L2 - UE MAT234

## Analyse – Feuille d'exercices n° 1

---

**1.** Déterminer le domaine de définition des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x+y} \qquad f_3(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|} \qquad f_4(x,y) = \ln\left(\frac{1}{xy}\right)$$

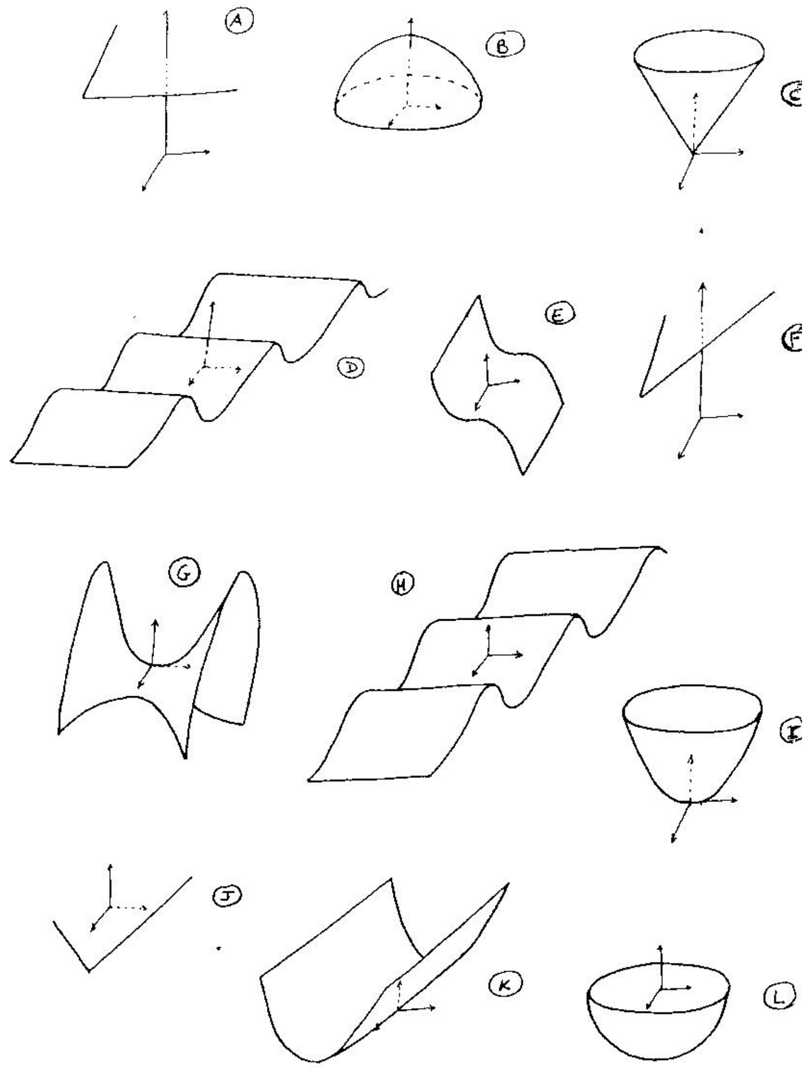
**2.** Associer à chacune des 12 surfaces la fonction qui lui correspond parmi les suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2 \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{6}(5 - x + 2y) \qquad f_3(x,y) = y^2 - x^2 \qquad f_4(x,y) = y$$

$$f_5(x,y) = y^2 \qquad f_6(x,y) = -y^3 \qquad f_7(x,y) = -\sin x \qquad f_8(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

$$f_9(x,y) = 5 \qquad f_{10}(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f_{11}(x,y) = \sin x \qquad f_{12}(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$f_{13}(x,y) = \cos x \qquad f_{14}(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f_{15}(x,y) = 3 - x - y$$



**3.** Donner l'allure des courbes de niveau et du graphe des fonctions de deux variables réelles $x, y$ suivantes :

$$f_1(x,y) = (x-2)^2 \quad f_2(x,y) = x^2 - y^2 \quad f_3(x,y) = x^2 + x - y \quad f_4(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$$

**4.** Donner l'expression en coordonnées polaires des fonctions suivantes (et en déduire l'allure de ces fonctions) :

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad f_3(x,y) = \frac{y}{x} \qquad f_4(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

**5.** Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = 4x^4y^2 - 3x^2y^3 + xy - y + 1 \qquad f_2(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad f_3(x,y) = x^2 + xy^2 - 5y^4$$

$$f_4(x,y) = \sin(x^2y) \qquad f_5(x,y) = \exp(xy)\sin x \qquad f_6(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$f_7(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f_8(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f_9(x,y) = \frac{1}{x^2-xy+y^2+1}$$

**6.** Calculer les dérivées directionnelles des fonctions suivantes dans la direction $d$:

$$f(x,y) = xe^{x+y},\ d = (1,2) \quad \text{et} \quad g(x,y) = \frac{x-y}{x+y},\ d = (3,-1)$$

**7. (bonus)** Soit $f$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ est continue et admet des dérivées premières sur $R^2$. Ses dérivées partielles sont-elles continues sur $R^2$ ?

