Examen, première session

Les questions sont indépendantes. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction. Tous documents et notes manuscriptes interdits. Calculettes, téléphones portables interdits. Durée : 2h00.

Exercice 1. Diagonalisation
On note $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On considère la matrice

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -10 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1. Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrez que $\vec{v}$ est un vecteur propre de A.

1.2. Calculez le polynôme caractéristique de A, qu'on notera $P_A(\lambda)$. En utilisant la question précédente, déterminez ses racines λ_i, qu'on classera par ordre croissant. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1.3. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculez $A\vec{u}$ et $A\vec{w}$. Montrez que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

1.4. Calculez la matrice de passage P, qui permet de calculer les coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ connaissant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Calculez P^{-1}.

1.5. Montrez que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale que vous préciserez.

1.6. En utilisant les questions précédentes, montrez que A est inversible et calculez A^{-1}.

Exercice 2. Diagonalisation (encore)
Soit $f\ :\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) \quad = \quad x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2.$$

2.1. Montrez que $(0,0)$ est un point critique de f. Calculez $M = D^2 f(0,0)$ la matrice hessienne de f en $(0,0)$.

2.2. Déterminez les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés (on classera les valeurs propres de M par ordre croissant).

2.3. Montrez que M s'écrit sous la forme $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible que l'on précisera.

2.4. Soit $\vec{x} = (h, k)$ (dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$). Calculez les coordonnées de $M\vec{x}$ dans une base de vecteurs propres de M.
2.5. En déduire le type (minimum local, maximum local ou point selle) du point critique $(0, 0)$.

Exercice 3. Intégrales multiples
3.1. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, calculez

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx.$$

Calculez $\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} I_\varepsilon$.

3.2. On considère maintenant le secteur $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ et pour tout $0 < \varepsilon < 1$ on pose

$$D_\varepsilon = D \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 > \varepsilon\}$$

Dessinez D_ε pour $\varepsilon = 1/4$.
Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, calculez $J_\varepsilon = \displaystyle\int_{D_\varepsilon} \frac{1}{x}\, dxdy$ (un changement de variable pourra être opportun). Calculez $\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} J_\varepsilon$.

3.3. Comparez les résultats des 2 questions précédentes. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 4. Algèbre linéaire
Soit $\phi\ : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une application linéaire. Soit A la matrice représentative de ϕ dans la base canonique. On suppose que A^n est égale à la matrice nulle. On suppose également qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$ tel que $A^{n-1}\vec{u} \neq \vec{0}$.
4.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, A\vec{u}, A^2\vec{u}, \ldots, A^{n-1}\vec{u})$ est une famille libre. Pour cela, on considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\lambda_1\vec{u} + \lambda_2 A\vec{u} + \ldots + \lambda_n A^{n-1}\vec{u} = \vec{0}.$$

En multipliant cette égalité par A plusieurs fois, montrez que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. En déduire que $\mathcal{B}$ est une famille libre et une base de $\mathbf{R}^n$.
4.2. Calculez l'image par ϕ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Quelle est la matrice représentative de ϕ dans la base $\mathcal{B}$?