + bx$ pour $|x| \leq N$. Comme le résultat est évident pour les fonctions linéaires (de processus croissant associé nul) il suffit donc de le montrer pour g.
On a

$$g'(x) = \frac{1}{2} \int_{-C}^{C} \text{sign}(x - a) \; \mu(da).$$

Par définition du temps local (Théorème 2.1) on a

$$|X_t - a| - |X_0 - a| = \int_0^t \text{sign}(X_s - a) \; dX_s + L_t^a$$

et en intégrant $\frac{1}{2} \int_{-C}^{C} \mu(da)$ on a

$$g(X_t) - g(X_0) = \frac{1}{2} \int_{-C}^{C} \left(\int_0^t \text{sign}(X_s - a) \; dX_s + L_t^a \right) \; \mu(da)$$

On peut montrer (nous l'admettrons, preuve dans Durrett Section 2.11 chapitre 2) que l'on peut échanger l'ordre d'intégration d'où

$$g(X_t) - g(X_0) = \int_0^t g'(X_s) \; dX_s + \frac{1}{2} \int_{-C}^{C} L_t^a \; \mu(da)$$

Comme $L_t^a = 0$ pour $|a| > C$ ceci conclut la preuve. ♯

6.3.2 Cas général

Les résultat qui suivent sont extrait du livre de Protter (Chapitre IV section 5). On commence par une généralisation du Théorème 6.3.

Théorème 6.6 *Soit f une fonction convexe et X une semimartingale. Alors $f(X)$ est une semimartingale et on a*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^t f'(X_{s^-}) \; dX_s + A_t$$

où f' est la dérivée à gauche de f et $A = A(f, X)$ est un processus adapté, croissant, continu à droite. De plus on a

$$\Delta A_t = f(X_t) - f(X_{t^-}) - f'(X_{t^-}) \Delta X_t.$$

Définition 6.2 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit le processus croissant $A_t^a = A^a(X)_t$ par*

$$|X_t - a| - |X_0 - a| = \int_{0+}^{t} \operatorname{sign}(X_{s^-} - a)\ dX_s + A_t^a.$$

Le temps local passé par X en a jusqu'au temps t, noté $L_t^a = L^a(X)_t$ est définit par

$$L_t^a = A_t^a - \sum_{0<s\leq t} [|X_s - a| - |X_{s^-} - a| - \operatorname{sign}(X_{s^-} - a)\Delta X_s]$$

Remarque Importante : On montre (cf. Protter chapitre IV section 4) que l'intégrale $\int_{0+}^{t} \operatorname{sign}(X_{s^-} - a)\ dX_s$ a une version qui est conjointement mesurable en (a, t, ω) et est càdlàg en t. Par suite il en est de même pour le processus A_t^a et par conséquent pour le temps local L_t^a. On choisira toujours cette version conjointement dans tout ce qui suit.
On observera également que $t \mapsto L_t^a$ est continue (puisque par définition a retiré les sauts du processus croissant).

Théorème 6.7 *Pour presque tout ω le support de la mesure $dL_t^a(\omega)$ est contenu dans l'ensemble $\{s : X_{s^-}(\omega) = a\}$.*

Théorème 6.8 *Formule de Meyer-Itô.*
Soit X une semimartingale continue. Soit f la différence de deux fonctions convexes, f' la dérivée à gauche de f et $\mu = f''$ au sens des distributions (c'est une mesure signée). Alors

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + \sum_{0<s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int L_t^a\ \mu(da)$$

où $L_t^a = L^a(X)_t$ est le temps local passé en a par X jusqu'au temps t.

6.3.3 Propriétés du temps local

Une conséquence de la formule d'Itô-Meyer est le résultat significatif suivant.

Corollaire 6.2 *Soit X une semimartingale continue de temps local L_t^a. Si g est borélienne bornée alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a)\ da = \int_0^t g(X_s)\ d\langle X\rangle_s.$$

Preuve : Supposons g continue et positive alors notons f la fonction telle que $f'' = g$. La fonction f est convexe de classe $\mathcal{C}^2$ donc on peut lui appliquer la formule d'Itô et la formule de Meyer-Itô. Ce qui donne l'identité cherchée.
Si g est continue de signe quelconque on pose $g = g^+ + g^-$ et on obtient le résultat par la linéarité et ce qui précède.
Enfin pour g boréliènne bornée : on utilise le fait que les fonctions continues constituent une classe monotone pour les fonction boréliènnes bornées. ♯

Remarque : Pour le MBS W cette formule donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a)\ da = \int_0^t g(W_s)\ ds.$$

Ainsi on voit que $L_t^a = L_t^a(W)$ peut être interprété comme le temps passé en a par le Brownien jusqu'au temps t. Plus précisément L_t^a est la densité de la loi du temps d'occupation au temps t :

$$\nu_t(A) = \int_0^t \mathbf{1}_A(W_s)\ ds = \int_A L_t^u\ du.$$

Pour la preuve du résultat suivant nous référons à Durrett Section 2.11 Chap. 2 pp.89-90.
Dans le cas général on a le résultat équivalent

Corollaire 6.3 *Soit X une semimartingale càdlàg de temps local $(L^a)_{a\in\mathbb{R}}$. Soit g une fonction boréliènne bornée. Alors pour tous $t > 0$ on a presque sûrement*

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a g(a)\ da = \int_0^t g(X_{s^-})\ d[X,X]_s^c.$$

Théorème 6.9 *Soit X une martingale locale continue. Il existe une version de L_t^a telle que $(a,t) \mapsto L_t^a$ est conjointement continue.*

Remarque : Ce résultat n'est plus vrai pour les sousmartingales ni les semimartingales continues. En effet posons $X_t = |B_t|$ où B_t est un MBS. La remarque ci dessus implique que $L_t^a(X)$ le temps local passé en a par X jusqu'au temps t est

$$L_t^a(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ L_t^a(B) + L_t^{-a}(B) & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

Comme $L_t^0(B) = |B_t| - \int_0^t \mathrm{sign}(B_s)\ dB_s \not\equiv 0$ on en déduit que $a \mapsto L_t^a(X)$ est discontinu en 0.

Le résultat qui suit montre que pour un f n'étant pas différence de deux fonctions convexe alors $f(X)$ n'est pas une semimartingale.

Théorème 6.10 *de Yor.*
Soit X une martingale locale continue telle que $X_0 = 0$ et soit $\alpha \in]0, 1/2[$. Alors $Y_t = |X_t|^\alpha$ n'est pas une semimartingale sauf dans le cas trivial où $X \equiv 0$.

Preuve : voir Protter Chapitre IV section 5.

Chapitre 7

Équations Différentielles Stochastiques

Contents

7.1 EDS au sens d'Itô

7.1.1 Définitions

Cette partie est consacrée à la résolution des (systèmes d') équations différentielles stochastiques (ou EDS) qui s'écrivent pour tout $i \in \{1, ..., d\}$

Cas homogène

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(X_s)\ ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)\ dB_s^j$$

Cas non homogène

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(s, X_s)\ ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\ dB_s^j$$

où $i \in \{1, ..., d\}$, $B = (B^1, ..., B^m)'$ est un mouvement brownien de dimension $m \geq 1$ et l'application $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))$ est une matrice $d \times m$. Ainsi pour être cohérent on traite $X = (X^1, ..., X^d)'$, B et $b()$ comme des vecteurs colones : c.à.d. respectivement des matrices $d \times 1$, $m \times 1$ et $d \times 1$. On peut alors équire l'équation vectorielle

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \cdot dB_s$$

Pour que les intégrales ci dessus aient un sens on supposera que les applications b et σ sont mesurables et localement bornées.

Remarque : Si on note par $\mathcal{F}_t$ la filtration Brownienne du MBS B alors le sens intuitif des équations homogènes ci dessus est : pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mathbb{E}(X_{t+\epsilon}^i - X_t^i | \mathcal{F}_t) = b^i(X_t)\epsilon + o(\epsilon)$$

et

$$\mathbb{E}\left([X_{t+\epsilon}^i - X_t^i - b^i(X_t)\epsilon][X_{t+\epsilon}^j - X_t^j - b^j(X_t)\epsilon] | \mathcal{F}_t\right) = (\sigma\sigma')_{ij}(X_t)\epsilon + o(\epsilon)$$

où σ' est la matrice transposée de σ et $o(\epsilon)/\epsilon \to 0$ quand $\epsilon \to 0$.
On va à présent définir précisément ce que l'on entend par solution de ces équations.