**8. (bonus)** On considère la fonction $f : R^2 \to R$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0),$$

et $f(0,0) = 0$. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $R^2$ tout entier. Calculer $\mathrm{d}f_{(0,0)}$, et $\mathrm{d}f_{(1,1)}$.

**9.** Montrer que $\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(2yz\,\mathrm{dx} - 2xz\,\mathrm{dy} + (x^2-y^2)\,\mathrm{dz}\right)$ est la différentielle d'une fonction $f$ que l'on déterminera.

L2 - UE MAT234

**Analyse – Feuille d'exercices n° 2**

---

**1.** Trouver toutes les fonctions $f(x,y)$ définies sur $\mathbb{R}^2$ dont les dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont identiquement nulles.

**2.** Trouver toutes les fonctions $f(x,y)$ définies sur $\mathbb{R}^2$ dont les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont identiquement nulles.

**3.** Trouver toutes les fonctions $f(x,y)$ définies sur $\mathbb{R}^2$ dont les dérivées partielles d'ordre 3 existent et telles que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

**4.** Résoudre l'équation : $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x+y, x+2y)$.

**5.** Résoudre l'équation : $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x, 3x-2y)$.

**6.** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (xy, y/x)$.

**7.** Résoudre dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}$, avec $a \in \mathbb{R}$. (opérer un changement de variables en coordonnées polaires.)

**8.** Résoudre l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x-y, x+y)$.

**9.** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ : $x^2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (y/x, xy)$.

**10.** Donner le développement de Taylor d'ordre 2 des fonctions suivantes :

$x^2y^2$, au point $(1,\ 1)$, $\sin(xy)$, au point $(0,\ 0)$, $x^3y^2 - 2xy^4 + y^5$, au point $(1,\ 2)$.

**11. (bonus)** On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $f$ au point $a = (3,4)$. Montrer que l'erreur commise en remplaçant $f(3.1,\ 4.02)$ par $5 + \mathrm{d}f_a(0.1,\ 0.02)$ est $\leq 2.10^{-3}$.

L2 - UE MAT234

## Analyse – Feuille d'exercices n° 3

---

**1.** Déterminer si elles existent les valeurs maximales et minimales des fonctions suivantes sur $R^2$:

$$f_1(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2 \qquad f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \qquad f_3(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 1$$

$$f_4(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 4 \qquad f_5(x,y) = x - y^2 - x^3 \qquad f_6(x,y) = 3x + 12y - x^3 - y^3$$

$$f_7(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3 \qquad f_8(x,y) = (x-y)^2 + x^2 + y^2 \qquad f_9(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$$

**2.** Examiner si les fonctions suivantes ont un extremum (maximum ou mimimum) en $(0,0)$ :

$$f_1(x,y) = x^2 \quad f_2(x,y) = xy \quad f_3(x,y) = x^2 - 4y^2 \quad f_4(x,y) = x^2 + xy + y^2 \quad f_5(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

**3.** On considère la fonction $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z$. Pour quel vecteur unitaire $u$ la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_u f(a)$ au point $a = (1,1,1)$ est-elle maximale ? minimale ?

**4.** On considère un trinôme du second degré $at^2 + bt + c$. Montrer que la fonction $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ a un extremum (global) en 0 si et seulement si le discriminant du trinôme est $\leq 0$.

**5. (bonus)** Déterminer les valeurs minimale et maximale de

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta,$$

pour $\theta \in [0,\ 2\pi]$. En déduire le minimum et le maximum de $x^2 + y^2$ sur la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$. (On pourra passer en coordonnées polaires.)

**6.** On s'intéresse à trois variables $X$, $Y$ et $Z$ dont on connaît $n$ mesures $(x_i, y_i, z_i)_{i=1,\dots,n}$.

1. On propose un modèle $Z = aX + bY + c$ (avec $a$, $b$ et $c$ des coefficients réels) pour représenter le lien entre ces variables. Quelles sont les valeurs optimales $\hat{a}, \hat{b}$ et $\hat{c}$ des coefficients pour que le modèle soit au plus proche des données ? (appliquer la méthode des moindres carrés).

2. Illustration pratique : Calculer les coefficients avec les données suivantes (pour $n = 6$):

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| $y_i$ | $-1$ | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| $z_i$ | 4 | $-2$ | 0 | $-3$ | 3 | 4 |

   Pour faciliter les calculs, on donne :

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 18,\ \sum_{i=1}^{6} {x_i}^2 = 88,\ \sum_{i=1}^{6} y_i = 9,\ \sum_{i=1}^{6} {y_i}^2 = 27,\ \sum_{i=1}^{6} z_i = 6,$$

$$\sum_{i=1}^{6} {z_i}^2 = 54,\ \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 35,\ \sum_{i=1}^{6} x_i z_i = 32,\ \sum_{i=1}^{6} y_i z_i = -9,$$

**7.** On s'intéresse à deux variables positives $X$ et $Y$ dont on connaît 4 mesures

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $y_i$ | 0.5 | 2.5 | 8 | 14 |

1. On propose un modèle $Y = aX + b$ (avec $a$ et $b$ des coefficients réels) pour représenter le lien entre ces variables. Quelles sont les valeurs optimales $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des coefficients ?

