1. Question 1

(1) Calculs des dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(x-y)(x^2+y^2-1) &= (x^2+y^2-1)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)+(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2-1)\\
&= x^2+y^2-1+(x-y)(2x)\\
&= 3x^2+y^2-2xy-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(x-y)(x^2+y^2-1) &= (x^2+y^2-1)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)+(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2-1)\\
&= (x^2+y^2-1)\cdot(-1)+(x-y)\cdot(2y)\\
&= -x^2-3y^2+2xy+1
\end{aligned}$$

et leur somme

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2-2y^2$$

(2) Le point (x,y) un point critique de f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.
On remplace dans l'expression obtenue en (1)

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2-2y^2=2(x-y)(x+y)$$

et on en deduit que
- ou bien $y-x=0$ c-à-d $y=x$
- ou bien $y+x=0$ c-à-d $y=-x$.

(3) On cherche
- les points critques qui satisfont $y=x$, c-à-d les solutions du système :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)=2x^2-1=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)=-2x^2+1=0.$$

Les solutions sont exactement $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$
- les points critques qui satisfont $y=x$, c-à-d les solutions du système :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)=6x^2-1=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)=-6x^2+1=0$$

Les solutions sont exactement $(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ et $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$.

On a donc trouvé les quatre points critiques.

(4) La matrice hessienne est la matrice de dérivées secondes :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

elle est symetrique car f est de classe C^2 (relation de Schwarz).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + y^2 - 2xy - 1\right) = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 - 3y^2 + 2xy + 1) = 2x - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 - 3y^2 + 2xy + 1\right) = -2x + 2y$$

En remplacant, on obtient :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & -2x + 2y \\ -2x + 2y & 2x - 6y \end{pmatrix}$$

On a deux cas à étudier :

$y = x$**:**

$$H(x,x) = \begin{pmatrix} 4x & 0 \\ 0 & -4x \end{pmatrix}$$

$y = -x$**:**

$$H(x,-x) = \begin{pmatrix} 8x & -4x \\ -4x & 8x \end{pmatrix}$$

(5) Grace à l'hessienne on peut détérminer la nature des points critiques :

- Si $x \neq 0$ la matrice $H(x,x) = \begin{pmatrix} 4x & 0 \\ 0 & -4x \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres distinctes : $4x$ et $-4x$. D'après le cours les points critiques $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sont de type selle car les valeurs propres de la matrice hessienne sont de signe opposé.
- Si $x \neq 0$ la matrice $H(x,-x) = \begin{pmatrix} 8x & -4x \\ -4x & 8x \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres distinctes : $12x$ et $4x$.
  D'après le cours
  - le point $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ est un minimum strict (les valeurs propres sont toutes deux > 0)

– le point $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ est un maximum strict (les valeurs propres sont toutes deux < 0)

2. Question 2

(1) Le noyau de A consiste des solutions de $AX = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau est de dimension 1 et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base.

(2) Calcul direct :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1+0 \\ 1+2+1+0 \\ 1+2+1+0 \\ 1+2+1+0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)
- 0 est un valeur propre de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- 4 est un valeur propre de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(t) := \det(tI - A) = (-1)^4 \det(A - tI) = \left| \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \right|$$

Si on change la matrice en remplacant la première colonne par sa somme avec les autres colonnes on ne change pas la valeur de détérminant, c-à-d :

$$\left| \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4-t & 2 & 1 & 0 \\ 4-t & 1-t & 0 & 1 \\ 4-t & 0 & 1-t & 2 \\ 4-t & 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= (4-t)\left\{\left|\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}\right| + (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}\right|\right. \\
&\quad \left. + \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}\right| + (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 2 \end{pmatrix}\right|\right\} \\
&= (4-t)\times((-t^3+3t^2+2t-4)-(2t^2-4t-4)+(-t^2+2t-4)-(4t-4)) \\
&= (4-t)(-t^3+4t) \\
&= (4-t)(-t^2+4)t
\end{aligned}
$$

On a donc détérmine le polynôme caractéristique.