7.1.2 Solutions forte et faible

Définition 7.1 *Étant donnés $B = (B_t)$ un $\mathcal{F}_t$-Mouvement Brownien, Z un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ indépendant de B, b et σ des fonctions mesurables localement bornées. On appelle* solution forte *de l'EDS homogène*

$$X_t = Z + \int_0^t b(X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s)\ dB_s \tag{7.1}$$

ou de l'EDS non homogène

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\ dB_s \tag{7.2}$$

le triplet $(X, B, (\mathcal{F}_t))$ où
(i) X est $\mathcal{F}_t^{Z,B}$-adaptée ; où $\mathcal{F}_t^{Z,B}$ est la filtration brownienne de B augmentée de la tribu engendrée par Z ;
(ii) (X, B) vérifie (7.1) ou (7.2).

Définition 7.2 *Étant donnés* b *et* σ *des fonctions mesurables localement bornées. On appelle* solution faible *de l'EDS (7.1) ou (7.2) un triplet* $(\widetilde{X}, \widetilde{B}, (\mathcal{H}_t))$ *sur un espace* $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathbb{P}})$ *où*
(i) $\widetilde{B}$ *est un* $\mathcal{H}_t$*-Mouvement Brownien ;*
(ii) $(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ *vérifient (7.1) ou (7.2).*

Remarque 1. On pourra toujours prendre $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^{\widetilde{X},\widetilde{B}}$ la filtration engendrée par $(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)$.

Remarque 2. Une solution forte est bien entendu une solution faible.

Remarque 3. Par contre ce n'est pas parce-que qu'un (X, B) vérifie (7.1) ou (7.2) que X est $\mathcal{F}_t^B$-adapté. L'exemple suivant, dû à Tanaka, offre un contre exemple :
Soit W_t un M.B.S. On pose

$$\beta_t = \int_0^t \mathrm{sign}(W_s)\ dW_s$$

où $\mathrm{sign}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\mathrm{sign}(x) = -1$ si $x \leq 0$.
Le processus β_t est une martingale locale (intégrale stochastique d'un processus de $\Pi_2(W)$) et de plus $\langle \beta \rangle_t = \int_0^t \mathrm{sign}(W_s)^2\ d\langle W \rangle_s = t$. Donc par le Théorème de Lévy β_t est un $\mathcal{F}_t^W$-mouvement Brownien.
D'autre part la propriété d'associativité donne

$$\int_0^t \mathrm{sign}(W_s)\ d\beta_s = \int_0^t \mathrm{sign}(W_s)\ d\left(\int_0^s \mathrm{sign}(W_u)\ dW_u\right) = \int_0^t \mathrm{sign}(W_s)^2\ dW_s = W_t$$

ce qui montre que $(W, \beta, \mathcal{F}_t)$ est solution de l'EDS homogène

$$W_t = \int_0^t \sigma(W_s)\ d\beta_s$$

avec $\sigma(x) = \mathrm{sign}(x)$ et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{W,\beta}$.
Cependant ce n'est pas une solution forte : la formule de Tanaka donne

$$|W_t| - L_t = \int_0^t \mathrm{sign}(W_s)\ dW_s = \beta_t.$$

Or on sait (Corollaire 3.1 chapitre 6) que

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(a)\ da = \int_0^t \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(W_s)\ d\langle W \rangle_s = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(|W_s|)\ ds$$

de plus par la continuité conjointe de $(a, t) \to L_t^a = L^a(W)_t$ on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(|W_s|)\ ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} L_t^a\ da = L_t$$

donc L_t est $\mathcal{F}^{|W|}$-mesurable et par suite $\beta_t = |W_t| - L_t$ est mesurable par rapport à la filtration générée par $|W_t|$.
Or W_t n'est évidement pas adapté à la filtration générée par $|W_t|$. Donc W n'est pas $\mathcal{F}^\beta$ adaptée donc il ne s'agit pas d'une solution forte.

Comme dans le cas déterministe lorsque l'on a une solution on souhaite savoir si elle est unique. Pour les EDS il y a plusieurs notions d'unicité. Celle qui va nous intéresser est celle de l'*unicité trajectorielle.*

Définition 7.3 *On dit qu'il y a* unicité trajectorielle *des solutions de (7.1) si étant donné* $(X_t, B_t, \mathcal{F}_t)$ *et* $(X'_t, B_t, \mathcal{F}'_t)$ *deux solutions de (7.1) avec* $X_0 = X'_0 = x$ *pour le même mouvement brownien* B_t *alors avec probabilité 1 on a* $X_t = X'_t$ *pour tout* $t \geq 0$.
La définition dans le cas non homogène est similaire.

Remarque : Dans l'exemple de Tanaka ci dessus on n'a pas unicité trajectorielle. En effet, on a vu que $(W, \beta, \mathcal{F}_t^{W,\beta})$ est solution de l'EDS homogène

$$X_t = \int_0^t \text{sign}(X_s)\ dB_s.$$

On va montrer que $(-W, \beta, \mathcal{F}_t^{W,\beta})$ est également solution. Observons que $\text{sign}(-x) = -\text{sign}(x)$ pour tout $x \neq 0$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \text{sign}(-W_s)\ d\beta_s &= -\int_0^t \text{sign}(W_s)\ d\beta_s + 2\int_0^t \mathbf{1}_{\{W_s=0\}}\ d\beta_s \\ &= -W_t + 2\int_0^t \mathbf{1}_{\{W_s=0\}}\ d\beta_s\end{aligned}$$

pour conclure il suffit d'observer que par l'Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{W_s=0\}}\ d\beta_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{W_s=0\}}\ ds\right) = 0.$$

7.2 Théorèmes d'Itô

On va donner un critère d'existence et unicité pour les solutions (fortes) de (7.1) ou (7.2). On va l'énoncé dans les cas homogène puis non homogène.

Théorème 7.1 *d'existence et unicité d'Itô, cas homogène.*
On suppose que les coefficients de (7.1) vérifient : il existe $K < \infty$ *tel que*

$$\begin{aligned}|b_i(x) - b_i(y)| &\leq K\|x - y\|; \\ |\sigma_{ij}(x) - \sigma_{i,j}(y)| &\leq K\|x - y\|\end{aligned}$$

alors l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s)\ dB_s$$

admet une solution forte, unique trajectoriellement.

Pour le cas non homogène

Théorème 7.2 *d'existence et unicité d'Itô, cas non homogène.*
On suppose que les coefficients de (7.2) vérifient : pour tous $i \in \{1, ..., d\}, j \in \{1, ..., m\}, x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $0 < T < \infty$, $\exists K_T > 0$, $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \max(|b_i(t,0)|, |\sigma_{ij}(t,0)|) &\leq K_T \\ |b_i(t,x) - b_i(t,y)| &\leq K_T \|x - y\|; \\ |\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y)| &\leq K_T \|x - y\| \end{aligned}$$

alors l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\ dB_s$$

admet une solution forte, unique trajectoriellement.

7.2.1 Existence

La preuve de l'existence de la solution est assez technique. Elle suit de façon assez analogue la méthode itérative de Picard, pour l'existence de solution dans le cas déterministe ($\sigma \equiv 0$). Nous indiquons simplement les étapes de cette preuve dans le cas homogène en dimension 1 (le cas non homogène et/ou de dimension plus grande est similaire mais plus pénible à écrire).
On construit une solution par approximations successives :
on commence par poser initialement $X_s^0 \equiv x$ et on définit pour tout $t \geq 0$ le processus $\widetilde{X}_t^0$ par

$$\widetilde{X}_t^0 = x + \int_0^t b(x)\ ds + \int_0^t \sigma(x)\ dB_s.$$

On pose alors $X_s^1 = \widetilde{X}_s^0$ pour tout $s \geq 0$ et on définit pour tout $t \geq 0$ le processus $\widetilde{X}_t^1$ par

$$\widetilde{X}_t^1 = x + \int_0^t b(X_s^1)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s^1)\ dB_s.$$

Et ainsi de suite : on se sert du processus X^n comme "entrée" pour les arguments des coefficients b et σ de l'EDS et on observe la "sortie" $\widetilde{X}^n$

$$\widetilde{X}_t^n = x + \int_0^t b(X_s^n)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s^n)\ dB_s.$$

puis on itère par

$$X_s^{n+1} = \widetilde{X}_s^n \text{ pour tous } s \geq 0$$

pour tous $n \geq 0$.
Ce qu'il faut vérifier c'est que cette méthode donne effectivement une solution forte de l'EDS homogène.
On peut commencer par observer que pour tout $n \geq 0$ le processus X_t^n est $\mathcal{F}_t^B$-adapté.
Donc la solution si elle existe sera bien une solution forte.
Première étape Estimation de base.
On admettra le

Lemme 7.1 *Soit S un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt et soit $T < \infty$. Avec les notations du théorème on pose $C = (4Td + 16d^2)K^2$. Alors*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge S} |\widetilde{Y}_t - \widetilde{Z}_t|^2\right) \leq 2\mathbb{E}|Y_0 - Z_0|^2 + C\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge S} |Y_s - Z_s|^2 \, ds\right)$$

Deuxième étape Convergence p.s. du schéma d'approximation.