2. On propose un second modèle $Y = cX + d\sqrt{X}$. Calculer les valeurs optimales pour $c$ et $d$.

3. Quel modèle est le plus satisfaisant ?

Pour faciliter les calculs, on donne

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 14, \ \sum_{i=1}^{4} x_i\sqrt{x_i} = 36, \ \sum_{i=1}^{4} {x_i}^2 = 98,$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 25, \ \sum_{i=1}^{4} \sqrt{x_i} y_i = 60.5, \ \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 160.5$$

L2 - UE MAT234

## Analyse – Feuille d'exercices n° 4

---

**1.** Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \iint_{[0,3]\times[0,2]} (4-y^2)\ dxdy, \qquad I_2 = \iint_{[0,3]\times[-2,0]} (x^2y - 2xy)\ dxdy,$$

$$I_3 = \iint_{[\pi,2\pi]\times[0,\pi]} (\sin x + \cos y)\ dxdy, \quad I_4 = \int_0^{\pi} \left(\int_0^x x \sin y\ dy\right) dx,$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sin x} y\ dy\right) dx, \qquad I_6 = \int_1^{\ln 8} \left(\int_1^{\ln y} e^{x+y}\ dx\right) dy,$$

$$I_7 = \iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]^3} \sin(x+y+z)\ dxdydz.$$

**2.** Calculer le volume des sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 /\ z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1-z\}, \\ D_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 /\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, \\ D_3 &= \{(x,y,z) \in (\mathbf{R}^+)^3 /\ x \leq y,\ x+y \leq 2,\ z \leq x^2+y^2\}. \end{aligned}$$

**3.** Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.
2. $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
3. $f(x,y) = x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$.
4. $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{xy}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, x+y \geq 1, x \geq y\}$.
   *Indication : on pourra faire le changement de variables* $(X,Y) = (x+y, x-y)$.
5. $f(x,y) = x\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ et $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq y \geq 0, x^2+y^2 \leq \pi\}$.

**4.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$. Pour tout $a > 0$, on note

$$D_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\}, \quad C_a = [-a,a]^2 \text{ et } I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy.$$

1. Calculer $I_a$.

2. On définit $J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy$. Montrer que $I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$ pour tout $a > 0$.

3. Montrer que $\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{J_a}$ et en déduire sa limite quand $a$ tend vers $+\infty$.

**5.**

1. Soit $\Gamma$ la courbe de $\mathbf{R}^2$ d'équation $y = (x-1)\ln(x+1)$, $x$ variant de 0 à 1. Calculer
$$I_1 = \int_\Gamma \sqrt{x}\ dy - (\sqrt{x}\ln(x+1))\ dx.$$

2. Soit $C \subset \mathbf{R}^2$ le cercle de rayon $R$, de centre $(0,0)$ décrit dans le sens trigononomtrique. Calculer
$$I_2 = \int_C (2x-y)\ dx + (x+y)\ dy.$$

3. Soit $\Gamma$ une courbe fermée (lisse) dans $\mathbf{R}^3$. Calculer
$$I_3 = \int_\Gamma yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz.$$

**6.**

1. Soit $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ une courbe fermée simple délimitant un domaine $\mathcal{D}$ d'aire $A$. Montrer l'aide de la formule de Green-Riemann que
$$A = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\ dy - y\ dx.$$

2. En déduire l'aire limitée par l'ellipse définie par
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& a\cos\theta \\ y &=& b\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{avec } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

L2 - UE MAT234

**Analyse – Feuille d'exercices n° 5**

---

**1.** Calculer le gradient et le laplacien des fonctions sur $\mathbf{R}^2$ valeur dans $\mathbf{R}$ définies par

$$\forall(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\forall(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Refaire le calcul en coordonnées polaires.

**2.** Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs suivants

$$\begin{array}{l} \forall(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad V(x,y,z) = 2xe^{2z}\sin y\ \mathbf{i} + x^2e^{2z}\cos y\ \mathbf{j} + 2x^2e^{2z}\sin y\ \mathbf{k} \\ \forall(r,\theta,z), r > 0, \quad W(r,\theta,z) = r\sin\theta\ \mathbf{u_r} + r\cos\theta\ \mathbf{u_\theta} + z\ \mathbf{k} \end{array}$$

**3.** Soient $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ et $V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une fonction réelle et un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^3$. Montrer que

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{div}(fV) & = & f\ \mathrm{div}V + \mathrm{grad}f.V \\ \mathrm{div}(\mathrm{grad}f) & = & \Delta f \\ \mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) & = & 0. \end{array}$$

**4.** Pour tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ par

$$\forall(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \ f_\alpha(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha.$$

Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $\Delta f_\alpha = 0$.

