Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2013-2014

Module MAT 234

Examen du lundi 6 janvier 2014 : CORRIGÉ

Exercice 1 – [*7 points*] *On lira l'énoncé jusqu'au bout. Les questions ci-dessous pourront être traitées dans un ordre quelconque, mais elles seront* <u>*toutes*</u> *traitées (sauf peut-être une...) et les réponses seront précisément justifiées (en fonction de l'ordre choisi).* –
L'espace $I\!R^4$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et on considère l'application linéaire f de $I\!R^4$ dans $I\!R^4$ dont la matrice A dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.
2. Calculer la matrice A^p pour $p \in I\!N$.
3. Déterminer le noyau de f.
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
5. Déterminer les valeurs propres de la matrice A (et donc de f) avec leur multiplicité.
6. Surtout ne pas réfléchir et partir immédiatement dans les calculs.
7. Déterminer les sous espaces propres de f, préciser leur dimension, et donner une base de vecteurs propres de f.
8. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
9. Déterminer le rang de f.
10. Calculer la matrice A^2.
11. Déterminer l'image des vecteurs $v_1 = e_2 + e_3 + e_4,\ v_2 = e_1 - e_3,\ v_3 = e_1 + e_2 - e_3,\ v_4 = e_1 - e_3 - e_4$ par f. *L'étudiant(e) devrait logiquement réfléchir ici au "pourquoi" de cette question... mais bon, l'étudiant(e) est pressé(e) et il passe vite à d'autres calculs...*
12. Déterminer la dimension de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. *On pourra extraire un déterminant non nul d'ordre 3, sinon, il faudra résoudre un système homogène....*

Corrigé exercice 1

10. Un calcul immédiat donne $A^2 = I$.
1. De sorte que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A$.
3. A étant inversible, on a $\ker(A) = \{0\}$ ...
9. ... et donc $\text{rang}(f) = 4$, d'après le théorème du rang.
2. Une récurrence immédiate donne ensuite $A^p = I$ si p pair et $A^p = A$ si p impair.
11. On effectue le produit de la matrice A par les composantes des vecteurs v_i exprimées dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \\ \hline 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et donc } \left\{ \begin{array}{rcr} f(v_1) & = & -v_1 \\ f(v_2) & = & -v_2 \\ f(v_3) & = & -v_3 \\ f(v_4) & = & v_4 \end{array} \right.$$

de sorte que v_1, v_2, v_3 sont 3 vecteurs propres associé à la val. p. $\lambda_1 = -1$, et v_4 est un vecteur propre associé à la val. p. $\lambda_2 = 1$.

12. $\alpha_1\,v_1 + \alpha_2\,v_2 + \alpha_3\,v_3 = 0$ conduit après quelques calculs à $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille $\{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ est donc libre et $\dim\big(\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}\big) = 3$.
7. En notant E_{λ_i} le sous espace propre associé à la valeur propre λ_i, on déduit des questions 11 et 12 que :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Vect}\{v_1,\, v_2,\, v_3\} \subset E_{\lambda_1} & \Longrightarrow \dim(E_{\lambda_1}) \geq 3 \\ \text{Vect}\{v_4\} \subset E_{\lambda_2} & \Longrightarrow \dim(E_{\lambda_2}) \geq 1 \\ & \qquad\qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{v_1,\, v_2,\, v_3\} \text{ et } E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{v_4\}\,,$$

et donc $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $I\!R^4$ composée de vecteurs propres de f,...

8. ... de sorte que la matrice A est diagonalisable,...
5. ... et les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$ de multiplicité 3 et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité 1,...
4. ... et finalement, la matrice A se diagonalise donc sous la forme $A = P\,D\,P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 – [*2 points*] *Coucou, me revoilà...* On considère trois bases $\mathcal{B}_0 = (u_0, v_0)$, $\mathcal{B}_1 = (u_1, v_1)$ et $\mathcal{B}_2 = (u_2, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que *la matrice de passage* $P_{i,j}$ *de la base* $\mathcal{B}_i$ *vers la base* $\mathcal{B}_j$ *est la matrice de l'application identité Id de* $\mathbb{R}^2$ *muni de la base* $\mathcal{B}_j$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *muni de la base* $\mathcal{B}_i$.

