Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2012-2013

Module MAT 234

Examen final du lundi 7 janvier 2013 : CORRIGE

Corrigé exercice 1 : Analyse

On remarque que la fonction f est (au moins) de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1.
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (2x + y\,(x^2-y^2)\,)\,e^{xy} \\ (\,-2y + x\,(x^2-y^2)\,)\,e^{xy} \end{pmatrix}$$

2. a) (x_0, y_0) est un point critique de f ssi $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0}$, c'est-à-dire ssi

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0\,(x_0^2 - y_0^2) = 0 \\ -2y_0 + x_0\,(x_0^2 - y_0^2) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

car l'exponentielle ne s'annule pas.

b) La somme des deux équations (1) ci-dessus conduit à

$$2(x_0 - y_0) + (x_0 + y_0)(x_0^2 - y_0^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x_0 - y_0)[\,2 + (x_0 + y_0)^2\,] = 0,$$

ce qui donne le résultat $x_0 = y_0$ car le second facteur est strictement positif.

c) En reportant $x_0 = y_0$ dans (1) on trouve immédiatement que $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Ainsi, f admet un unique point critique en $(0,0)$.

3.
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2xy + y\Big(2x + y(x^2-y^2)\Big) & x^2 - 3y^2 + x\Big(2x + y(x^2-y^2)\Big) \\ x^2 - 3y^2 + x\Big(2x + y(x^2-y^2)\Big) & -2 - 2xy + x\Big(-2y + x(x^2-y^2)\Big) \end{pmatrix} e^{xy}$$

4.
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{admet pour valeurs propres 2 et -2.}$$

Ainsi, f admet un point selle en (0,0) car les valeurs propres sont de signes opposés.

5. $L_{(k=0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$ et

$$(x^2 - y^2)\,e^{xy} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \pm x.$$

$L_{(k=0)}$ est donc l'union des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

6.
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \end{array} \qquad \Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} u = (x+y)/2 \\ v = (x-y)/2 \end{cases} \end{array}$$

7.

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\Phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_{\Phi^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\Phi^{-1})_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial(\Phi^{-1})_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial(\Phi^{-1})_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial(\Phi^{-1})_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

et ces deux matrices sont bien inverses l'une de l'autre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Les inéquations définissant D s'écrivent précisément :

$$(x,y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & \geq & x-1 \\ y & \leq & x+2 \\ y & \geq & -x-1 \\ y & \leq & -x+2 \end{cases},$$

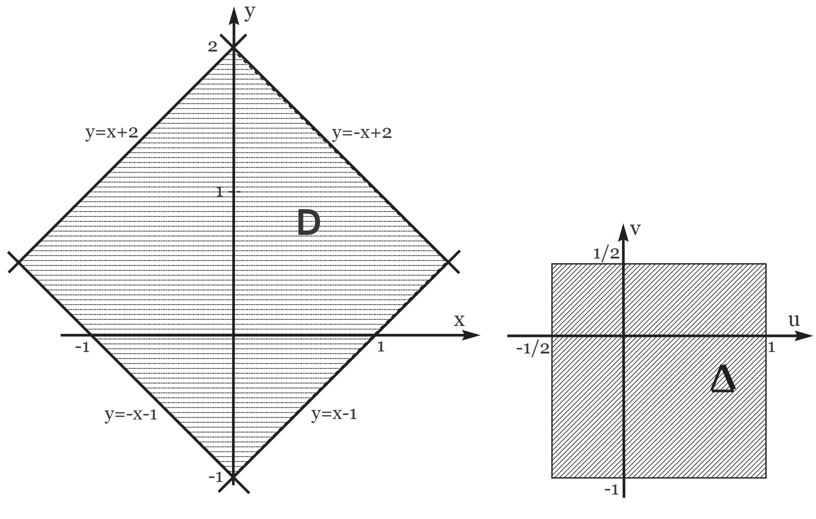
ainsi :

$$(u,v) \in \Delta = \Phi^{-1}(D) \;\Leftrightarrow\; \Phi(u,v) \in D \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u-v & \geq & u+v-1 \\ u-v & \leq & u+v+2 \\ u-v & \geq & -u-v-1 \\ u-v & \leq & -u-v+2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v & \leq & 1/2 \\ v & \geq & -1 \\ u & \geq & -1/2 \\ u & \leq & 1 \end{cases}$$

soit :

$$\Delta = \{(u,v) \in I\!R^2, \quad -1/2 \leq u \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq v \leq 1/2\}.$$

9.



