Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2012-2013
Module MAT 234

Examen final du lundi 7 janvier 2013

Tous documents et notes manuscrites interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*9 points*]

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{xy}.$$

1. Déterminer le gradient $\nabla f(x,y)$ de f au point (x,y).
2. a) Donner les équations définissant les points critiques de f. Montrer que ces équations sont équivalentes à deux équations polynomiales qu'on précisera.

   b) En effectuant la somme de ces deux équations polynomiales, montrer que si (x_0, y_0) est un point critique de f, alors nécessairement $x_0 = y_0$.

   c) Conclure que $(0,0)$ est l'unique point critique de f.
3. Calculer la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f au point (x,y).
4. Donner les valeurs propres de la matrice $H_f(0,0)$ et en déduire la nature du point critique $(0,0)$.
5. Tracer la ligne de niveau L_k pour $k = 0$.

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(u,v) \mapsto (x = u + v,\ y = u - v).$$

6. Expliciter l'application réciproque Φ^{-1}.
7. Calculer la matrice jacobienne $J_\Phi(u,v)$ de Φ au point (u,v) ainsi que la matrice jacobienne $J_{\Phi^{-1}}(x,y)$ de Φ^{-1} au point (x,y). Vérifier que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 1 \le y \le x + 2 \quad \text{et} \quad -x - 1 \le y \le -x + 2\,\}.$$

8. Déterminer le domaine Δ, image de D par Φ^{-1}, *c'est-à-dire, donner précisément les 4 inéquations en u et v définissant* Δ.
9. Représenter graphiquement (*et très précisément*) les domaines D et Δ dans leur repère (x,y) et (u,v) respectif.
10. Utiliser le changement de variable Φ pour calculer l'intégrale

$$V = \iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ = \ \iint_\Delta f \circ \Phi(u,v)\ \ \left|\det\Big(J_\Phi(u,v)\Big)\right|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Exercice 2 – [*4 points*]

On considère la matrice $M_{a,b,c}$ dépendant de trois paramètres réels a, b, c :

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$

1. Donner les conditions sur les paramètres réels a, b, c pour que la matrice $M_{a,b,c}$ soit inversible.

On suppose désormais que $b = c = 0$ et on note M_a la matrice $M_{a,0,0}$ dépendant ainsi uniquement du paramètre a.

2. Préciser les conditions sur a pour que la matrice M_a soit inversible.
   Pour deux paramètres réels a_1 et a_2, calculer le produit des matrices M_{a_1} et M_{a_2}.
   En déduire l'inverse de la matrice M_a (lorsqu'elle est inversible).

3. Calculer les matrices $(M_a)^2$, $(M_a)^3$, $(M_a)^4$, et plus généralement la matrice $(M_a)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 – [*7 points*]

On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ainsi que les matrices

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 & -9 \\ -3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image des vecteurs $w_1 = (-1, 0, 1, 1)$, $w_2 = (1, 1, 0, -1)$, $w_3 = (2, 1, -1, -1)$, $w_4 = (3, 1, -1, -2)$ par la matrice G.

2. Déterminer l'image des vecteurs $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 0, -1, 1)$, $v_4 = (1, -1, 1, 0)$ par la matrice M.

3. Diagonaliser la matrice M. Précisément, on donnera les valeurs propres de M avec leur multiplicité, les vecteurs propres associés, des matrices inversibles P et P^{-1} et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. *Bien évidemment on utilisera les résultats des deux questions précédentes.*

4. Donner sans calcul :
   - le noyau de la matrice M,
   - le déterminant de la matrice M.

5. On donne le vecteur $u = (1, 2, 3, 4)$ exprimé dans la base canonique. Déterminer les composantes de u dans la base des vecteurs propres trouvée ci-dessus.

6. Déterminer la limite de la matrice A^n lorsque n tend vers $+\infty$, avec $A = \frac{1}{2}M$.