**Feuille d'exercices n° 1**

# 1 Exercices.

**Exercice 1.** *Produit matriciel* Calculer les produits AB et BA, quand ils existent, dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Indication. *Noter que* A *et* B *sont des matrices diagonales par bloc.*

■

**Exercice 2.** *Représentation d'une application linéaire.* Donner la représentation matricielle des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces en jeu.

1. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z) \end{cases}$.
2. la projection dans $\mathbf{R}^2$ sur la droite engendrée par $e_1 = (2, 1)$ parallèlement à $e_2 = (1, 1)$.
3. la symétrie dans $\mathbf{R}^2$ par rapport à la droite engendrée par $e_1$ parallèlement à $e_2$ (on rappelle que c'est l'application linéaire qui envoie $e_1$ sur $e_1$ et $e_2$ sur $-e_2$).
4. $f : \begin{cases} \mathbf{R}_2[X] & \to \mathbf{R}_2[X] \\ P & \mapsto 2(X + 1)P - (X^2 - 1)P' \end{cases}$.

■

**Exercice 3.** On considère l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique B.

1. Montrer que $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (-2, 1, 3)$ forment une base B′ de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices de passage d'une base à l'autre.
3. Calculer la matrice de $f$ dans la base B′.

■

**Exercice 4.** On considère l'espace $\mathbf{R}^2$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2)$. Soit $f$ l'application linéaire donnée par

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto (2u, -v) \end{cases}.$$

dans la base B.

1. Déterminer la matrice A de $f$ dans la base B.
2. Montrer que les vecteurs $e'_1 = (3, 1)$ et $e'_2 = (5, 2)$ forment une base B′ de $\mathbf{R}^2$.
3. Déterminer la matrice A′ de $f$ dans le base B′ en calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$.
4. Calculer les matrices de passage P et Q entre les bases B et B′.
5. Déterminer A′ par le formule de changement de base.
6. Calculer les matrices de $f^5$ dans les deux bases Indication. $A = PA'P^{-1}$ *implique que* $A^n = PA'^nP^{-1}$.

■

**Exercice 5.** On considère l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique. Soit

$$f:\begin{cases}\mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, 2x-z, -3x+y+3z)\end{cases}.$$

1. Déterminer une base de $\ker f$ et en déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer la matrice A de $f$ dans la base canonique et
   (a) vérifier que les vecteurs colonnes de A sont liés et en déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
   (b) vérifier que $\ker f$ est orthogonal (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^3$) aux vecteurs lignes de A.
3. L'équation $f(x,y,z) = (1,-2,-1)$ a-t-elle des solutions ? Faire deux preuves différentes.
4. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y,z) = (1,2,-3)$ ? Plus généralement, décrire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y,z) = \mathrm{Y}$, lorsque $\mathrm{Y} \in \operatorname{Im} f$.

## 2 Faire ses gammes.

**Exercice 6.** Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle et à l'aide d'applications linéaires de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$. Les résoudre par la méthode de Gauss.

$$(1)\begin{cases} x+y+z=0\\ x+2y+3z=2\\ x+3y+4z=3\end{cases}\quad (2)\begin{cases} x+2y+z=0\\ x+2y-z=2\\ x+2y+3z=1\end{cases}\quad (3)\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+3z=2\\ x+3y+4z=2\end{cases}\quad (4)\begin{cases} x-y+z=0\\ x+y+3z=2\\ x+4z=2\end{cases}\quad (5)\begin{cases} x+3y-z &= 9\\ 3x+9y-3z &= 27\\ -2x+y-5z &= 10\end{cases}$$

**Exercice 7.** Pour chaque matrice M calculer en posant un système la matrice inverse $\mathrm{M}^{-1}$.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix};\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix};\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

**Exercice 8.** Donner la répresentation matricielle de l'application $f$ dans la base B.

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2x+y\\x-3y\end{pmatrix};\ \mathrm{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2x-y+z\\x-3z\\x+y+z\end{pmatrix};\ \mathrm{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix};\ \mathrm{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x+y+z\\-x-y-z\\0\end{pmatrix};\ \mathrm{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

**Exercice 9.** Calculer la matrice de passage P de la base B vers la base B'.

$$\mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

**Exercice 10.** Calculer la matrice M de $f$ dans la base B. Calculer la matrice de passage P de B vers B'. Calculer l'inverse $\mathrm{P}^{-1}$ et en déduire la matrice de $f$ dans la base B', $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. Recalculer N directement et vérifier vos calculs.

