Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2014-2015
Module MAT 234

Examen du jeudi 8 janvier 2015 — CORRIGÉ

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 –

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = xy\, e^{x^2-y^2}.$$

1. Déterminer le gradient $\nabla f(x,y)$ de f au point (x,y).
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
3. Calculer la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f au point (x,y).
4. Pour chaque point critique $(\hat{x},\hat{y})$ de f :
   a) calculer la matrice $H_f(\hat{x},\hat{y})$,
   b) déterminer ses valeurs propres et les sous espaces propres associés,
   c) en déduire (si possible) la nature du point critique $(\hat{x},\hat{y})$,
   d) écrire l'équation des "*coupes*" du graphe de la fonction f dans la direction des sous espaces propres,
   e) commentez ces "*coupes*".
5. Tracer la ligne de niveau L_k de f pour $k=0$.

On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-1 \leq 0,\ y \geq 0,\ y-2x \leq 0\}.$$

6. Représenter graphiquement le domaine D.
7. Calculer l'intégrale
$$V = \iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Corrigé

On note que la fonction f est (au moins) de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1.
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y\big(1+2x^2\big)\, e^{x^2-y^2} \\ x\big(1-2y^2\big)\, e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

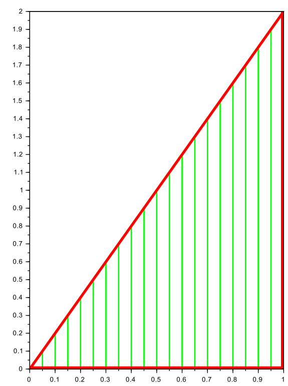
2. (x,y) est un point critique de f ssi $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, c'est-à-dire ssi

$$\begin{cases} y\big(1+2x^2\big) = 0 \\ x\big(1-2y^2\big) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \ \text{ ou } \ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 \tag{1}$$

car l'exponentielle ne s'annule pas. Ainsi, f admet l'unique point critique $(\hat{x},\hat{y}) = (0,0)$.

3.
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy\,(3+2x^2) & (1+2x^2)(1-2y^2) \\ (1+2x^2)(1-2y^2) & -2xy\,(3-2y^2) \end{pmatrix} e^{x^2-y^2}.$$

4. Pour l'unique point critique $(\hat{x}, \hat{y}) = (0,0)$ de f, on a $H_0 = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Remarque : H_0 est symétrique, elle est diagonalisable et admet une base de vecteurs propres orthogonaux.
   Son polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ fournit les 2 valeurs propres simples $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$, de signes opposés, de sorte que f admet un point selle en $(0,0)$.
   Les sous espaces propres sont les 2 droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.
   Les "coupes" du graphe de f dans ces 2 directions sont respectivement les courbes
   $x \mapsto f_{y=x}(x) = f(x,x) = x^2\, e^{x^2-x^2} = x^2\, e^0 = x^2$,
   $x \mapsto f_{y=-x}(x) = f(x,-x) = -x^2\, e^{x^2-x^2} = -x^2\, e^0 = -x^2$,
   ce qui confirme que le point $(0,0)$ est bien un point selle.
5. $L_{k=0} = \{(x,y) \in I\!R^2,\ xy\, e^{x^2-y^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ xy = 0\,\}$,
   autrement dit $L_{k=0}$ est l'union des deux droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$.
6.



7.

$$V = \iint_D xy\, e^{x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{x=0}^{x=1} \Big(x\, e^{x^2} \int_{y=0}^{y=2x} y\, e^{-y^2}\, \mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x \;=\; \int_{x=0}^{x=1} \Big(x\, e^{x^2} \Big[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big]_{y=0}^{y=2x} \Big) \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} x\, e^{x^2} \Big(e^{-4x^2} - e^0 \Big) \mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \Big(x\, e^{-3x^2} - x e^{x^2} \Big) \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2} \Big[-\frac{1}{6} e^{-3x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} \Big]_{x=0}^{x=1} \;=\; -\frac{1}{2} \Big(-\frac{1}{6} e^{-3} - \frac{1}{2} e + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \Big) \;=\; \frac{1}{12}\, e^{-3} + \frac{1}{4}\, e - \frac{1}{3}.$$

Exercice 2 –

On considère dans $I\!R^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2 e^{3x-y}.$$

1. Vérifier que cette équation est équivalente à

$$s\, \frac{\partial g}{\partial s} = s\, t^2$$

   par le changement de variables $(x,y) \mapsto \big(s(x,y), t(x,y)\big) = (e^{x+y}, e^{x-y}) \in\,]0,\infty[\, \times\,]0,\infty[$, où $g(s,t)$ est la nouvelle fonction inconnue.
2. Trouver toutes les solutions de cette équation et exprimer la solution en fonction des variables x, y.

