Université Joseph Fourier - Grenoble I Année 2012-2013
Module MAT 234

Examen du mercredi 26 juin 2013

Tous documents et notes manuscrites interdits.
Calculettes, téléphones portables interdits.

Durée 2h

Exercice 1 – [*8 points*]

On donne la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A avec leur multiplicité, ainsi que les sous espaces propres associés. Justifier que A est diagonalisable.

2. En déduire une matrice diagonale D et une matrice inversible P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 1 & 0 \\ . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telle que $A = P\,D\,P^{-1}$.

3. Déterminer la matrice P^{-1}.

4. Calculer la matrice A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Donner sans calcul :
a) le déterminant de la matrice A,
b) le noyau de la matrice A.

6. Résoudre sans calcul le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

On définit maintenant une suite de vecteurs lignes $U_n = (x_n, y_n, z_n)$ (*qui s'identifie donc à des matrices de taille (1,3)*) par $U_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $U_{n+1} = U_n \,.\, A$.

7. Calculer la limite du vecteur U_n lorsque n tend vers $+\infty$ pour un vecteur initial U_0 vérifiant $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

Exercice 2 – [*5 points*]
On considère les deux domaines suivants.

$$\Delta = \{(x,y) \in I\!R^2 \ , \ y \geq 0, \ x+y \ \leq \ 1, \ y-x \ \leq \ 1\}$$

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \ , \ (x,y) \in \Delta, \ 0 \ \leq \ z \ \leq \ 30 \ x^2 y\}$$

1. Dessiner précisément le domaine Δ dans le plan (O,x,y).

On souhaite calculer l'intégrale $I = \iint_\Delta x^2 y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. Exprimer l'intégrale I sous la forme

$$I = \int_0^1 \Big(\int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} x^2 y \ \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y$$

   en précisant les fonctions φ_1 et φ_2.

3. Calculer l'intégrale I.

4. En déduire le volume V du domaine D.

Exercice 3 – [*4 points*]
On considère la fonction $f : I\!R^2 \to I\!R$ définie par $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$.

1. Déterminer le gradient de f et sa matrice hessienne en un point (x,y).

2. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique de f différent de $(0,0)$, alors $x_0^8 = y_0^8 = 1$.

3. En déduire que f possède exactement trois points critiques que l'on d´eterminera.

4. Donner la nature de chacun de ces points critiques.

5. Que valent les dérivées directionnelles de f au point $(1,1)$. Justifier le résultat.

Exercice 4 – [*4 points*]
Soit $f : I\!R^* \times I\!R \to I\!R$ la fonction définie par $f(x,y) = x + \cos(y^3/x)$.

1. Calculer les deux dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2. Vérifier que f vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$3\,x^2 \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ + xy \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2. \tag{1}$$

3. Résoudre l'équation (1) sur $I\!R^* \times I\!R^*$ à l'aide du changement de variables $u = x$ et $v = y^3/x$.