On pose $\Delta_n(t) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t^{n-1}|^2\right)$ l'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t^{n-1}| > 2^{-n}\right) \leq 2^{2n}\Delta_n(T)$$

Par définition du schéma $X^{n+1} = \widetilde{X}^n$ donc le Lemme antérieur implique la relation récursive

$$\Delta_{n+1}(T) \leq C\int_0^T \Delta_n(s) \, ds.$$

Or on a

$$|X_s^1 - X_s^0|^2 \leq 2(|b(x)s|^2 + |\sigma(x)B_s|^2).$$

En utilisant la relation d'échelle sur le Brownien on a en loi

$$\sup_{0\leq s\leq t} |\sigma(x)B_s| = t^{1/2} \sup_{0\leq s\leq 1} |\sigma(x)B_s|$$

par suite

$$\Delta_1(t) \leq C'(t + t^2).$$

En combinant ceci avec ce qui précède on obtient par induction que

$$\Delta_n(T) \leq C^{n-1}C'\left(\frac{t^n}{n!} + \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Ceci entraîne que $\sum 2^{2n}\Delta_n(T)$ est sommable donc par Borel-Cantelli on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t^{n-1}| > 2^{-n} \text{ infiniment souvent}\right) = 0$$

Enfin comme $\sum_n 2^{-n} < \infty$ on a que $X_t^n \to X_t^\infty$ presque sûrement uniformément sur $[0, T]$.

Troisième étape Convergence dans L^2 du schéma d'approximation.

Le résultat suivant (exercice) est une conséquence de l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_2$.

Lemme 7.2 *Pour tous $0 \leq m < n \leq \infty$*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t^m|^2\right) \leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} \Delta_k(T)^{1/2}\right)^2$$

On laisse ensuite $m \to \infty$ et par l'étape précédente et Fatou on obtient bien que $X_t^n \to X_t^\infty$ dans L^2 uniformément sur $[0,T]$.

Quatrième étape La limite X^∞ est solution.
On pose $Y_t = X_t^n$ et $Z_t = X_t^\infty$. Le Lemme d'approximation (première étape) donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-\widetilde{X}_t^\infty|^2\right) &\le C\mathbb{E}\left(\int_0^T |X_s^n - X_s^\infty|^2\, ds\right)\\ &\le CT\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T}|X_s^n-X_s^\infty|^2\right)\to 0\end{aligned}$$

donc $\widetilde{X}_t^\infty = \lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t^\infty$.

7.2.2 Unicité

Pour montrer l'unicité nous aurons besoin d'un résultat classique d'analyse fonctionnelle dû à T. Grönwall (1877-1932).

Lemme 7.3 *de Grönwall*
Soit f une fonction borélienne telle que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t f(s)\, ds \tag{7.3}$$

où $\alpha(.)$ est une fonction intégrable sur $[0,t]$ et $\beta \ge 0$.
Alors $\forall t \in [0,T]$

$$f(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)}\, ds. \tag{7.4}$$

En particulier si $\alpha(.) \equiv \alpha$ est constante

$$f(t) \le \alpha(1+e^{\beta t}).$$

Preuve : On pose $u(t) = e^{-\beta t}\int_0^t f(s)\, ds$. Cette fonction est dérivable et

$$u'(t) = e^{-\beta t}\left(f(t) - \beta\int_0^t f(s)\, ds\right) \le e^{-\beta t}\alpha(t)$$

pour tout $t \in [0,T]$ par hypothèse.
Mais $u(t) = \int_0^t u'(s)\, ds$ donc $u(t) \le \int_0^t \alpha(s)e^{-\beta s}\, ds$ d'où

$$\int_0^t f(s)\, ds \le \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)}\, ds.$$

Le résultat s'obtient alors en utilisant cette inégalité dans le deuxième membre de (7.3).♯

Preuve de l'unicité pour le théorème d'Itô : Pour plus de simplicité on montre le résultat en dimension 1.
Soient $(X_t, B_t, \mathcal{F}_t)$ et $(Y_t, B_t, \mathcal{F}_t)$ deux solutions fortes de (7.2) avec $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la suite de T.A. $\tau_n := \inf\{t > 0 : |X_t| > n \text{ ou } |Y_t| > n\}$. On a

$\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$.
Soient $T > 0$ et $t \in [0, T]$ on pose

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t\wedge\tau_n} |Y_s - X_s|^2\right).$$

On a

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \left|\int_0^u [b(s,Y_s) - b(s,X_s)]\ ds + \int_0^u [\sigma(s,Y_s) - \sigma(s,X_s)]\ dB_s\right|^2\right)$$

et en utilisant que $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ et $\sup(|x+y|) \le \sup|x| + \sup|y|$ on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) \ &\le\ 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \left|\int_0^u [b(s,Y_s) - b(s,X_s)]\ ds\right|^2\right) && (7.5)\\ &\quad +2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \left|\int_0^u [\sigma(s,Y_s) - \sigma(s,X_s)]\ dB_s\right|^2\right) && (7.6) \end{aligned}$$

On va traiter chacun des termes (7.5) et (7.6).
Par hypothèse on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \left|\int_0^u [b(s,Y_s) - b(s,X_s)]\ ds\right|^2\right) \le K_T^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \left[\int_0^u |Y_s - X_s|\ ds\right]^2\right)$$

Et par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} &\le\ K_T^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n}\left(\int_0^u 1^2\ ds\right)\int_0^u |Y_s - X_s|^2\ ds\right)\\ &\le\ TK_T^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n}\int_0^u |Y_s - X_s|^2\ ds\right)\\ &\le\ TK_T^2\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} |Y_s - X_s|^2\ ds\right) \end{aligned}$$

Pour borner (7.6) on pose

$$M_t = \int_0^t [\sigma(s,Y_s) - \sigma(s,X_s)]\ dB_s$$

et $\sigma_n = \inf\{t > 0 : |M_t| > n\} \wedge \tau_n$ on utilise alors l'inégalité maximale de Doob dans L^2 sur la martingale M_t :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\sigma_n} M_u^2\right) \le 4\mathbb{E}(M_{t\wedge\sigma_n}^2)$$

Or de part le Théorème 5.6 chapitre 3 on a pour tout $H \in \Pi_3(B)$

$$\langle (H\cdot B)\rangle_v = \int_0^v H_s^2\ ds$$

et par la propriété de martingale locale

$$\mathbb{E}((H\cdot B)_v^2) = \mathbb{E}(\langle (H\cdot B)\rangle_v) = \mathbb{E}(\int_0^v H_s^2\ ds)$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\sigma_n} M_u^2\right) &\le 4\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\sigma_n} |\sigma(s,Y_s)-\sigma(s,X_s)|^2\, ds\right)\\ &\le 4\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} |\sigma(s,Y_s)-\sigma(s,X_s)|^2\, ds\right).\end{aligned}$$

Et par hypothèse

$$\le \quad 4K_T^2\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} |Y_s-X_s|^2\, ds\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\le 2(T+4)K_T^2\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} |Y_s-X_s|^2\, ds\right)\\ &= 2(T+4)K_T^2\mathbb{E}\left(\int_0^{t} |Y_{s\wedge\tau_n}-X_{s\wedge\tau_n}|^2\, ds\right)\end{aligned}$$

et par Tonnelli

$$\begin{aligned}&= \quad 2(T+4)K_T^2\int_0^t \mathbb{E}\left(|Y_{s\wedge\tau_n}-X_{s\wedge\tau_n}|^2\right)\, ds\\ &\le \quad 2(T+4)K_T^2\int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{0\le u\le s\wedge\tau_n}|Y_u-X_u|^2\right)\, ds\end{aligned}$$

On vient donc de montrer pour tout $t\in[0,T]$ que

$$\varphi(t)\le 2(T+4)K_T^2\int_0^t \varphi(s)\, ds$$

Donc en appliquant le Lemme de Grønwall avec $\alpha(t)\equiv 0$ et $\beta = 2(T+4)K_T^2$ on obtient $\varphi(t)\equiv 0$. Ce qui entraîne qu'avec probabilité 1, $X_s = Y_s$ pour tout $s>0$. $\sharp$

7.2.3 Autre formulation

Avec des hypothèses plus restrictives on peut montrer le résultat suivant que l'on admettra (cf. Karatzas-Shreve).