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}, \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-2y+z\\x+y\\x+y+z\end{pmatrix}, \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}, \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, (1,-1)\right)$$

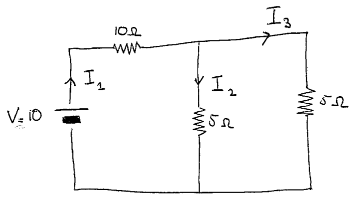
$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-2y+z\\x+y\\x+y+z\end{pmatrix}, \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right), \mathrm{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

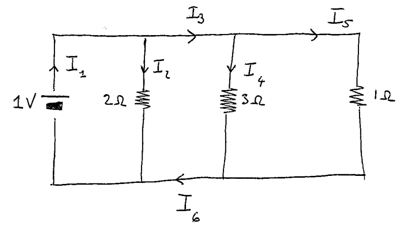
# 3 Applications et exercices plus sophistiquées.

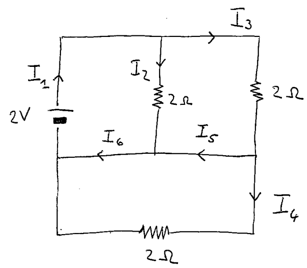
**Exercice 11.** *Applications à la chimie* Equilibrer les réactions suivantes à l'aide d'un système linéaire.

1. $NaCl + BeF_2 --> NaF + BeCl_2$
2. $Fe + Cl_2 --> FeCl_3$
3. $KMnO_4 + HCl --> KCl + MnCl_2 + H_2O + Cl_2$
4. $K_4Fe(CN)_6 + H_2SO_4 + H_2O --> K_2SO_4 + FeSO_4 + (NH_4)_2SO_4 + CO$
5. $C_6H_5COOH + O_2 --> CO_2 + H_2O$
6. $K_4Fe(CN)_6 + KMnO_4 + H_2SO_4 --> KHSO_4 + Fe_2(SO_4)_3 + MnSO_4 + HNO_3 + CO_2 + H_2O$
7. $PhCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 --> PhCOOH + K_2SO_4 + MnSO_4 + H_2O$

**Exercice 12.** *Applications à l'éléctronique* Pour chacun de ces trois circuits éléctroniques, utiliser la première et deuxième loi de Kirchoff pour établir un système d'équations linéaires dans les courants $I_1, I_2 \ldots$ etc. et résoud-le.




**Exercice 13.** *Analyse des signaux* Dans l'analyse des signaux, il est souvent nécesssaire de décomposer un signal $f(t)$ en une superposition d'ondes exponentielles $e^{i\mu t}$.

Après avoir mesuré $m$ fois le signal $f(t)$ à des temps $t = 0, 1, \ldots, m-1$, nous connaissons les valeurs $f(0), f(1) \ldots, f(m-1)$. Nous cherchons à trouver une fonction de la forme

$$g(t) = \lambda_0 1 + \lambda_1 e^{2\pi i t/m} + \lambda_2 e^{4\pi i t/m} + \ldots + \lambda_m e^{2(m-1)\pi i t/m}$$

qui interpole les valeurs mesurées pour les $f(i)$s, cad, telle que

$$f(0) = g(0), f(1) = g(1), \ldots f(m-1) = g(m-1).$$

1. Montrer que ceci est le cas si et seulement si
$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(m-1) \end{pmatrix}$$
ou M est la matrix donnée par l'équation $m_{jl} = e^{2(j-1)(l-1)\pi i/m}$.
2. Soient $\mathrm{M}_j, \mathrm{M}_k$ le j-ieme et k-ieme colonne de M, que nous considérons en tant que vecteurs. Montrer que $\mathrm{M}_j.\mathrm{M}_k = \sum_{l=0}^{l=m-1}(e^{2(j+k-2)\pi i/m})^l$. En déduire que $\mathrm{M}_j.\mathrm{M}_k = 0$ si $j+k-2$ n'est pas un multiple de $m$ et $\mathrm{M}_j.\mathrm{M}_k = m$ sinon.
3. Montrer que si M et N sont des matrices telles que $\mathrm{M}_j.\mathrm{N}_k = 1$ si $j = k$ et 0 sinon alors ${}^t\mathrm{N}\mathrm{M} = \mathrm{Id}$. Déduire $\mathrm{M}^{-1}$.
4. Donner les $\lambda_j$s en fonction des $f(k)$s.
5. Vous devez programmer sur ordinateur un script qui prendra comme données les valeurs $f(j)$ et qui donnera les coefficients $\lambda_k$. Serait il à votre avis plus pertinent de faire le calcul par résolution d'un système ou en utilisant le formule trouvé ci-dessus ? Pourquoi ?

**Exercice 14.** *Applications à l'économie et la théorie de la stratégie.* Un jeu de stratégie dont le but est le partage d'un butin oppose deux joueurs.

A chaque tour un joueur peut choisir entre trois stratégies, 1, 2 et 3. Lorsque le stratégie $i$ rencontre la stratégie $j$ celui qui a joué $i$ remporte une proportion $m_{ij}$ du butin. On note qu'on a donc $m_{ij} + m_{ji} = 1$ et $m_{ii} = 1/2$.