Exprimer la matrice $P_{1,2}$ à l'aide des 2 matrices de passage $P_{0,1}$ et $P_{0,2}$.

Justifier votre réponse à l'aide du schéma : $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Id} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{Id} \mathbb{R}^2$, *que vous compléterez.*

Corrigé exercice 2

On considère les schémas suivants qui mettent en jeu les matrices de passage $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ et $P_{1,2}$.

$$\mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_1} \xrightarrow[P_{0,1}]{Id} \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_0} \qquad \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_2} \xrightarrow[P_{0,2}]{Id} \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_0} \qquad \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_2} \xrightarrow[P_{1,2}]{Id} \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_1}$$

et donc :

$$\mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_2} \xrightarrow[P_{0,2}]{Id} \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_0} \xrightarrow[(P_{0,1})^{-1}]{Id} \mathbb{R}^2{}_{\mathcal{B}_1} \implies P_{1,2} = \left(P_{0,1}\right)^{-1} P_{0,2}.$$

Exercice 3 – [*4 points*] On donne les matrices carrés A et B dépendant de paramètres a_i.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_3 \\ \vdots & & & & a_1 & a_2 \\ a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler en une phrase ce que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure.
2. Justifier que le déterminant de chacune des matrices A et B est nul pour $a_1 = a_2$.
3. Calculer le déterminant de la matrice A. *Pour cela on commencera par retrancher la première colonne à toutes les autres colonnes. Puis, on développera ce déterminant par rapport à la dernière ligne. Attention : toute expression non factorisée du déterminant ne sera pas prise en compte ! Ainsi, l'expression du déterminant doit permettre de répondre simplement à la question suivante.*
4. Pour quelles valeurs des paramètres a_i la matrice A est-elle inversible ?
5. Donner sans justification la valeur du déterminant de la matrice B (*attention au signe*).

Corrigé exercice 3

1. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.
2. Pour $a_1 = a_2$, les 2 premières colonnes de chacune des matrices A et B sont identiques, de sorte que leur déterminant est nul.
3. $$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_1 & 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 - a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & 0 & a_2 - a_1 \end{vmatrix}$$
$$= -a_1\,(a_2 - a_1)^3 = a_1\,(a_1 - a_2)^3.$$
4. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, et donc ssi ($a_1 \neq 0$ et $a_1 \neq a_2$).
5. $$\det(A) = (-1)^{n+1}\,a_1\,(a_2 - a_1)^{n-1} = a_1\,(a_1 - a_2)^{n-1}.$$

Exercice 4 – [*7 points*]

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3.$$

On déconseille de développer cette expression. – Les deux parties sont <u>*indépendantes*</u>.

<u>Partie I</u> –

1. Déterminer le gradient $\nabla f(x,y)$ de f au point (x,y).
2. Déterminer les points critiques de f. *En additionnant les 2 dérivées partielles, on déduira que les points critiques sont sur une droite que l'on précisera, ce qui devrait permettre de conclure.*
3. Calculer la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f au point (x,y).
4. Peut-on déduire la nature des points critiques à l'aide de la matrice hessienne ?
5. Tracer la coupe $x \mapsto f(x,x)$ du graphe (surface représentative) de la fonction f par le plan $y = x$.
6. Déterminer la nature des points critiques.

<u>Partie II</u> – On souhaite maintenant calculer l'intégrale

$$V = \iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

avec $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \ y-x-1 \leq 0,\ \ y-x+1 \geq 0,\ \ y+x-1 \leq 0,\ \ y+x+1 \geq 0\ \big\}$.