Proposition 7.1 *Sous les hypothèses d'existence et unicité si de plus on suppose qu'il existe $L<\infty$ tel que*

$$\|b(t,x)\|^2+\|\sigma(t,x)\|^2\le L(1+|x|^2)$$

où $|b|^2=\sum_{i=1}^d |b_i|^2$ et $\|\sigma\|^2=\mathrm{tr}(\sigma\sigma')$ où σ' est la transposée de σ ;
alors la solution X de (7.2) vérifie : pour tout $t\in[0,T]$, pour tout $m\in\mathbb{N}$ il existe des constantes $C>0, C_1>0, C_2>0$ ne dépendant que de T, K_T, L et m telles que
(i) $\mathbb{E}|X_t|^{2m}\le(1+|x|^{2m})e^{C_1t}\quad \forall 0\le t\le T$
(ii) $\mathbb{E}|X_t-X_s|^{2m}\le C_2(1+|x|^{2m})(t-s)^m\quad \forall 0\le s\le t\le T$
(ii) $\mathbb{E}(\sup_{0\le s\le T}|X_s|^{2m})\le C(1+|x|^{2m})e^{CT}$.

Les conclusions des Théorèmes d'Itô et de la Proposition 7.1 restent valables si l'on suppose $X_0=Z$ indépendante de la filtration brownienne et pour la Proposition 7.1 il faut de plus que $\mathbb{E}(|Z|^{2m})<+\infty$.

7.3 Exemples et contre exemples

7.3.1 Modèle de Black et Scholes

On verra dans la section suivante que $S_t = x_0\exp\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t\right]$ est (l'unique) solution de

$$dX_t=\mu X_t\, dt+\sigma X_t\, dB_t.$$

avec $X_0 = x_0$. On vérifie aisément que les conditions du Théorème d'Itô sont vérifiées. Ici $b(t,x) = \mu x$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$ qui sont Lipchitziennes de constantes respectives $|\mu|$ et $|\sigma|$. De plus comme $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 = (\mu^2+\sigma^2)x^2$ les conclusions de la Proposition 7.1 sont valables.
On remarque qu'on peut écrire $S_t = e^{\mu t} M_t$ où $M_t = x_0 \exp\left[\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]$ est une martingale. On voit donc que S_t n'est pas une martingale (ni une martingale locale) à cause du terme multiplicatif $e^{\mu t}$ dépendant de t.

7.3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On peut voir en exercice les propriétés décrites dans la

Proposition 7.2 *La solution forte X de l'EDS suivante*

$$\begin{cases} dX_t &= -\alpha X_t \, dt + \beta \, dW_t \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\alpha, \beta \in]0,+\infty[$ est un processus gaussien appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(x_0 + \beta \int_0^t e^{\alpha s} \, dW_s\right).$$

De plus on a $\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}$ et $\mathrm{Var}(X_t) = \beta^2(1-e^{-2\alpha t})/(2\alpha)$.

Remarque : On notera que $\mathbb{E}(X_t) \to 0$ et $\mathrm{Var}(X_t) \to \beta^2/(2\alpha)$ quand $t \to \infty$ indiquant que le processus X_t a tendance à rester confiné (pas comme le mouvement brownien).
Les coefficients de l'équation étant simples les conditions du Théorème d'Itô et de la proposition 1.6 sont très facilement vérifiées. Cependant, toujours à cause du terme multiplicatif dépendant de t, ce processus n'est pas une martingale (locale).
L'équation précédente est un cas particulier des équation différentielles stochastiques linéaires.

7.3.3 EDS Linéaires

Définition 7.4 *Soit W_t un mouvement Brownien de dimension m. On appelle EDS* linéaire *une équation du type*

$$\begin{aligned} dX_t &= (A(t)X_t + a(t)) \, dt + \sigma(t) \, dW(t); \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{7.7}$$

où $A(t)$ est une matrice $d \times d$, $a(t) \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma(t)$ est une matrice $d \times m$. On suppose $A(t), a(t)$ et $\sigma(t)$ mesurables et localement bornées.

Définition 7.5 *On appelle* équation fondamentale *de (7.7) l'equation matricielle :*

$$\begin{cases} d\Phi(t) = A(t)\Phi(t) \, dt \\ \Phi(0) = I_{(d)} \end{cases}$$

Sa solution $\Phi(t)$ *est appelée* matrice fondamentale *du système d'équations différentielles ordinaire*

$$dF(t) = (A(t)F(t) + a(t))\ dt. \tag{7.8}$$

La solution de (7.8) est représentée à l'aide de $\Phi(t)$ *par*

$$F(t) = \Phi(t)\left(F(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)\ ds\right).$$

Dans le **cas homogène :** $A(t) \equiv A$ alors $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} = \exp(At)$. D'où

$$F(t) = \exp(At)F(0) + \int_0^t \exp(A(t-s))a(s)\ ds.$$

De part les hypothèses sur les coefficients on voit qu'il existe une unique solution forte de (7.7). On peut expliciter la solution en fonction de Φ.

Théorème 7.3 *Avec les notations et les hypothèses précédentes l'EDS linéaire*

$$\begin{aligned} &dX_t = (A(t)X_t + a(t))\ dt + \sigma(t)dW_t \\ &X_0 = x_0 \end{aligned}$$

a pour solution sur $[0, T]$

$$X_t = \Phi(t)\left(x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)\ ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\ dW_s\right)$$

où $\Phi(t)$ *est la matrice fondamentale de (7.8).*

Preuve : On pose

$$Y_t = x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)\ ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)\ dW_s$$

et $X_t = \Phi(t)Y_t$. Comme Φ est déterministe, localement a variation borné on a $\langle \Phi, Y\rangle_t = 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc par la formule d'IPP on a

$$\begin{aligned} dX_t &= \Phi(t)\ dY_t + (d\Phi(t))Y_t + d\langle \Phi, Y\rangle_t \\ &= \Phi(t)\left[\Phi^{-1}(t)a(t)\ dt + \Phi^{-1}(t)\sigma(t)\ dW_t\right] + A(t)\Phi(t)\ dt\ Y_t \\ &= (A(t)X_t + a(t))\ \ dt + \sigma(t)\ dW_t. \end{aligned}$$

♯

Corollaire 7.1 *Pour* $d = m = 1$ *le processus*

$$X_t = \varphi(t)\left(x_0 + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\varphi(s)}\ dW_s\right)$$

est solution forte de l'EDS linéaire

$$\begin{cases} dX_t &= \alpha(t)X_t\ dt + \sigma(t)\ dW_t \\ X_0 &= x_0 \end{cases} \tag{7.9}$$

où $\alpha, \sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *sont continues et localement bornées et* φ *est solution de l'équation différentielle ordinaire (déterministe)*

$$\begin{cases} d\varphi(t) &= \alpha(t)\varphi(t)\ dt \\ \varphi(0) &= 1. \end{cases}$$

Remarque : Il est important de noter que X_t est un processus gaussien. De plus on a $\mathbb{E}(X_t) = \varphi(t)x_0$ et $\mathbf{Cov}(X_t, X_u) = \varphi(t)\varphi(u)\int_0^{t\wedge u}(\varphi^{-1}(s)\sigma(s))^2\, ds$.

