Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2014-2015
Module MAT 234

Examen de juin 2015 (session 2)

Une feuille A4 recto-verso <u>*manuscrite*</u> *est autorisée.*
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 –

Soient a et b deux paramètres réels. Pour quelles valeurs de ces paramètres la matrice M ci-dessous est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}.$$

<u>*Indication 1*</u> *: on pourra commencer par effectuer les opérations* $L_3 := L_3 - L_1$ *et* $L_4 := L_4 - L_2$.
<u>*Indication 2*</u> *: on pourra ensuite calculer le déterminant "par blocs", ou alors développer selon la première colonne.*

Exercice 2 –

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Donner sans calcul une valeur propre de la matrice A.
3. Déterminer l'ensemble des solutions du système $A\,X = b$ avec $b = (-1, 0, 1)$.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A (*ces valeurs propres seront classées par ordre croissant*).
5. La matrice A est-elle diagonalisable (justifiez votre réponse) ?
6. Déterminer les sous espaces propres de la matrice A.
7. Donner une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D telle que $A = P\,D\,P^{-1}$.
8. Calculer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 –

Soit la fonction $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(x+y-1).$$

1. Déterminer le gradient de f au point (x,y).
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f. *On commencera par factoriser chacune des dérivées partielles par x ou bien par y.*
3. Calculez la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f au point (x,y).
4. Déterminer la nature de chaque point critique.
5. Tracer la ligne de niveau $L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\}$.

Exercice 4 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\exp\left[(x^2+y^2+z^2)^2\right],$$

ainsi que le domaine suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } \ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}\,.$$

On se propose ici de calculer l'intégrale triple

$$M = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

1. Représenter graphiquement le domaine D dans l'espace (il s'agit ici de faire une figure en 3 dimensions).
2. Décrire le domaine D en fonction des coordonnées sphériques r, θ, φ, où φ représente la co-latitude.
3. Calculer l'intégrale M.