Université de Grenoble Alpes Année 2015-2016
DLST – Module MAT234

Examen du lundi 4 janvier 2016 — CORRIGÉ

Exercice 1 –
Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.
2. En déduire $\det(A)$.
3. Calculer l'image par A du vecteur $v_3 = e_1 + e_2$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Trouver toutes les solutions de l'équation
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A (*classées par ordre croissant*).
6. Peut-on conclure que la matrice A est diagonalisable ?
7. Déterminer une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D (*dont les éléments diagonaux seront dans un ordre croissant*) telles que
$$A = P\,D\,P^{-1}.$$
8. Calculer A^n pour tout entier n.

Corrigé.

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où :
$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Les vecteurs colonnes de la matrice A forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$ qui est donc de dimension 2 d'après le théorème du rang. Les 2 premières colonnes de A étant linéairement indépendantes, elles forment une base de $\mathrm{Im}(A)$:
$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\} \Rightarrow \det(A) = 0$.
3. $A\,v_3 = A\,(e_1 + e_2) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\,e_1 + A\,e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3$.
4. Le vecteur $e_1 + e_2 = (1, 1, 0)^T$ est donc une solution de l'équation $A\,X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation est donc
$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

5. Polynôme caractéristique de A :
$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 3 & -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda),$$
de sorte que A admet 3 valeurs propres simples : $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$.

6. La matrice A (d'ordre 3) admet 3 valeurs propres simples, elle est donc diagonalisable.

7. Il nous faut maintenant déterminer une base de vecteurs propres de A. Calculons les sous espace propres E_{λ_i}. On a déjà :
$$E_{(\lambda_2=0)} = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\Big\{ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}, \text{ d'après la question 1,}$$
$$E_{(\lambda_3=1)} = \mathrm{Vect}\Big\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}, \text{ d'après la question 3.}$$
Un calcul direct conduit ensuite à $E_{(\lambda_1=-1)} = \mathrm{Vect}\Big\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$.

Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de vecteurs propres de A, P est la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, D est la matrice diagonale des valeurs propres, de sorte qu'après calcul de P^{-1}, on obtient
$$A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

8.
$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2 & -(-1)^n - 1 & -(-1)^n - 3 \\ -(-1)^n + 2 & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 3 \\ (-1)^n & -(-1)^n & -(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

Résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x) \tag{1}$$
sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ à l'aide du changement de variable $u = \exp(x)$, $v = xy$.

Corrigé.

On vérifie que le changement de variables proposé est bijectif de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ dans $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} u = \exp(x) \\ v = x\,y \end{cases} (x > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \ln(u) \\ y = \dfrac{v}{\ln(u)} \end{cases} (u > 1).$$
On applique la règle de dérivation en chaine à la fonction $g(u, v) = g\big(u(x, y), v(x, y)\big) = f(x, y)$:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\exp(x) + \frac{\partial g}{\partial v}\,y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \times 0 + \frac{\partial g}{\partial v}\,x \end{aligned}$$

En reportant ces dérivées partielles dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial u} \exp(x) = \exp(x)$$

soit

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 1 \quad \Rightarrow \quad g(u,v) = u + h(v) \quad \text{avec } h \text{ de classe } C^1.$$

Finalement, la solution de l'équation (1) est

$$f(x,y) = e^x + h(xy) \quad \text{avec } h \text{ de classe } C^1.$$

Exercice 3 –

On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y) = x(x^2+y^2) - x.$$

1. Dessiner la ligne de niveau L_0 de la fonction f.
2. Déterminer les points critiques de la fonction f.
3. Préciser la nature de chaque point critique de f.
4. Soit D la région du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

   Répresenter graphiquement le domaine D.
5. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

   à l'aide d'un changement de variables approprié.

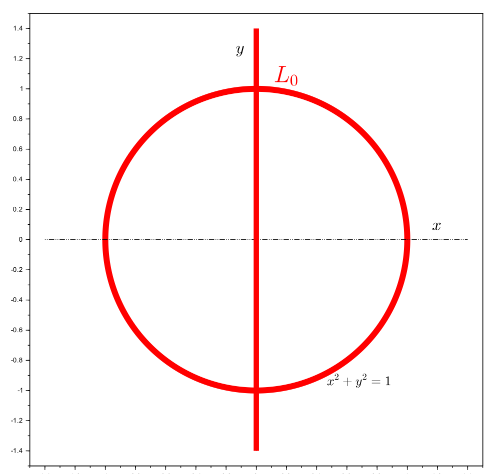
Corrigé.

1. $$L_0 = \Big\{(x,y) \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \,,\; f(x,y) = 0\Big\}.$$

   Par ailleurs :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x\Big((x^2+y^2) - 1\Big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x=0) \;\text{ ou }\; \Big(x^2+y^2 = 1\Big)$$

   D'où la figure ci-contre.