(5) Une valeur propre est racine de $P_A(t)$, d'après la factorisation :

$$P_A(t) = t(t-4)(4-t^2) = t(t-4)(2-t)(2+t)$$

La matrice A a 4 valeurs propres, par ordre croissante, $-2 < 0 < 2 < 4$.

La matrice est diagonalisable dans une base de vecteurs propres car son polynôme caractéristique est scindé et toutes les valeurs propres simples.

On pourra egalement remarquer que la matrice A est symetrique donc diagonalisable d'après un theoreme du cours.

(6) Si $P^{-1}AP = D$ alors $AP = DP$ et on voit que
- chaque colonne de la matrice P est un vecteur propre de A
- chaque élément sur la diagonale de D est un valeur propre de A

Les valeurs propres par ordre croissante sont $-2 < 0 < 2 < 4$.
- la deuxième colonne de P est une base de noyau (valeur propre 0)
- la dernière colonne de P est (un multiple de) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Reste à détérminer la première et la troisième colonne de la matrice P ; ces sont des vecteurs propres de valeur propre -2 et 2 respectivement.

- un vecteur propre de valeur propre -2 est une solution non nulle X de

$$(A-(-2)I).X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution.

- un vecteur propre de valeur propre 2 c-à-d une solution non nulle de

$$(A-2I).X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

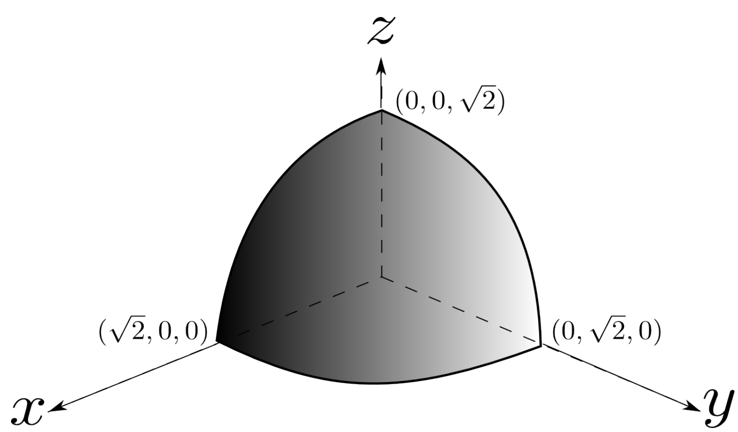
  Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution.

La matrice P, qui a pour colonnes les 4 vecteurs propres ci-dessus, est inversible car ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^4$ (des vecteurs propres de valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Question 3

(1) représentation graphique de D :



(2) Le domaine D est en coordonnées sphérique :

$$\{(r,\theta,\varphi), 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$

(3) Rappel que $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ il s'ensuit que, en coordonnées sphériques, la fonction f est donnée par l'expression $r\exp(r^4)$.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} (r\exp(r^4))|r^2\sin(\varphi)dr|d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)d\varphi \times \int_0^{\sqrt{2}} r^3\exp(r^4)dr \\
&= \pi/2 \times [-\cos(\varphi)]_0^{\pi/2} \times \frac{1}{4}\int_0^{(\sqrt{2})^4} \exp(u)du \\
&= \frac{\pi}{8}(\exp(4)-\exp(0)) = \frac{\pi}{8}(\exp(4)-1)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le changemnet de variable $u = r^4, u' = 4r^3$.

4. Question 4

– Si $f(r,\theta) = (f_1, f_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ sa matrice jacobienne est la matrice de dérivées partielles :

$$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

– Si $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)) = (x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$ sa matrice jacobienne est la matrice de dérivées partielles :

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Il convient d'expliciter la composition pour calculer sa jacobienne.

$h(r,\theta) = (h_1(r,\theta), h_2(r,\theta), h_3(r,\theta)) = g \circ f(r,\theta) = (r^2, r^2\cos(2\theta), r^2\sin(2\theta))$

où on a utilisé

$$\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta),\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta).$$

Cette expression permet d'expliciter la jacobienne :

$$\begin{aligned} Jh(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 2r\cos(2\theta) & -2r^2\sin(2\theta) \\ 2r\sin(2\theta) & 2r^2\cos(2\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 2r(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) & -4r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 4r\sin(\theta)\cos(\theta) & 2r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$