Un joueur a pour politique de jouer 1 avec probabilité $p$, 2 avec probabilité $q$ et 3 avec probabilité $r$. On supposera que $p, q, r > 0$. On dit alors que ce joueur joue une stratégie $(p, q, r)$.

1. Calculer les gains esperés par son adversaire si ce adversaire joue 1 (resp. 2, resp. 3.) Nous notons ces gains $\mathrm{N}(1), \mathrm{N}(2), \mathrm{N}(3)$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de stratégie $(p', q', r')$ permettant un gain esperé de $> 50\%$ face à une stratégie $(p, q, r)$ si et seulement si $N(1) = N(2) = N(3) = 1/2$. On dit alors que la stratégie $(p, q, r)$ est stable.
3. Ecrire les équations qui traduisent la stablité de la stratégie $(p, q, r)$ et les résoudre dans les cas suivants :
   (a) $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (jeu du papier-pierre-ciseaux)
   (b) $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

■

**Feuille d'exercices n° 2**

# 1 Exercices.

**Exercice 1.** Dans cet exercice, toutes les matrices sont carrées.

1. Soit $M'$ la matrice obtenue à partir de la matrice $M$ par l'opération $L_1 \to 2L_1 + L_2$. Est-ce qu'alors $\det(M) = \det(M')$ ?
2. Montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ est un entier pair. Est-il multiple de 4 ?
3. Montrer sans calcul que $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
4. En dimension 3, a-t-on $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3) = \det_{\mathscr{B}}(v_2, v_3, v_1)$ ? En dimension 4, a-t-on $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \det_{\mathscr{B}}(v_2, v_3, v_4, v_1)$ ?
5. Soit $v$ un vecteur d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Si $\det(v_1+v, v_2, ..., v_n) = \det(v_1, ..., v_n)$, a-t-on alors $v \in vect(v_2, .., v_n)$ ?
6. Supposons que $M$ et $M'$ sont deux matrices carrées telles qu'il existe $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$. Peut-on en déduire que $\det(M) = \det(M')$ ?
7. S'il existe $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X = 0$, peut-on en déduire que $\det(M) = \det(M')$ ?
8. S'il existe $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$, peut-on en déduire que $\det(M - M') = 0$ ?

■

**Exercice 2.** Calculer les déterminants suivants

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 1 & \cos y & \cos 2y \\ 1 & \cos z & \cos 2z \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

*(Indication : pour le déterminant A, on pourra développer* $\cos 2x$ *et faire des opérations sur les colonnes.)*

■

# 2 Faire ses gammes.

**Exercice 3.** Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

## 3 Applications et exercices plus sophistiquées.

**Exercice 4.** On rappele l'équation, vue en Mat112,

$$\det(u, v, w) = (u \wedge v).w$$

1. Soient $u, v$ des vecteurs de $^3$ et soit $\theta$ l'angle entre les deux.

   Utilisant l'équation
   $$u.v = ||u||||v||\cos\theta$$
   montrer que
   $$||u||||v|||\sin\theta| = ||u \wedge v||.$$
2. Donner une interpretation géométrique da la quantité $||u||||v|||\sin\theta|$.
3. Montrer que $u \wedge v$ est perpendiculaire à $u$ et $v$.
4. En déduire que $|\det(u, v, w)| = \mathrm{vol}(P)$ ou P est le parallelopiped engendré par $u, v$ et $w$.
5. Sous quelles conditions ce parallelopiped est-il de volume 0 ? Commenter votre résultat.

■

**Exercice 5.** Un graphiste a besoin de construire une courbe lisse qui passe par un certaine nombre de points donnés $(b_0, c_0)$, $(b_1, c_1)$, $(b_n, c_n)$. Une façon (assez basique) de faire cela est de construire un polynôme dont le graphe passe par ces points.

Nous supposons donc donnés les points $(b_i, c_i)$ et nous cherchons un polynôme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ qui a le propriété que $P(b_0) = c_0, \ldots P(b_m) = c_m$.

1. Montrer que cela équivaut à
   $$M(b_0, \ldots b_m)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$
   ou $M(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ est la matrice donnée par $M(b_0, b_1, \ldots, b_m) = \begin{pmatrix} 1 & b_0 & b_0^2 & \ldots & b_0^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & b_m & b_m^2 & \ldots & b_m^n \end{pmatrix}$.
2. Justifier que si cette équation a une solution pour chaque choix des $c_i$ alors $n \geq m$.
3. Justifier que si $n = m$ alors cette équation a une solution pour chaque choix des $c_i$s si et seulement si la matrice
   $$M(b_0 \ldots b_m) = \begin{pmatrix} 1 & b_0 & b_0^2 & \ldots & b_0^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & b_m & b_m^2 & \ldots & b_m^n \end{pmatrix}$$
   a determinant $\neq 0$.

Il est donc important de calculer le determinant de la matrice M. C'est le but de la deuxième moitié de cet exercice.

