Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2014-2015
Module MAT 234

Examen de juin 2015 (session 2) — CORRIGÉ

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 –

Soient a et b deux paramètres réels. Pour quelles valeurs de ces paramètres la matrice M ci-dessous est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}.$$

Indication 1 : on pourra commencer par effectuer les opérations $L_3 := L_3 - L_1$ *et* $L_4 := L_4 - L_2$.
Indication 2 : on pourra ensuite calculer le déterminant "par blocs", ou alors développer selon la première colonne.

Corrigé Avec l'indication, on obtient

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ 0 & 0 & 2a & -2b \\ 0 & 0 & 2b & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} = 4\big(a^2+b^2\big)^2$$

ce qui permet de conclure que M est inversible ssi a ou b est non nul, c'est à dire ssi $(a,b) \neq (0,0)$.

Exercice 2 –

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Donner sans calcul une valeur propre de la matrice A.
3. Déterminer l'ensemble des solutions du système $A\,X = b$ avec $b = (-1, 0, 1)$.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A (*ces valeurs propres seront classées par ordre croissant*).
5. La matrice A est-elle diagonalisable (justifiez votre réponse) ?
6. Déterminer les sous espaces propres de la matrice A.
7. Donner une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D telle que $A = P\,D\,P^{-1}$.
8. Calculer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé

1. $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}\Big\{ \mathrm{v}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$, de sorte que $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension 2 d'après le théorème du rang. Les vecteurs colonnes de la matrice A forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$, il suffit donc de choisir deux vecteurs colonnes linéairement indépendant. Par exemple, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}\Big\{ \mathrm{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathrm{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$.
2. Puisque $\dim \mathrm{Ker}(A) \neq 0$, la matrice A est non inversible et 0 est valeur propre de A de sous espace propre associé $E_0 = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}\{\mathrm{v}_0\}$.

3. On remarque que $b=(-1,0,1)=w_2$ est le second vecteur colonne de la matrice A et appartient donc à $\mathrm{Im}(A)$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système $A\,X=b$ est donc de la forme "solution particulière + $\mathrm{Ker}(A)$". Précisément,
$$\mathcal{S}=e_2+\mathrm{Ker}(A)=e_2+\lambda\,v_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \lambda\in I\!R.$$

4. $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1 & -1\\ -1 & -\lambda & -1\\ 3 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}\underset{L_1:=L_1+L_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1-\lambda\\ -1 & -\lambda & -1\\ 3 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & -\lambda & -1\\ 3 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$
$\underset{C_3:=C_3-C_1}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -\lambda & 0\\ 3 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda).$
De sorte que les valeurs propres de A sont $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=1$.
5. La matrice A (d'ordre 3) est diagonalisable (dans $I\!R$) car elle admet 3 valeurs propres réelles simples (cad de multiplicité algébrique égale à 1).
6. La détermination des sous espaces propres, chacun de dimension 1, conduit à
$E_{\lambda_1}=\mathrm{vect}\Big\{\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Big\}$, $\quad E_{\lambda_2}=\mathrm{vect}\Big\{\mathrm{v}_2=\mathrm{v}_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\Big\}$, $\quad E_{\lambda_3}=\mathrm{vect}\Big\{\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\Big\}$.
7. La matrice P est composée des vecteurs propres v_1,v_2,v_3 et $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, de sorte qu'après calcul de l'inverse P^{-1} on obtient
$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=P\,D\,P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
8.
$$\begin{aligned}A^n=P\,D^n\,P^{-1}\quad &=P\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\\ &=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\qquad =A \qquad\qquad \text{si n est impair,}\\ &=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\qquad =\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\qquad \text{si n est pair.}\end{aligned}$$

Exercice 3 –
Soit la fonction $f\ :I\!R^2\to I\!R$ définie par
$$f(x,y)=xy(x+y-1).$$

1. Déterminer le gradient de f au point (x,y).
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f. *On commencera par factoriser chacune des dérivées partielles par x ou bien par y.*
3. Calculez la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f au point (x,y).
4. Déterminer la nature de chaque point critique.
5. Tracer la ligne de niveau $L_0=\{(x,y)\in I\!R^2,\ f(x,y)=0\}$.