7.3.4 Processus de Bessel

Soit W_t un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien de dimension $d > 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on pose $f(x) = \|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$ et

$$X_t = \|W_t\|.$$

Pour $d \geq 2$ la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est $\mathcal{C}^2$ en dehors du point $0 \in \mathbb{R}^d$. On pourra donc employer la formule d'Itô. Dans ce qui suit on note $f_{x_i} = \partial f / \partial x_i$. On a $f_{x_i}(x) = x_i\|x\|^{-1}$, $f_{x_i x_i}(x) = \|x\|^{-1} - x_i^2\|x\|^{-3}$ et $\Delta f(x) = (m-1)\|x\|^{-1}$. Par Itô on a

$$X_t - X_0 = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d-1}{\|W_s\|}\, ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{W_s^i}{\|W_s\|}\, dW_s^i$$

On pose

$$B_t = \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{W_s^i}{\|W_s\|}\, dW_s^i.$$

Le processus B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale (somme finie d'intégrales stochastiques). De plus

$$\langle B\rangle_t = \int_0^t \sum_{i=1}^m \frac{(W_s^i)^2}{\|W_s\|^2}\, ds = t.$$

Par le théorème de Lévy on en déduit que B_t est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard. On peut également remarquer que $X_t = \|W_t\|$ est bien évidement $\mathcal{F}_t^B$ mesurable. On en tire que $(X_t, B_t, \mathcal{F}_t^B)$ est une solution forte de l'EDS

$$dX_t = \frac{d-1}{2X_t}\, ds + dB_t$$

La fonction $b(t,x) = (d-1)/(2x)$ n'est pas Lipchitzienne ni localement bornée au voisinage de 0 donc on ne peut pas utiliser le théorème d'Itô. Néanmoins on peut montrer qu'il y a unicité de la solution.

De façon générale on définit le processus de Bessel comme l'unique solution forte de l'EDS

$$dX_t = \frac{\gamma}{2X_t}\, dt + dB_t$$

avec $X_0 = x$ où $\gamma > -1$ est appelé l'index du processus de Bessel.
Ce qui précède montre que $\|W_t\|$ est un processus de Bessel d'index $d-1$.

7.3.5 Signal

$$dX_t = \sin(X_t)\, dt + \cos(X_t)\, dB_t$$

avec $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Les fonctions satisfont toutes les conditions des théorèmes d'existence et unicité d'Itô. Cependant on ne sait pas résoudre formellement cette équation. D'où l'intérêt de méthodes numériques.

7.3.6 Diffusion ramifiée de Feller

On veut $X_t \geq 0$ et tele que

$$dX_t = \beta X_t \, dt + \sigma \sqrt{X_t} \, dB_t$$

Mais $\sigma(t, x) = \sigma\sqrt{x}$ n'est pas Lipchitzienne au voisinage de 0 et cette fois il n'existe pas de solution forte.

7.4 Application au modèle de Black et Scholes

7.4.1 Évolution des cours

Dans le modèle proposé par Black et Scholes un portefeuille financier consiste en la détention de deux actifs
(1) Un actif sans risque, dont le prix à l'instant t est noté S_t^0 obtenu en résolvant l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 \, dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases}$$

Autrement dit $S_t^0 = e^{rt}$ pour tout $t \geq 0$. La constante $r > 0$ est le taux d'intérêt instantané.
(2) Un actif risqué, dont le prix à l'instant t est noté S_t obtenu en résolvant l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t \\ S_0 = Z \end{cases}$$

sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$ où $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration brownienne, Z est une v.a. de carré intégrable et (W_t) est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien standard (M.B.S.) indépendant de Z.
On a vu que

$$S_t = Z \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right]$$

en est (l'unique) solution mais n'est pas une martingale.

7.4.2 Stratégie autofinancée

Définition 7.6 *Une* stratégie autofinancée *est un processus continu $\phi = ((H_t^0, H_t))$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$, $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que :*
(i) H_t^0 représente la quantité d'actifs sans risque *détenus par l'investisseur à l'instant t et H_t représente* la quantité d'actifs risqués *détenus par l'investisseur à l'instant t.*
(ii) Le processus (H_t^0, H_t) vérifie

$$\int_0^T |H_t^0| \, dt < +\infty, \quad \int_0^T |H_t|^2 \, dt < +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

(iii) Le processus (V_t) valeur du portefeuille *défini par*

$$V_t(\phi) := H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

satisfait la condition d'autofinancement *:*

$$dV_t(\phi) = H_t^0 \ dS_t^0 + H_t \ dS_t \quad \forall t \in [0,T].$$

On définit et on note $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ *le* cours actualisé de l'actif risqué.

Proposition 7.3 *Soit* $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté de* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant les points i) et ii) de la definition précédente. On pose* $V_t(\phi) := H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ *et* $\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi)$*. Alors* ϕ *est une stratégie autofinancée si et seulement si :*

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s \ d\widetilde{S}_s \tag{7.10}$$

pour tout $t \in [0,T]$*.*

Preuve : Si on a (7.10) alors

$$d\widetilde{V}_t(\phi) = H_t \ d\widetilde{S}_t.$$

Or $d\widetilde{V}_t(\phi) = -re^{-rt}V_t(\phi) \ dt + e^{-rt} \ dV_t(\phi)$ et $d\widetilde{S}_t = -re^{-rt}S_t \ dt + e^{-rt} \ dS_t$ d'où

$$dV_t(\phi) = e^{rt}\left(-re^{-rt}H_tS_t \ dt + e^{-rt}H_t \ dS_t + re^{-rt}V_t(\phi) \ dt\right)$$

et en utilisant que $V_t(\phi) := H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ on obtient la condition d'autofinancement

$$dV_t(\phi) = rH_t^0 S_t^0 \ dt + H_t \ dS_t = H_t^0 \ dS_t^0 + H_t \ dS_t.$$

La réciproque est analogue.

7.4.3 Changement de mesure

On va montrer qu'il existe une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle le prix de l'actif actualisé $\widetilde{S}_t$ est une martingale.
On a

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t \ dt + e^{-rt} \ dS_t \\ &= (\mu - r)\widetilde{S}_t \ dt + \sigma\widetilde{S}_t \ dW_t. \end{aligned} \tag{7.11}$$

En s'inspirant de la section qui précède l'étude du modèle de B.& S., on pose

$$M_t := -\int_0^t \frac{(\mu - r)\widetilde{S}_s}{\sigma\widetilde{S}_s} \ dW_s = -\frac{\mu - r}{\sigma}W_t.$$

Il s'agit bien donc d'une martingale telle que

$$\langle M\rangle_t = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 \langle W\rangle_t = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t.$$

La martingale exponentielle associée à M

$$Z_t^M = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right) = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t\right)$$

est donc bien une martingale et par Girsanov

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t -\frac{\mu - r}{\sigma}\, ds = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

est un M.B.S. sous la mesure martingale $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. De plus (7.11) est équivalente à

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, d\widetilde{W}_t \tag{7.12}$$

avec $\widetilde{S}_0 = Z$. Sa solution

$$\widetilde{S}_t = Z \exp\left(\sigma \widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.

7.4.4 Pricing

Définition 7.7 *Une* option européenne *est une variable aléatoire h, $\mathcal{F}_T$ mesurable (où $T > 0$ figure l'échéance de l'option) qui représente ce que recevra l'investisseur à l'instant T.*

Remarque : On prendra souvent h de la forme $f(S_T)$. Pour un *call* européen on a $f(x) = (x - K)^+$ et pour un *put* on a $f(x) = (K - x)^+)$.

Définition 7.8 *Une Stratégie $\phi = (H_t^0, H_t)$ est dite* admissible *si elle est autofinancée et si la valeur actualisée du portefeuille associé $\widetilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t$ est $\forall s \in [0, T]$ une variable aléatoire positive de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.*

Définition 7.9 *On dit qu'une option h est* simulable *s'il existe une stratégie admissible ϕ telle que*

$$V_T(\phi) = h.$$

Remarque : Vu que $\widetilde{V}_T(\phi)$ est supposé de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ il en est de même de $V_T(\phi)$. Donc une condition nécessaire pour que h soit simulable est que h est de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.