1. Calculer $\det(M(b_0, b_1))$ pour $n = 1$ , $M = \begin{pmatrix} 1 & b_0 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix}$ une matrice $2 \times 2$.
2. Nous considérons le cas ou $n = 2$. En faisant les opérations de colonnes $C3- > C3 - b_0C2$ puis $C2- > C2 - b_0C1$, montrer que
   $$\det(M(b_0, b_1 b_2)) = (b_1 - b_0)(b_2 - b_0)\det(M(b_1, b_2)).$$
   En déduire $\det(M(b_0, b_1, b_2))$.
3. En général, on considère $M(b_0, \ldots, b_m)$. En faisant les opérations de colonnes $C_{m+1}- > C_{m+1} - b_0C_m$, puis $C_m- > C_m - b_0C_{m-1}$ et ainsi de suite, montrer que
   $$\det(M(b_0, b_1, \ldots, b_m)) = \Pi_{k=1}^{n}(b_k - b_0) \times \det(M(b_1, \ldots b_n)).$$
4. En déduire que $\det(M(b_0, \ldots, b_m)) = \Pi_{0 \leq j < k \leq m-1}(b_k - b_j)$. Quand a-t-on $\det(M(b_0, \ldots, b_m)) = 0$ ?

■

**Feuille d'exercices n° 3**

# 1 Exercices.

**Exercice 1.** Trouver les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lesquelles sont diagonalisables ?

■

**Exercice 2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P qui diagonalise A. En déduire $A^n$ pour $n \geq 1$.

On considére les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par les valeurs initiales $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ et les relations suivantes :

$$u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \qquad v_{n+1} = 2v_n \qquad w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n.$$

Déterminer $u_n$, $v_n$ et $w_n$.

■

**Exercice 3.** Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + 4z(t), \qquad \dot{y}(t) = y(t) + 4w(t),$$

$$\dot{z}(t) = x(t) + z(t), \qquad \dot{w}(t) = y(t) + w(t).$$

Trouver la solution générale de ce système, puis la solution particulière qui vérifie les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $w(0) = 2$

■

**Exercice 4.** Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$.

1. A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Quel est le rang de A ?
3. À l'aide des sommes sur les lignes de A, trouver sans calcul une vecteur propre de A.
4. Déterminer les éléments propres de A.
5. Déterminer sans calcul une valeur propre de B.
6. Pour tout $n \geq 1$, déterminer $B^n$.

■

**Exercice 5.** Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a+b & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix}$.

1. A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer une base de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. Que remarque-t-on ? Trouver une base orthonormée de vecteurs propres.
3. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de B.
4. En déduire une base de vecteurs propres pour la matrice

$$\begin{pmatrix} a+b & \sqrt{2}b & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a+b \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer la polynôme caractéristique de A et trouver ses valeurs propres.
- Déterminer les sous-espaces propres de A. Pour quelles valeurs de $a$, la matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
A partir d'ici on supposera que $a = 0$.

- On considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - z(t), \qquad \dot{y}(t) = y(t),$$

$$\dot{z}(t) = -y(t) + 2z(t), \qquad \dot{w}(t) = x(t) + z(t) + 2w(t).$$

Trouver la solution générale de ce système, puis la solution particulière qui vérifie les conditions initiales $x(0) = y(0) = w(0) = 0, z(0) = 1$.

**Exercice 7.** Soit $x(t)$ une variable qui satisfait l'équation

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

1. Soit $v(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{pmatrix}$. Montrer que

$$v'(t) = \mathrm{M}v(t)$$

ou M est la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de M. Commenter votre résultat.

## 2 Faire ses gammes.

**Exercice 8.** Diagonaliser les matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice $M_i$ :

1. Calculer $M_i^n$ pour tout $n$
2. Résoudre la récurrence $v_n = M_i v_{n-1}$ en termes du vecteur initiale $v_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
3. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

4. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

■

## 3 Applications et exercices plus sophistiquées.

**Exercice 9.** Un proteine existe en deux formes, A et B.

Dans une intervalle d'une heure, un molécule en forme A passe en forme B avec une probabilité $p$, ou $0 < p < 1$.

De même, dans une intervalle d'une heure, une molécule en forme B passe en forme A avec une probabilité $q$, ou $0 < q < 1$.

En temps $t = 0$ un échantillon de proteine contient une proportion $a_0$ de molécules en forme A et une proportion $b_0$ de molécules en forme B. Soit $a_n$ (resp. $b_n$) la probabilité qu'une molécule prelevé dans l'echantillon $n$ heures plus tard soit en forme A (resp. B).

1. Etablir la rélation

$$a_n = (1-p)a_{n-1} + qb_{n-1}.$$
$$b_n = pa_{n-1} + (1-q)b_{n-1}.$$

2. Re-écrire cette rélation dans la forme

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice M. En déduire que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

pour tout entier $n$.

