Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2014-2015
Module MAT 234

Examen du jeudi 8 janvier 2015

Une feuille A4 recto-verso <u>*manuscrite*</u> *est autorisée.*
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 –

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = xy\, e^{x^2 - y^2}.$$

1. Déterminer le gradient $\nabla f(x, y)$ de f au point (x, y).
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
3. Calculer la matrice hessienne $H_f(x, y)$ de f au point (x, y).
4. Pour chaque point critique $(\hat{x}, \hat{y})$ de f :
   a) calculer la matrice $H_f(\hat{x}, \hat{y})$,
   b) déterminer ses valeurs propres et les sous espaces propres associés,
   c) en déduire (si possible) la nature du point critique $(\hat{x}, \hat{y})$,
   d) écrire l'équation des "*coupes*" du graphe de la fonction f dans la direction des sous espaces propres,
   e) commentez ces "*coupes*".
5. Tracer la ligne de niveau L_k de f pour $k = 0$.

On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 1 \leq 0,\ y \geq 0,\ y - 2x \leq 0\}.$$

6. Représenter graphiquement le domaine D.
7. Calculer l'intégrale

$$V = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 2 –

On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{3x-y}.$$

1. Vérifier que cette équation est équivalente à

$$s\, \frac{\partial g}{\partial s} = s\, t^2$$

   par le changement de variables $(x, y) \mapsto \big(s(x, y), t(x, y)\big) = (e^{x+y}, e^{x-y}) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$, où $g(s, t)$ est la nouvelle fonction inconnue.
2. Trouver toutes les solutions de cette équation et exprimer la solution en fonction des variables x, y.

Exercice 3 –

On considère les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -b & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 2b \\ b^2 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

dépendant d'un paramètre $b \geq 0$.

1. Pour quelles valeurs du paramètre b les matrices A, B, C sont-elles inversibles ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(C)$ et de $\mathrm{Im}(C)$ dans chacun des cas suivants : $b \neq 0$ et $b = 0$.
3. Dans le cas $b = 0$, déterminer tous les vecteurs $X = (x, y, z, t)$ tels que $CX = v$, pour les vecteurs suivants
   a) $v = (8, 0, 8, 0)$,
   b) $v = (3, 2, 7, 8)$.
4. Dans chacun des deux cas $b = 0$ et $b > 0$:
   a) déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune des matrices A et B (*la première composante de chaque vecteur propre sera choisie égale à 1*),
   b) préciser si ces matrices A et B sont diagonalisables ou non (en justifiant votre réponse).
5. On suppose désormais que $b > 0$ et on s'intéresse à la matrice A.
   a) Donner une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D telle que $A = P\,D\,P^{-1}$.
   b) Calculer $A^n - b^{n-1}A$ pour $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.