<u>Corrigé</u>

1. En terme de $g(s(x,y), t(x,y)) = f(x,y)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = e^{x+y}\, \frac{\partial g}{\partial s} + e^{x-y}\, \frac{\partial g}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = e^{x+y}\, \frac{\partial g}{\partial s} - e^{x-y}\, \frac{\partial g}{\partial t},$$

de sorte que le premier membre de l'équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{x+y}\frac{\partial g}{\partial s} = 2s\frac{\partial g}{\partial s}.$$

Par ailleurs $st^2 = e^{x+y}\, e^{2(x-y)} = e^{3x-y}$, de sorte que l'équation aux dérivées partielles s'écrit bien sous la forme

$$s\,\frac{\partial g}{\partial s} = st^2.$$

2. Comme $s = e^{x+y} \neq 0$, on peut diviser par s, ce qui donne $\dfrac{\partial g}{\partial s} = t^2$. En intégrant par rapport à s on obtient donc

$$g(s,t) = s\,t^2 + h(t),$$

où $h \in C^1(0,\infty)$, et donc $f(x,y) = e^{3x-y} + h(e^{x-y})$.

Exercice 3 –

On considère les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -b & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 2b \\ b^2 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

dépendant d'un paramètre $b \geq 0$.

1. Pour quelles valeurs du paramètre b les matrices A, B, C sont-elles inversibles ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(C)$ et de $\mathrm{Im}(C)$ dans chacun des cas suivants : $b \neq 0$ et $b = 0$.
3. Dans le cas $b = 0$, déterminer tous les vecteurs $X = (x,y,z,t)$ tels que $CX = v$, pour les vecteurs suivants
   a) $v = (8,0,8,0)$,
   b) $v = (3,2,7,8)$.
4. Dans chacun des deux cas $b = 0$ et $b > 0$:
   a) déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune des matrices A et B (*la première composante de chaque vecteur propre sera choisie égale à 1*),
   b) préciser si ces matrices A et B sont diagonalisables ou non (en justifiant votre réponse).
5. On suppose désormais que $b > 0$ et on s'intéresse à la matrice A.
   a) Donner une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D telle que $A = P\,D\,P^{-1}$.
   b) Calculer $A^n - b^{n-1}A$ pour $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé

1. On a $\det(A) = -b^2$ et $\det(B) = -b^2$. La matrice C est triangulaire par blocs avec A et B sur la diagonale donc $\det(C) = \det(A)\det(B) = b^4$ (alternativement on peut faire des opérations sur les lignes et colonnes). Dans les trois cas le déterminant est non nul ssi $b \neq 0$, de sorte que les trois matrices sont inversibles si et seulement si $b \neq 0$.
2. Cas $b \neq 0$: la matrice C est inversible d'après le point précédent, de sorte que $\mathrm{Ker}(C) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(C) = \mathbb{R}^4$. Une base de $\mathrm{Im}(C)$ est par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   Cas $b = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(C) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow\ y = 0\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   de sorte que $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   Par ailleurs, on a clairement $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ (*unique vecteur colonne non nul de la matrice C*).

3. a) On vérifie ici que $v = (8, 0, 8, 0) \in \text{Im}(C)$. Une solution particulière est par exemple $w = (8, 8, 8, 8)$, de sorte que les solutions sont de forme $X = w + \text{Ker}(C)$.
   b) Il n'y a pas de solutions car $v \notin \text{Im}(C)$.
4. On détermine les polynômes caractéristiques de chacune des matrices A et B

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - b^2 = (\lambda + b)(\lambda - b),$$
$$\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - b^2 = (\lambda + b)(\lambda - b).$$

- Cas $b = 0$
  ◇ La matrice A admet une valeur propre $\lambda_1 = 0$ de multiplicité 2, et de sous espace propre associé

$$E_{\lambda_1} = \text{Ker}(A - \lambda_1 \text{id}) = \text{Vect}\{(1, 0)\}.$$

  Ainsi : $\dim(E_{\lambda_1}) < Mult(\lambda_1)$, donc A n'est pas diagonalisable.
  ◇ En revanche B est une matrice diagonale (matrice nulle) pour $b = 0$.
- Cas $b \neq 0$
  Dans ce cas, chacune des matrices A et B admet les deux valeurs propres simples (càd, de multiplicité 1) $\lambda_1 = -b$ et $\lambda_2 = b$, ce qui assure que ces deux matrices sont diagonalisables.
  On détermine ensuite les sous espaces propres associés

$$\text{Ker}(A - \lambda_1 \text{id}) = \text{Vect}\{(1, -b)\}, \qquad \text{Ker}(B - \lambda_1 \text{id}) = \text{Vect}\{(1, 0)\},$$
$$\text{Ker}(A - \lambda_2 \text{id}) = \text{Vect}\{(1, b)\}, \qquad \text{Ker}(B - \lambda_2 \text{id}) = \text{Vect}\{(1, 1)\}.$$

5. a) On déduit immédiatement de la question précédente que

$$A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2b \\ 1/2 & 1/2b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} b & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) $A^n - b^{n-1}A = PD^nP^{-1} - b^{n-1}PDP^{-1} = P\Big(D^n - b^{n-1}D\Big)P^{-1}$,
   avec $D^n - b^{n-1}D = \begin{pmatrix} (-b)^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} - b^{n-1} \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-b)^n + b^n & 0 \\ 0 & b^n - b^n \end{pmatrix}$, de sorte que :
   - si n est impair, alors : $A^n - b^{n-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   - si n est pair, alors : $A^n - b^{n-1}A = P \begin{pmatrix} 2b^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} 2b^{n+1} & -2b^n \\ -2b^{n+2} & 2b^{n+1} \end{pmatrix} = b^{n-1} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -b^2 & b \end{pmatrix}$.