Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I

Module MAT 234 — Année 2011-2012

Examen final du mercredi 11 janvier 2012

Tous documents et notes manuscriptes interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*5 points*]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1).$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f ainsi que leur somme $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. En déduire que si (x,y) est un point critique de f, alors $y = x$ ou $y = -x$.
3. Montrer que f a quatre points critiques dans $\mathbb{R}^2$. Préciser leurs coordonnées.
4. Calculer la matrice hessienne $H(x,y)$ de f en un point (x,y) quelconque. Préciser l'expression de $H(x,y)$ dans les cas $y = x$ et $y = -x$.
5. En déduire la nature des points critiques de f.

Exercice 2 – [*7 points*]

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de l'endomorphisme f. On donnera une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. Calculer AX, où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Quelles informations les questions précédentes apportent-elles sur les valeurs propres de A ?

4. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A. *Dans le calcul du déterminant, on pourra commencer par ajouter à une colonne la somme des 3 autres.*

   Donner toutes les valeurs propres de A classées par ordre croissant.

   En déduire que A est diagonalisable.

5. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

   Les éléments diagonaux de la matrice D seront classés par ordre croissant.

Exercice 3 – [*5 points*]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\exp\left[(x^2+y^2+z^2)^2\right],$$

ainsi que le domaine suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

On se propose ici de calculer l'intégrale triple

$$M = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

1. Représenter graphiquement le domaine D (c'est-à-dire, figure en 3 dimensions).
2. Décrire le domaine D en fonction des coordonnées sphériques r, θ, φ, où φ représente la co-latitude.
3. Calculer M.

Exercice 4 – [*3 points*]

On considère les 2 fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{array}.$$

Déterminer les matrices jacobiennes de f, g et $h = g \circ f$.