Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I

Module MAT 234 Année 2010-2011

Examen final du jeudi 13 janvier 2011

Tous documents et notes manuscriptes interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*8 points*]

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les trois premières colonnes C_1, C_2, C_3 de cette matrice A sont liées.
En déduire une valeur propre de la matrice A. [*Cette dernière question n'a pas d'incidence sur la suite du problème.*]

2. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A. [*Lors du calcul du déterminant, on pourra commencer par ajouter les trois dernières colonnes à la première.*]
En déduire les valeurs propres de la matrice A avec leur multiplicité. Ces valeurs propres seront classées par ordre croissant.

3. Déterminer l'image des vecteurs $v_3 = (1, 0, 1, 0)$ et $v_4 = (1, 1, 0, 1)$ par f. En déduire que la matrice A est diagonalisable.

4. Diagonaliser la matrice A. C'est-à-dire, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$, telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.

5. Calculer la matrice P^{-1}.

6. Donner le rang de la matrice A.

7. Déduire (sans calculs) des questions précédentes une base $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.

On considère désormais la matrice $E = \frac{1}{2}A$.

8. Déduire des question précédente qu'il existe une matrice diagonale Δ et une matrice inversible Q telle que $E = Q\Delta Q^{-1}$. On précisera les matrices Q, Δ et Q^{-1}.

9. En déduire la limite de la matrice E^n lorsque n tend vers $+\infty$. *Le calcul de la matrice E^n n'est pas demandé.*

Exercice 2 – [*6 points*]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$, ainsi que les domaines suivants de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x - y \geq 0, \quad x + y \geq 0\}$,

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad (x,y) \in \Delta, \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.

On se propose ici de calculer le volume du domaine D, c'est à dire l'intégrale triple $V = \int\int\int_D dxdydz$.

1. Représenter graphiquement le domaine Δ.
2. Vérifiez que si $(x,y) \in \Delta$, alors $f(x,y) \geq 0$.
3. Décrire le domaine D en fonction des coordonnées cylindriques r, θ, z.
4. Calculer le volume V.

Exercice 3 – [*4 points*]

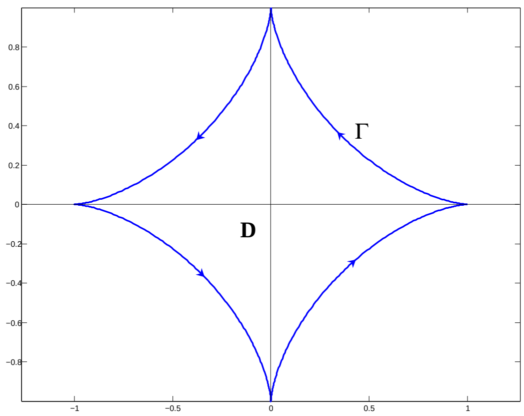
On considère le domaine D du plan $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe fermée simple Γ, définie paramétriquement par les équations :

$$x = (\cos t)^3\,, \quad y = (\sin t)^3\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Déterminer l'aire A du domaine D.

Aide : on donne la formule

$$(\sin^2 t)(\cos^2 t) = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t).$$



Exercice 4 – [*4 points*]

Résoudre l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - e^{-x}\frac{\partial f}{\partial y} = (1 + e^{-x})f\,,$$

en utilisant le changement de variables $u = e^{-x} - y,\ v = y - x$.