Définition 7.10 *On définit* le prix *à l'instant t d'une option simulable h (*i.e. *le prix du droit à recevoir h à l'échéance) comme $V_t(\phi)$ la valeur au temps t du portefeuille associé à à la stratégie ϕ simulant l'option h.*

Théorème 7.4 *Dans le modèle de Black et Scholes, toute option définie par une v.a. h, positive, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ est simulable.*
De plus son prix à l'instant t est donné par

$$V_t(\phi) = \widetilde{\mathbb{E}}_T\left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t\right). \tag{7.13}$$

Preuve : Étape 1. On montre que s'il existe une stratégie admissible $\phi = (H_t^0, H_t)$ simulant h alors $V_t(\phi)$ satisfait (7.13).
À l'instant t on a

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Par hypothèse $V_T(\phi) = h$. Soit $\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ la valeur actualisée du portefeuille à l'instant t. On a

$$\widetilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t.$$

De plus par la Proposition 7.3 on a

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s \, d\widetilde{S}_s = V_0(\phi) + \int_0^t H_s \sigma \widetilde{S}_s \, d\widetilde{W}_s$$

la deuxième égalité étant due à (7.12).
Ceci montre que $\widetilde{V}_t(\phi)$ s'exprime comme une intégrale stochastique par rapport à $\widetilde{W}_t$ sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. Il s'agit donc d'une martingale locale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. De par l'hypothèse d'admissibilité de ϕ on a que $\sup_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t(\phi)$ est de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. On en conclut que $\widetilde{V}_t(\phi)$ est une martingale de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. D'où

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \widetilde{\mathbb{E}}_T(\widetilde{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_t);$$

et

$$V_t(\phi) = \widetilde{\mathbb{E}}_T \left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

Étape 2. On montre qu'il existe ϕ admissible simulant h.
Il faut donc trouver des processus (H_t^0) et (H_t) définissant une stratégie admissible et tels que

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = \widetilde{\mathbb{E}}_T \left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

Or sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ le processus $M_t := \widetilde{\mathbb{E}}_T \left(e^{-rT} h | \mathcal{F}_t \right)$ est de façon évidente une martingale. De plus M_t est de carré intégrable.
La filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée à (W_t) est aussi celle associée à $(\widetilde{W}_t)$. Donc par le Théorème 3.3 chapitre 4 de représentation des martingale brownienne il existe $(K_t)_{0\leq t\leq T} \in \Pi_2(\widetilde{W})$ et

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s \, d\widetilde{W}_s$$

$\widetilde{\mathbb{P}}_T$ presque sûrement.
On définit alors $\phi = (H_t^0, H_t)$ avec

$$H_t := \frac{K_t}{\sigma \widetilde{S}_t} \quad \text{et} \quad H_t^0 := M_t - H_t \widetilde{S}_t.$$

On a

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = M_t e^{rt} - H_t S_t + H_t S_t = M_t e^{rt}.$$

Donc

$$\widetilde{V}_t(\phi) = M_0 + \int_0^t K_s \, d\widetilde{W}_s = V_0 + \int_0^t \frac{K_t}{\sigma \widetilde{S}_t} \, d\widetilde{S}_t = V_0 + \int_0^t H_s \, d\widetilde{S}_t.$$

On en déduit par la Proposition 7.3 que ϕ est autofinancée. De plus

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = \widetilde{\mathbb{E}}_T\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right)$$

donc est une v.a. positive de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$: c.à.d. ϕ est admissible. Enfin

$$V_T(\phi) = \widetilde{\mathbb{E}}_T\left(h|\mathcal{F}_T\right) = h$$

donc ϕ simule h.

7.4.5 Application au pricing d'un call

Lorsque h est de la forme $h = f(S_T)$ on peut pousser un peut plus loin le calcul. On a

$$V_t(\phi) = \widetilde{\mathbb{E}}_T\left(e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\exp\left[\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right]\right)\Big|\mathcal{F}_t\right).$$

Or S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ de loi $\mathcal{N}(0, T-t)$ sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ donc de par les propriétés de l'espérance conditionnelle on a la

Proposition 6.8
Soit donc $h = f(S_T)$, on a

$$V_t = F(t, S_t)$$

où

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbb{R}} f\left(xe^{\sigma y+(r-\sigma^2/2)(T-t)}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\,dy.$$

Dans le cas d'un call $f(x) = (x-K)^+$ on peut encore plus pousser les calculs

$$F(t,x) = \mathbb{E}\left(x\exp\left(\sigma\sqrt{T-t}Y - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right) - Ke^{-r(T-t)}\right)^+$$

où Y est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
En posant

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

on obtient

$$F(t,x) = x\Psi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Psi(d_2)$$

où $\Psi(.)$ est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Dans le cas d'un put $f(x) = (K-x)^+$ on obtient

$$F(t,x) = Ke^{-r(T-t)}\Psi(-d_2) - x\Psi(-d_1).$$

Remarque : Le seul facteur non observable est la quantité σ : la volatilité. Il est alors nécessaire d'utiliser des outils statistique pour pouvoir l'estimer.

7.4.6 Couverture des calls et des puts

Dans le cas d'un call européen $h = (S_T - K)^+$ on peut trouver explicitement (sans avoir recours au théorème de représentation des martingales browniennes) une stratégie admissible simulant h. Celle-ci est donnée par la

Proposition 7.4 *La stratégie définie par*

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

et

$$H_t^0 = e^{-rt} F(t, S_t) - \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) e^{-rt} S_t.$$

est une stratégie admissible simulant $h = (S_T - K)^+$.

Preuve : Exercice.

7.5 EDS générales

Définition 7.11 *Un opérateur* $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ *(processus càd-làg, adaptés) est dit Lipschitzien si pour tous processus* $X, Y \in \mathbb{D}^n$ *on a*
(i) Pour tout temps d'arrêt T, $X^{T^-} = Y^{T^-}$ *implique* $F(X)^{T^-} = F(Y)^{T^-}$ *;*
(ii) Il existe un processus croissant (fini) K *tel que presque sûrement pour tous* $t \geq 0$

$$|F(X)_t - F(Y)_t| \leq K_t \|X - Y\|_t$$

Théorème 7.5 *Etant donnés* $Z = (Z^1, ..., Z^d)$, $Z_0 = 0$ *un vecteur de semimartingales ,* J^i *des processus de* $\mathbb{D}$ *et* F_j^i *des opérateurs Lipschitziens alors le système d'équations*

$$X_t^i = J_t^i + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t F_j^i(X)_{s-} \, dZ_s^j$$

a une unique solution dans $\mathbb{D}^n$. *De plus si* (J^i) *est un vecteur de semimartingale alors la solution l'est aussi.*

Chapitre 8

Diffusions et interprétation probabiliste d'EDP

Contents

8.1 Diffusions

Soit $T > 0$ fixé. Dans cette partie on s'intéressera aux solutions fortes sur $[0, T]$ de

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)\ dt + g(t, X_t)\ dW_t \\ X_0 = Z \end{cases} \tag{8.1}$$

Où Z est de carré intégrable, indépendante de la filtration $\mathcal{F}_t$, f et g sont mesurables et localement bornées. De plus pour garantir l'existence et l'unicité de solution forte on supposera $\exists K_T < \infty$ tel que $\forall t \in [0, T]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K_T \|x - y\|; \tag{8.2}$$

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq K_T \|x - y\|. \tag{8.3}$$

De plus on supposera pour garantir de bonnes conditions d'intégrabilité sur la solution (Proposition 1.6 chap 5) que $\exists L < \infty$ t.q. $\forall t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R}$

$$\|f(t, x)\|^2 + \|g(t, x)\|^2 \leq L(1 + |x|^2). \tag{8.4}$$

8.1.1 Propriété de Markov des Solutions d'E.D.S.

Définition 8.1 *On dit qu'un processus (X_t) vérifie la* propriété de Markov *par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ à laquelle il est adapté si pour toute fonction f mesurable, bornée et tous $0 \leq s \leq t$*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s).$$

Notation : Soit $s \in [0,T]$, on note $X_t^{s,x}$, $t \in [s,T]$ la solution de

$$\begin{aligned} &dX_t = f(t,X_t)\ dt + g(t,X_t)\ dW_t \quad \text{pour } t > s; \\ &X_s = s. \end{aligned}$$

C'est à dire que $X_t^{s,x}$ vérifie pour tout $t \in [s,T]$

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t f(u, X_u^{s,x})\ du + \int_s^t g(u, X_u^{s,x})\ dW_u. \tag{8.5}$$

En particulier on notera $X_t^x = X_t^{0,x}$.

Remarque :
On admettra que sous les conditions (8.2), (8.3) et (8.4) $(s,t,x) \mapsto X_t^{s,x}$ est continue en chacune des variables.