Corrigé

1. $f(x,y)=x^2y+xy^2-xy$ conduit à
$$\nabla f(x,y)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)=\big(2xy+y^2-y,\ x^2+2xy-x\big)=\Big(y(2x+y-1),\ x(x+2y-1)\Big).$$

2. Trouver les points critiques de f revient à résoudre le système $\nabla f(x,y) = (0,0)$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} y(2x+y-1)=0 \\ x(x+2y-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} & y=0 \text{ ou } 2x+y-1=0 \\ \text{et} & \\ & x=0 \text{ ou } x+2y-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} & y=0 \quad \text{et} \quad x=0 \\ \text{ou} & \\ & y=0 \quad \text{et} \quad x+2y-1=0 \\ \text{ou} & \\ & 2x+y-1=0 \quad \text{et} \quad x=0 \\ \text{ou} & \\ & 2x+y-1=0 \quad \text{et} \quad x+2y-1=0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x=0) \quad \text{ou} \quad (y=0 \text{ et } x=1) \quad \text{ou} \quad (y=1 \text{ et } x=0) \quad \text{ou} \quad (x=1/3 \text{ et } y=1/3)$.
La fonction f admet donc 4 points critiques qui sont $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$, $D=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

3.
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}.$$

4. – Point A : $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant est négatif. Il s'agit d'un point col.
   – Point B : $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant est négatif. Il s'agit d'un point col.
   – Point C : $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant est négatif. Il s'agit d'un point col.
   – Point D : $H_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ Le déterminant est positif. Il s'agit d'un minimum local.
5. $f(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad xy(x+y-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=0)$ ou $(y=0)$ ou $(x+y-1=0)$, de sorte que L_0 est la réunion des 3 droites d'équation $x=0$, $y=0$ et $x+y=1$.

Exercice 4 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\exp\left[(x^2+y^2+z^2)^2\right],$$

ainsi que le domaine suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } \ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}\,.$$

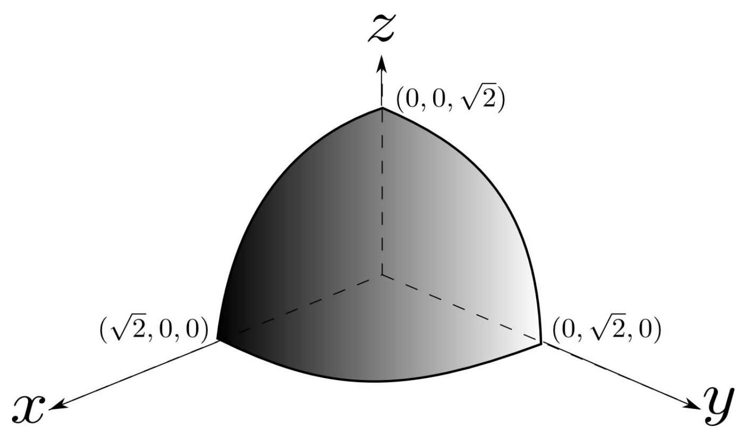
On se propose ici de calculer l'intégrale triple

$$M = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

1. Représenter graphiquement le domaine D dans l'espace (il s'agit ici de faire une figure en 3 dimensions).
2. Décrire le domaine D en fonction des coordonnées sphériques r, θ, φ, où φ représente la co-latitude.
3. Calculer l'intégrale M.

Corrigé

1. Le domaine D correspond à un huitième de la sphère de rayon $\sqrt{2}$, centrée à l'origine, compris dans la portion d'espace $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.



2. En coordonnées sphériques, le domaine D s'écrit

$$D' = \{(r,\theta,\varphi) \ \text{ tel que } \quad 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

3.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\ \exp\Big[(x^2+y^2+z^2)^2\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \iiint_{D'} r\ \exp(r^4)\,|r^2\ \sin(\varphi)|\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \Big(\int_0^{\sqrt{2}} r^3\ \exp(r^4)\,\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\Big) \\
&= \Big[\frac{1}{4}\exp(r^4)\Big]_0^{\sqrt{2}} \times \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \Big[-\cos(\varphi)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\Big(\exp(4)-\exp(0)\Big) \times \frac{\pi}{2} \times \Big(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\Big) \\
&= \frac{\pi}{8}(e^4-1).
\end{aligned}$$