3. Diagonaliser M et en déduire $M^n$ pour tout $n$.
4. Donner $a_n, b_n$ en termes de $p, q, a_0, b_0$ et $n$. Commenter le comportement de $a_n, b_n$ quand $n \to \infty$.

■

**Exercice 10.** On dit qu'un matrice $n \times n$ M est une matrice de probabilité de transition régulière si

1. pour tout $i \in [1 \dots n]$ on a que $m_{i1} + m_{i2} + \dots m_{in} = 1$. En d'autres termes, la somme des éléments dans un colonne de la matrice fait toujours 1.
2. pour tout $i, j \in [1 \dots n]$ on a que $m_{ij} > 0$.

De telles matrices sont utilisées dans les sciences physiques pour modeliser des systèmes aléatoires ayant $n$ états, $m_{ij}$ étant la probabilité que le système passe de l'état $i$ vers l'état $j$ en un certain laps de temps. Le comportement asymptotique du système dépende alors du comportement de $\mathrm{M}^n$ quand $n \to \infty$.

Nous considérons le cas ou $n = 2$, c-a-d $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a, b < 1$.

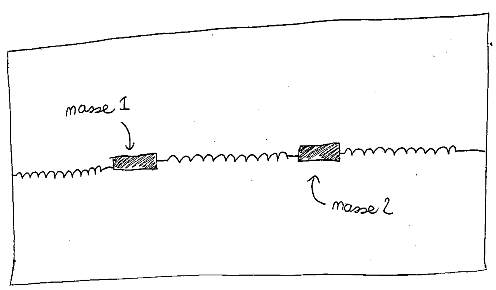
1. Montrer que 1 est valeur propre de M.
2. Montrer que $\lambda$, l'autre valeur propre de M, satisfait $|\lambda| < 1$.
3. En diagonalisant M, déduire $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^n$.

Nous allons maintenant regarder le cas $n = 3$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de M. (Indice : on pourra utiliser des opérations sur les lignes de la matrice $\mathrm{M} - \mathrm{Id}$).
2. Montrer que toute valeur propre $\lambda$ de ${}^t\mathrm{M}$ satisfait $|\lambda| \leq 1$. (Indice : dans léquation vectorielle ${}^t\mathrm{M}v = \lambda v$ on pourra considérer le coefficient de plus grand valeur absolue.)
3. Montrer que toute valeur propre $\lambda$ de M satisfait $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que si M est diagonalisable et n'admet pas $-1$ comme valeur propre alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^n$ existe. Commenter ce résultat.

■

**Exercice 11.** Deux masses égales sont suspendues entre trois ressorts identiques de coefficient de rigidité $k$ sur une table plane et lisse, comme dans le diagramme ci-dessous.




Les deux masses sont mises en mouvement en temps $t = 0$. Soit $x_1(t)$ (resp. $x_2(t)$) l'écart de la première (resp. de la seconde) masse de sa position d'équilibre en temps $t$. On admettra que les lois de Newton nous donnent que

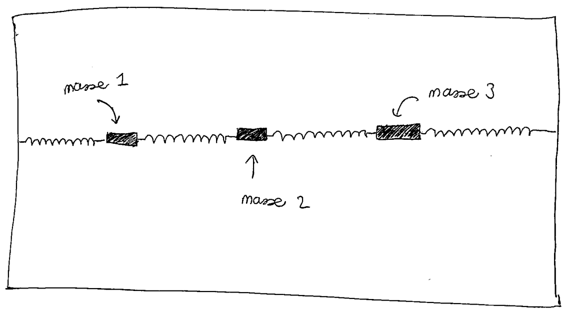
$$mx_1'' = -2kx_1 + kx_2$$

$$mx_2'' = kx_1 - 2kx_2.$$

1. Reécrire cette équation dans la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
pour une certaine matrix M.
2. Diagonaliser M et donner la solution générale de cette équation.
3. Interprêter physiquement les deux modes "fondamentales", cad, les solutions particulières correspondantes à chaque valeur propre.

4. Justifier les équations de mouvement données ci-dessus.

Nous considérons maintenant la même situation avec 3 masses suspendues entre 4 ressorts, comme ci-dessous.




Nous admettrons les équations de mouvement,

$$mx_1'' = -2kx_1 + kx_2$$
$$mx_2'' = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$
$$mx_3'' = kx_2 - 2kx_3.$$

1. Re-écrire ces équations dans la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
pour une certaine matrix M.
2. Diagonaliser M et donner la solution générale de cette équation.
3. Interpréter physiquement la mode “fondamentale” correspondante à la valeur propre $2k/m$.
4. Justifier les équations de mouvement données ci-dessus.

■

**Exercice 12.** On cherche à déterminer les matrices X qui commutent avec la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que les matrices X qui commutent avec A forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.
- Déterminer les matrices Y qui commutent avec D et en déduire celles qui commutent avec A.

■

**Exercice 13.** Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente, c’est-à-dire qu’il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$. Montrer que 0 est l’unique valeur propre de A. La réciproque est-elle vraie ?

■