La propriété de Markov est une conséquence de la propriété suivante :

Lemme 8.1 *(propriété de flot)*
Sous les conditions (8.2), (8.3) et (8.4) décrites plus haut les solutions $(X_t^{s,x})_{t\in[s,T]}$, $s \in [0,T]$ de

$$\begin{cases} dX_t = f(t,X_t)\ dt + g(t,X_t)\ dW_t \quad \textit{pour } t > s \\ X_s = x \end{cases}$$

vérifient $\mathbb{P}$-p.s. pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$X_t^x := X_t^{0,x} = X_t^{s,X_s^x}$$

Idée de la preuve : Soit $s \in [0,T]$ et $X_t^{s,x}$, $t \in [s,T]$ vérifiant (8.5).
Par continuité de l'application

$$y \mapsto X_u^{s,y}$$

on déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$X_t^{s,y} = y + \int_s^t f(u, X_u^{s,y})\ du + \int_s^t g(u, X_u^{s,y})\ dW_u.$$

On peut donc conclure que X_t^{s,X_s^x}, $t \in [s,T]$ vérifie

$$\begin{aligned} &dX_t = f(t,X_t)\ dt + g(t,X_t)\ dW_t \quad \text{pour } t > s; \\ &X_s = X_s^x. \end{aligned}$$

Montrons que X_t^x, $t \in [s,T]$ est également solution.
En effet on a

$$\begin{aligned} X_t^x &= x + \int_0^t f(u, X_u^x)\, du + \int_0^t g(u, X_u^x)\, dW_u. \\ &= X_s^x + \int_s^t f(u, X_u^x)\, du + \int_s^t g(u, X_u^x)\, dW_u. \end{aligned}$$

De part l'unicité de la solution on doit donc avoir $X_t^{s,X_s^x} = X_t^x$ sur $t \in [s,T]$.

Le résultat suivant est une conséquence de la propriété de flot et de la propriété d'accroissement indépendant du Brownien (Preuve dans A. Friedman *Stochastic Differential Equations and Applications.* Academic Press 1975).

Théorème 8.1 *Sous les conditions antérieure la solution forte* (X_t) *de*

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)\, dt + g(t, X_t)\, dW_t \\ X_0 = Z \end{cases}$$

est un processus de Markov pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ *du mouvement Brownien. Plus précisément on a pour toute* $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *borélienne bornée, et pour tous* $0 \le s \le t$

$$\mathbb{E}\left[h(X_t)|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[h(X_t^{s,x})\right]\big|_{x=X_s} \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Remarque : Dans le cas homogène (f et g ne dépendent que de x) $X_t^{s,x}$ et X_{t-s}^x ont même loi et on a

$$\mathbb{E}\left[h(X_t)|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[h(X_{t-s}^x)\right]\big|_{x=X_s} \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Définition 8.2 *Un processus de Markov* X_t *solution de*
i) (8.1) est appelé diffusion non homogène *;*
ii) $dX_t = f(X_t)\, dt + g(X_t)\, dW_t$ *est appelé* diffusion homogène *;*
Si la fonction $g()$ *vérifie* $\exists K > 0$ *t.q.* $g() \ge K$ *alors la diffusion est dite* non dégénérée*.*

On peut généraliser (dixit Lamberton-Lapeyre) le résultat précédent à des fonctions des trajectoires de la diffusion après le temps s. Ce qui offre un outil de calcul pratique pour les modèles avec taux d'intérêt $r(.)$.

Théorème 8.2 *Soit* (X_t) *une solution forte de (8.1) et* $r(s,x)$ *une fonction mesurable positive. On a si* $t > s$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t r(u, X_u)\, du\right) h(X_t)\Big|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t r(u, X_u^{s,x})\, du\right) h(X_t^{s,x})\right]\Big|_{x=X_s}.$$

8.1.2 Générateur d'une diffusion

Diffusion homogène

Soit donc l'EDS

$$\begin{aligned} dX_t &= f(X_t)\ dt + g(X_t)\ dW_t \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

où f et g vérifient les conditions habituelles d'existence et unicité.

Définition 8.3 *À l'EDS (8.6) on associe l'opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définit par*

$$\mathcal{A}u(x) := f(x)u'(x) + \frac{1}{2}g^2(x)u''(x)$$

pour tous $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. L'opérateur $\mathcal{A}$ est appelé générateur *de la diffusion homogène $(X_t)_{0\le t\le T}$ solution de (8.6).*

Exemples :
1) Brownien : $X_t = W_t$ est solution de $dX_t = 1\ dW_t$ avec $X_0 = 0$. Son générateur s'écrit pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{A}u(x) = \frac{1}{2}u''(x).$$

2) Black et Scholves : Le générateur associé à la diffusion solution de

$$dX_t = \mu X_t\ dt + \sigma X_t\ dW_t$$

avec $X_0 = x_0$ est donné par

$$\mathcal{A}u(x) = \mu x u'(x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}u''(x);$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Proposition 8.1 *Le générateur $\mathcal{A}$ caractérise la diffusion $(X_t)_{0\le t\le T}$. De plus si X_t est solution de (8.6)*
(i) Pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$u(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}u(X_s)\ ds$$

est une martingale locale.
(ii) Pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{t\searrow 0} \mathbb{E}\left(\frac{1}{t}\left[u(X_t) - u(x_0)\right]\right) = \mathcal{A}u(x_0)$$

(iii)

$$\lim_{t\searrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}(X_t - x_0)\right] = f(x_0) \quad \textit{et} \quad \lim_{t\searrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}(X_t - x_0)^2\right] = g^2(x_0).$$

Preuve :
On pose $M_t = u(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}u(X_s)\ ds$. Par Itô on a

$$dM_t = u'(X_t)\ dX_t + \frac{1}{2}u''(x_t)d\langle X\rangle_t - \mathcal{A}u(X_t)\ dt.$$

Or $d\langle X\rangle_t = g^2(X_t)\ dt$ d'où

$$dM_t = u'(X_t)g(X_t)\ dW_t + \left(f(X_t)u'(X_t) + \frac{1}{2}g^2(X_t)u''(X_t) - \mathcal{A}u(X_t)\right) dt.$$

Le terme dans la parenthèse étant nul on a

$$M_t = u(x_0) + \int_0^t u'(X_s)g(X_s)\ dW_s.$$

Or par hypothèse $\int_0^t (u'(X_s)g(X_s))^2\ ds < \infty$ donc $u'(X_t)g(X_t) \in \Pi_3(W)$ et M_t est donc une martingale locale.
Pour obtenir (ii) il suffit d'observer que par ce qui précède

$$\mathbb{E}\left[u(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}u(X_s)\ ds - u(x_0)\right] = 0$$

d'où

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[u(X_t) - u(x_0)\right] = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}(\mathcal{A}u(X_s))\ ds \to \mathcal{A}u(x_0)$$

quand $t \to 0$.
(iii) s'obtient à partir de (ii) en prenant d'abord $u(x) = x$ pour la premième limite. Pour l'autre en écrivant $(X_t - x_0)^2 = X_t^2 - x_0^2 - 2x_0(X_t - x_0)$ puis en appliquant ii) aux fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$.

Remarques :
1) Si on suppose $u \in \mathcal{C}^2$ à dérivée bornée alors la preuve ci-dessus montre que $u(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}u(X_s)\ ds$ est une martingale.
2) Si l'on choisit (judicieusement) u de façon à ce que $\mathcal{A}u \equiv 0$ on obtient que $u(X_t)$ est une martingale (locale).

Cas non homogène

Pour les diffusion non homogène on a des résultats similaires :

Définition 8.4 *Soit $t > 0$ fixé. À l'EDS (8.1) on associe l'opérateur linéaire $\mathcal{A}_t : \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{0,0}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ définit par*

$$\mathcal{A}_t u(t,x) := f(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}g^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

pour tous $u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. La famille d'opérateur $(\mathcal{A}_t)_{0 \le t \le T}$ est appelé générateur *de la diffusion $(X_t)_{0 \le t \le T}$ solution de (8.1).*

On montre de la même manière que précédemment la

Proposition 8.2 *Le générateur* $(\mathcal{A}_t)_{0\leq t\leq T}$ *caractérise la diffusion* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$*. De plus si* X_t *est solution de (8.1) et* $u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ *alors*

$$M_t = u(t, X_t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{A}_s u(s, X_s)\right] ds$$

est une martingale locale.

Remarques :
1) Si on suppose $u \in \mathcal{C}^{1,2}$ à dérivée en x bornée alors M_t est une martingale.
2) Si l'on choisit (judicieusement) u de façon à ce que $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}_s u \equiv 0$ on obtient que $u(t, X_t)$ est une martingale (locale).

Pour étudier les quantités actualisées on peut étendre le résultat précédent en

Proposition 8.3 *Sous les hypothèses précédentes si* $r(t, x)$ *est une fonction continue (bornée) sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *alors le processus :*

$$M_t = R_t u(t, X_t) - \int_0^t R_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}_s - ru\right)(s, X_s)\ ds$$

est une martingale locale (martingale) où $R_t := \exp\left(-\int_0^t r(s, X_s)\ ds\right)$.

