Université de Grenoble Alpes Année 2015-2016

DLST – Module MAT234

Examen du lundi 4 janvier 2016

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 –

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.
2. En déduire $\det(A)$.
3. Calculer l'image par A du vecteur $v_3 = e_1 + e_2$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Trouver toutes les solutions de l'équation
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A (*classées par ordre croissant*).
6. Peut-on conclure que la matrice A est diagonalisable ?
7. Déterminer une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D (*dont les éléments diagonaux seront dans un ordre croissant*) telles que
$$A = P\,D\,P^{-1}.$$
8. Calculer A^n pour tout entier n.

Exercice 2 –

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x) \tag{1}$$

sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ à l'aide du changement de variable $u = \exp(x)$, $v = xy$.

Exercice 3 –

On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y) = x(x^2+y^2) - x.$$

1. Dessiner la ligne de niveau L_0 de la fonction f.
2. Déterminer les points critiques de la fonction f.
3. Préciser la nature de chaque point critique de f.
4. Soit D la région du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

   Répresenter graphiquement le domaine D.
5. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

   à l'aide d'un changement de variables approprié.

Exercice 4 –

Soit D_n le déterminant de taille $n \times n$ défini par :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 & n \\ 0 & & & & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & & & \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1. Pour chacun des déterminants D_n suivants ($n = 2,3,4,5$), donner son expression en fonction de D_{n-1}.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer D_2, D_3, D_4, D_5.
3. Donner l'expression de D_n en fonction de D_{n-1}.
4. <u>*Bonus*</u> – En déduire la valeur de D_n en fonction de n.
   Pour cela, on écrira l'égalité trouvée en question 3 pour tous les entiers compris entre 2 et n et on fera le produit de ces égalités.
   Indication : $1+2+3+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.