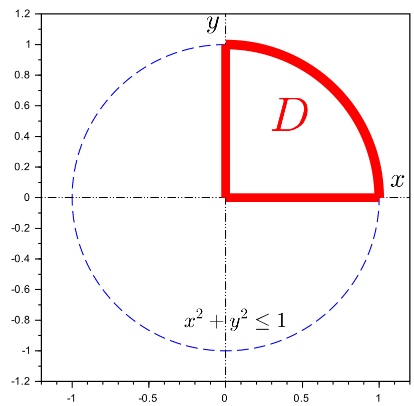
2. (x,y) est un point critique de f ssi $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, c'est-à-dire ssi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+y^2-1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\,x\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2 = 1 \\ (x=0) \;\text{ ou }\; (y=0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=0) \;\text{ et }\; (y^2=1) \\ \text{ou} \\ (y=0) \;\text{ et }\; (x^2=1/3) \end{cases}$$

   de sorte que f admet les 4 points critiques suivants.

$$A = (0,-1)\,, \quad B = (0,1)\,, \quad C = (\frac{-1}{\sqrt{3}},0)\,, \quad D = (\frac{1}{\sqrt{3}},0).$$

3. On utilise la matrice hessienne de f
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$
$$H_f(A) = H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ \det(H_f(A)) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \ \text{point selle en } A$$
$$H_f(B) = H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ \det(H_f(B)) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \ \text{point selle en } B$$
$$H_f(C) = H_f(\tfrac{-1}{\sqrt{3}},0) = \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ \det(H_f(C)) > 0,\ r<0 \quad \Rightarrow \ \text{maxi local strict en } C$$
$$H_f(D) = H_f(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ \det(H_f(D)) > 0,\ r>0 \quad \Rightarrow \ \text{mini local strict en } D$$
4. Classique....



5. Cette intégrale double correspond au calcul du volume du domaine de $\mathbb{R}^3$ situé “au dessus” de D et “sous” le graphe de la fonction f. La géométrie du domaine d'intégration nous incite à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires, ce qui conduit directement à
$$\begin{aligned} I &= \iint_D \Big(x(x^2+y^2) - x\Big)dxdy \\ &= \iint_{D'} \Big(r\cos\theta\,(r^2) - r\cos\theta\Big)\, r\, drd\theta \qquad \text{avec } D' = \Big\{(r,\theta),\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\pi/2\Big\} \\ &= \iint_{D'} \cos\theta\,(r^4-r^2)\,drd\theta \\ &= \Big(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\Big)\times\Big(\int_0^1 (r^4-r^2)\,dr\Big) \\ &= \Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} \times \Big[\frac{r^5}{5} - \frac{r^3}{3}\Big]_0^1 \\ &= -\frac{2}{15} \end{aligned}$$

Exercice 4 –

Soit D_n le déterminant de taille $n\times n$ défini par :
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 & n \\ 0 & & & & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & & & \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1. Pour chacun des déterminants D_n suivants ($n = 2, 3, 4, 5$), donner son expression en fonction de D_{n-1}.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer D_2, D_3, D_4, D_5.
3. Donner l'expression de D_n en fonction de D_{n-1}.
4. <u>*Bonus*</u> – En déduire la valeur de D_n en fonction de n.
   Pour cela, on écrira l'égalité trouvée en question 3 pour tous les entiers compris entre 2 et n et on fera le produit de ces égalités.
   Indication : $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

<u>Corrigé.</u>

1. On développe chacun de ces déterminants par rapport à la première ligne :
   $D_2 = -2\,D_1\,, \quad D_3 = 3\,D_2\,, \quad D_4 = -4\,D_3\,, \quad D_5 = 5\,D_4$.
2. Un calcul direct donne successivement
   $D_2 \;=\; -2\,D_1 \;=\; -2 \times 1 \;=\; -2$
   $D_3 \;=\; 3\,D_2 \;=\; 3 \times (-2) \;=\; -6$
   $D_4 \;=\; -4\,D_3 \;=\; -4 \times (-6) \;=\; 24$
   $D_5 \;=\; 5\,D_4 \;=\; 5 \times 24 \;=\; 120$
3. On développe D_n par rapport à la première ligne : $D_n \;=\; (-1)^{n+1}\, n\, D_{n-1},\;\; n \geq 2$.
4. Ecrivons l'égalité ci dessus pour les entiers compris entre 2 et n :

$$\begin{aligned} D_2 &= (-1)^3\; 2 \\ D_3 &= (-1)^4\; 3\,D_2 \\ D_4 &= (-1)^5\; 4\,D_3 \\ D_5 &= (-1)^6\; 5\,D_4 \\ &\cdots\cdots \\ D_{n-2} &= (-1)^{n-1}\;(n-2)\,D_{n-3} \\ D_{n-1} &= (-1)^{n}\;(n-1)\,D_{n-2} \\ D_n &= (-1)^{n+1}\; n\,D_{n-1} \end{aligned}$$

Le produit de ces égalités conduit à :

$$\begin{aligned} D_n &= n!\,\left[(-1)^3 \times (-1)^4 \times (-1)^5 \times \cdots \times (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+1}\right] \\ &= n!\,\left[(-1)^1 \times (-1)^2 \times (-1)^3 \times \cdots \times (-1)^{n-3} \times (-1)^{n-2} \times (-1)^{n-1}\right] \\ &= n!\,(-1)^{1+2+3+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)} \\ &= n!\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$