7. Représenter graphiquement (et précisément) le domaine D dans le plan (x,y).

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(u,v) \mapsto \big(x = \frac{1}{2}(u-v),\ \ y = \frac{1}{2}(u+v)\big).$$

8. Déterminer u et v en fonction de x et y (*ce qui implicitement montre que* Φ *est bijective*).
9. Représenter graphiquement (et précisément) le domaine $D' = \Phi^{-1}(D)$ dans le plan (u,v).
10. Calculer la matrice jacobienne $J_\Phi(u,v)$ de Φ au point (u,v).
11. Utiliser le changement de variable Φ pour calculer l'intégrale

$$V = \iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ = \ \iint_{D'} f\circ\Phi(u,v)\ \Big|\det\big(J_\Phi(u,v)\big)\Big|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Corrigé exercice 4

<u>Partie I</u> –

1. On remarque que la fonction f est (au moins) de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-y)+3(x+y)^2 \\ -2(x-y)+3(x+y)^2 \end{pmatrix}.$$

2. (x,y) est un point critique de f ssi $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, c'est-à-dire ssi

$$\begin{cases} 2(x-y)+3(x+y)^2 = 0 & (1) \\ -2(x-y)+3(x+y)^2 = 0 & (2) \end{cases} \quad \overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} \quad 6(x+y)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x+y=0.$$

De sorte que les points critiques appartiennent à la droite $x+y=0$. En reportant dans les équations (1) et (2) on obtient finalement que les points critiques vérifient les 2 équations $x+y=0$ et $x-y=0$, de sorte que f admet un unique point critique en $(0,0)$.

3. La matrice hessienne au point (x,y) s'écrit :

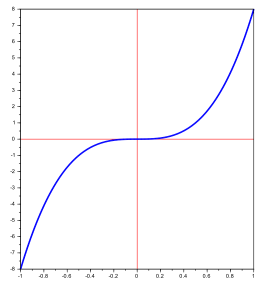
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6(x+y) & -2+6(x+y) \\ \\ -2+6(x+y) & 2+6(x+y) \end{pmatrix}.$$

4. Le déterminant de la matrice hessienne au point critique $(0,0)$ vaut

$$\det\big(H_f(0,0)\big) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

de sorte qu'on ne peut pas déduire directement la nature des points critiques avec la matrice hesssienne.

5.

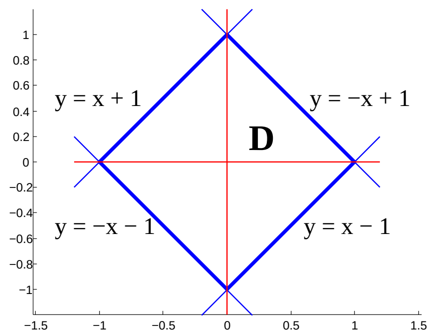


Coupe $y = x$: $x \mapsto f(x,x) = (2\,x)^3$

6. La coupe $y = x$ ci-dessus montre que le point critique $(0,0)$ est un point col.

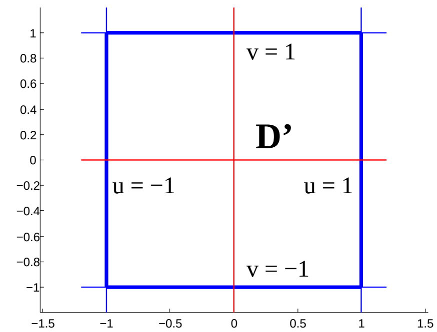
Partie II –

7.



Domaine D dans le plan (x,y)

9.



Domaine $D' = \Phi^{-1}(D)$ dans le plan (u,v)

8.

$$(x,y) \mapsto \big(u = x + y,\ \ v = y - x\big).$$

10.

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u,v) \\[2ex] \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\[2ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \Big((x-y)^2 + (x+y)^3\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ = \ \iint_{D'} \big((-v)^2 + u^3\big)\ \frac{1}{2}\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{1} \big(v^2 + u^3\big)\ \mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}v \ = \ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big[\big(v^2 u + \frac{u^4}{4}\big]_{u=-1}^{u=1}\ \mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^{1} v^2\ \mathrm{d}v \ = \ \frac{2}{3}. \end{aligned}$$