8.2 Interprétation probabiliste d'EDP

8.2.1 Mouvement brownien et équations de la chaleur

On note $W_t^x = W_t + x$ le M.B. commençant au point $x \in \mathbb{R}$.
La diffusion associée à ce M.B. est

$$\begin{cases} dX_t = dW_t \quad \text{pour } t > 0 \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Équation progressive

On commence par énoncer un résultat de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Théorème 8.3 *(Résultat d'analyse)*
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ *alors il existe une unique fonction* $u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \\ u(0, x) = f_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8.7}$$

Remarque : L'équation (8.7) s'appelle équation de la chaleur (progressive). Elle modélise la "diffusion" de la chaleur dans un fil : $u(t,x)$ représente la température du filament au point x au temps t. Et f_0 represente le "profil" initial de la temperature sur le fil.

Lemme 8.2 *Si u est solution de (8.7) alors pour tous $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés $(u(T-t, W_t^x))_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ martingale locale.*

Preuve : On applique Itô à la fonction $f(t,x) = u(T-t,x)$, on trouve

$$u(T-t, W_t^x) - u(T,x) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(T-s, W_s^x)\, dW_s^x$$

qui est une martingale locale car $\dfrac{\partial u}{\partial x}(T-s, W_s^x) \in \Pi_3(W^x)$. ♯

Proposition 8.4 *Soit u la solution de (8.7) où f_0 est de plus supposée bornée. Alors pour tous $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$u(T,x) = \mathbb{E}(f_0(W_T^x)).$$

Preuve : On pose $M_t = u(T-t, W_t^x)$, en particulier on a $M_T = u(0, W_T^x) = f_0(W_T^x)$ qui est borné. De part la continuité des fonctions en jeu on a pour tout $t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t} |M_s|\right) \le \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t} M_s^2\right) \le \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T} M_s^2\right) < \infty.$$

Donc M_t est une martingale et on a

$$u(T,x) := \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(f_0(W_T^x)).\sharp$$

Remarque : Comme W_T^x est de loi $\mathcal{N}(x,T)$ on peut écrire explicitement la solution

$$\mathbb{E}(f_0(W_T^x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2T}\right)\, dy.$$

En travaillant plus on peut obtenir le résultat suivant que l'on admettra.

Théorème 8.4 *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et vérifie $|x|^{-2}\log^+|f(x)| \to 0$ quand $x \to \infty$ alors*

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(W_t^x))$$

est solution de (8.7).

Equation rétrograde

Comme précédemment on énonce un résultat de la théorie des équations aux dérivées partielles.
Théorème 3.5 (Résultat d'analyse)
Soient $T > 0$ et $f_T \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ \\ u(T,x) = f_T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8.8}$$

Remarque :
On a ici une condition terminale f_T. Le théorème précédent nous dit qu'étant donné un profil régulier (continu) il existe une solution de l'équation de la chaleur qui conduit à (simule) ce profil à l'instant T.

Lemme 8.3 *Si u est solution de (8.8) alors pour tous $t_0 \in [0,T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixés $(u(t, W_t^{t_0,x_0}))_{t\in[t_0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[t_0,T]}$ martingale locale.*

Preuve : Il s'agit d'une application de la proposition 8.2 avec

$$\mathcal{A}_t u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).\sharp$$

Proposition 8.5 *Soit u la solution de (8.8). Alors pour tous $t_0 \in [0,T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ on a*

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}(f_T(W_T^{t_0,x_0})).$$

Preuve : Encore une fois on utilise la régularité de u et f_T pour avoir pour tous $t_0 \le t \le T$

$$\sup_{t_0 \le s \le t} |u(s, W_s^{t_0,x_0})| < \infty$$

pour conclure que $(u(t, W_t^{t_0,x_0}))_{t\in[t_0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[t_0,T]}$ martingale d'où le résultat. $\sharp$

8.2.2 Formule de Feynman-Kac

On revient sur le cas des diffusions générales (8.1) :

$$\begin{cases} dX_t = f(t,X_t)\ dt + g(t,X_t)\ dW_t \\ X_0 = Z \end{cases}$$

sous les hypothèses faites en début de chapitre.

Comme précédemment on cherche à exploiter les résultats de la section 2. On commence par un résultat de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Théorème 8.5 *(Résultat d'analyse)*
Soient $\mathcal{A}_t$ le générateur associé à la diffusion solution de (8.1). Soient $T > 0$, $r : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ continue, bornée et $f_T \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \mathcal{A}_t u(t,x) - r(t,x)u(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ u(T,x) = f_T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8.9}$$

Comme corollaire immédiat de la Proposition 8.3 on obtient le

Lemme 8.4 *Soient u la solution de (8.9), (X_t) la diffusion associée à (8.1) et $r(t,x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Pour tous $t_0 \in [0,T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixés on définit pour tout $t \in [t_0, T]$*

$$\begin{aligned} R_t &:= \exp\left(-\int_{t_0}^t r(s, X_s^{t_0,x_0})\, ds\right) \qquad et \\ M_t &:= R_t u(t, X_t^{t_0,x_0}). \end{aligned}$$

Alors $(M_t)_{t\in[t_0,T]}$ est une $\mathcal{F}_{t\in[t_0,T]}$ martingale locale.

Proposition 8.6 *(Formule de Feynman-Kac)*
Soit u la solution de (8.9) et (X_t) la diffusion associée à (8.1). Alors si $r(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, pour tous $t_0 \in [0,T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ on a

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{t_0}^T r(s, X_s^{t_0,x_0})\, ds\right) f_T(X_T^{t_0,x_0})\right].$$

Remarque : Lors du chapitre précédent nous avions obtenu une formule pour "pricer" une option du type $h = f_T(S_T)$. En suivant la même démarche pour un modèle plus général : le taux de l'actif sans risque est une fonction $r(t,x)$ et le prix de l'actif risqué suit l'EDS pour $t > 0$

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

et $X_0 = Z$; on en conclut que le prix de l'option $h = f_T(X_T)$ au temps t doit être

$$V_t = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s, X_s)\, ds\right) f_T(X_T) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

qui de part le Théorème 8.2 (propriété de Markov des diffusions) s'écrit

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(u, X_u^{t,x})\, du\right) f_T(X_T^{t,x})\right]\Bigg|_{x=X_t}.$$

La formule de Feynman-Kac nous donne un moyen de calculer cette espérance dans la mesure ou l'on sait identifier la solution $u(t,x)$ (au moins numériquement) de l'EDP déterministe

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \mathcal{A}_t u(t,x) - r(t,x)u(t,x) = 0$$

où $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ avec $u(T,x) = h = f_T(X_T)$ et

$$\mathcal{A}_t u(t,x) := b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

On obtient ainsi

$$V_t = u(t, X_t).$$

8.2.3 Cas multidimensionnel

Le résultat précédent se généralisent aux cas des diffusions à valeurs vectorielle. On considère W_t un mouvement brownien de dimension d et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

$$dX_t^i = b^i(t, X_t)\ dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{i,j}(t, X_t) dW_t^j.$$

On suppose toutes les “bonnes hypothèses” sur les coefficients vérifiées. On introduit pour chaque t l'opérateur $\mathcal{A}_t$ qui opère sur les fonctions u de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ selon

$$\mathcal{A}_t u(t, x) = \sum_{i=1^n} b^i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k,\ell}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_\ell}(t, x)$$

où $a(x, t) := (a_{k,\ell}(t, x))$ est la matrice définie par $a = \sigma\sigma'$ où σ' est la transposée de σ i.e.

$$a_{k,\ell}(t, x) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{k,j}(t, x) \sigma_{j,\ell}(t, x).$$

Théorème 8.6 *Sous les “bonnes hypothèses” si (X_t) est la diffusion vectorielle associée au système ci dessus et si $u(t, x)$ est une fonction à valeur réelle de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ à dérivée bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ et si $r(t, x)$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ alors le processus*

$$M_t := R_t u(t, X_t) - \int_0^t R_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}_s u - ru \right)(s, X_s)\ ds$$

est une martingale, où $R_t = \exp(-\int_0^t r(v, X_v)\ dv)$
De plus si u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}_t u(t, x) - r(t, x) u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

avec $u(T, x) = f_T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^T r(s, X_s^{t,x})\ ds \right) f(X_T^{t,x}) \right).$$