Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I Année 2010-2011
Module MAT 234 Seconde session

Examen du mardi 14 juin 2011

Tous documents et notes manuscriptes interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*4 points*]
On se place dans le plan $I\!R^2$. Soit C l'intérieur de la couronne délimitée par les deux cercles centrés en $(0,0)$, de rayons respectifs $R_1 = 1/\sqrt{2}$ et $R_2 = \sqrt{2}$.
On note Δ la partie de cette couronne C vérifiant $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

1. Ecrire précisément les inégalités définissant le domaine Δ :
   a) relativement aux coordonnées cartésiennes (x, y),
   b) relativement aux coordonnées polaires (r, θ).
2. Calculer l'intégrale

$$I = \int\int_{\Delta} (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

Exercice 2 – [*5 points*]
Soit la fonction $f\ : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ définie par

$$f(x,y) = xy\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculez la matrice hessienne

$$H_f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

de f au point (x, y).

3. Pour chaque point critique, déterminez s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col (point selle).

Exercice 3 – [*3 points*]
Résoudre l'équation

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = xy, \qquad \text{avec } f\ : I\!R^2 \to I\!R, \text{ de classe} C^1,$$

à l'aide du changement de variables $u = x, v = 3x - 2y$.

Exercice 4 – [*8 points*]
On considère la matrice S suivante

$$S = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 2/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice S. [*Lors du calcul du déterminant, on pourra commencer par ajouter les lignes 2 et 3 à la ligne 1.*]

2. En déduire les valeurs propres de la matrice S avec leur multiplicité. Ces valeurs propres seront classées par ordre décroissant : $\lambda_1 > \lambda_2 > ...$

3. La matrice S est-elle diagonalisable ?

4. Déterminer les sous espaces propres associés aux valeurs propres λ_i.

5. Diagonaliser la matrice S. C'est-à-dire, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D, telles que $S = P\,D\,P^{-1}$.

5. Calculer la matrice P^{-1}.

6. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} D^n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S^n.$$

7. Justifier que la matrice S est inversible et donner l'expression de S^{-1} en fonction des matrices P, D et de leurs inverses.