10.

$$V = \iint_D (x^2-y^2)\, e^{xy}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \iint_\Delta 4uv\, e^{u^2-v^2} . \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| . \mathrm{d}u\mathrm{d}v \;=\; 8\iint_\Delta uv\, e^{u^2-v^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= -2\Big(\int_{u=-1/2}^{u=1} 2u\, e^{u^2}\, \mathrm{d}u\Big)\Big(\int_{v=-1}^{v=1/2} -2v\, e^{-v^2}\, \mathrm{d}v\Big) \;=\; -2\Big[e^{u^2}\Big]_{-1/2}^{1}\Big[e^{-v^2}\Big]_{-1}^{1/2}$$

$$= -2\Big(e^1 - e^{\frac14}\Big)\Big(e^{-\frac14} - e^{-1}\Big) \;=\; -2\Big(e^{\frac34} + e^{-\frac34} - 2\Big).$$

Corrigé exercice 2 : Matrice et déterminant

1. La matrice $M_{a,b,c}$ est inversible ssi son déterminant est non nul. On calcule le déterminant $D = \det(M_{a,b,c})$ de la manière suivante.

   En ajoutant les lignes L_2 et L_3 à la première ligne L_1, on obtient

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

   Puis en effectuant "un Gauss" sur la première ligne, c'est-à-dire : $C_2 := C_2 - C_1$ et $C_3 := C_3 - C_1$, on obtient finalement

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

   De sorte que la matrice $M_{a,b,c}$ est inversible ssi $a+b+c \neq 0$.

2. $M_a = M_{a,0,0} = \begin{pmatrix} a & 2a & 2a \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ssi $a \neq 0$.

   $(M_{a_1})(M_{a_2}) = a_1\, a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_1\, a_2\, \mathrm{I}_3.$

   Ainsi, pour $a \neq 0$, $(M_a)(M_{\frac{1}{a}}) = \mathrm{I}_3$, ce qui montre que $M_a^{-1} = M_{\frac{1}{a}}$.

3. On distingue les cas où p est pair et impair.

   Si $p = 2k$ est pair : $(M_a)^{2k} = a^{2k}\, \mathrm{I}_3$

   Si $p = 2k+1$ est impair : $(M_a)^{2k+1} = a^{2k}\, M_a = a^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 3 : Diagonalisation

Les vecteurs w_i et v_i sont supposés ici notés en colonne pour les besoins du calcul matriciel.

1. $G.w_i = e_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, ainsi :

$$G\,.\,[w_1, w_2, w_3, w_4] = [e_1, e_2, e_3, e_4] = I_4,$$

   de sorte que les vecteurs w_i définissent la matrice G^{-1}. En particulier, G est inversible et ses vecteurs colonnes définissent une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Les vecteurs v_i sont les vecteurs colonnes de la matrice G. On vérifie que $M.v_1 = -v_1$, $M.v_2 = v_2$, $M.v_3 = 2v_3$, $M.v_4 = 2v_4$, de sorte que les vecteurs v_i sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres -1,1,2,2. Les vecteurs propres v_3 et v_4 associés à la valeur propre double 2 sont linéairement indépendants.

3. Finalement on a

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 & -9 \\ -3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = GDG^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. $\ker(M) = \{0\}$ car les valeurs sont toutes non nulles.
   $\det(M) = -4$ (produit des valeurs propres).

5. On note $\mathcal{B}'$ la base des vecteurs propres (v_1, v_2, v_3, v_4).

$$u_{\mathcal{B}'} = G^{-1}.u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

6. Des questions précédentes on déduit $A = \frac{1}{2}M = \frac{1}{2}GDG^{-1} = G(\frac{1}{2}D)G^{-1}$, d'où :

$$A^n = \left[G(\frac{1}{2}D)G^{-1}\right]^n = G\left(\frac{1}{2}D\right)^n G^{-1} = G \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} G^{-1}$$

et

$$\lim_{\infty} A^n = G\left[\lim_{\infty}\left(\frac{1}{2}D\right)^n\right]G^{-1} = G \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$